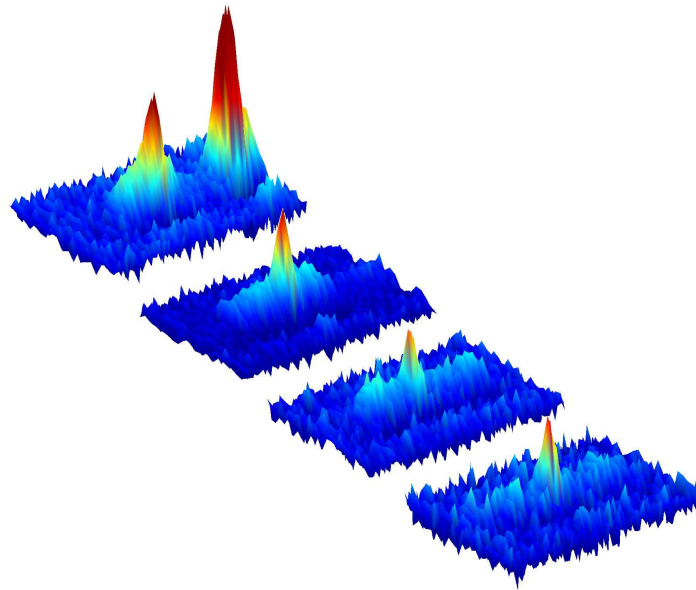


Helle atomare Gap-Solitonen

Diplomarbeit

Matthias Taglieber



Konstanz, Oktober 2003

Universität Konstanz, Fachbereich Physik
Arbeitsgruppe Prof. Dr. M. K. Oberthaler

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Theoretische Grundlagen	5
2.1	Lineare Dispersion von Materiewellen	5
2.1.1	Dispersion freier Teilchen	5
2.1.2	Dispersion in einem periodischen Potential	8
2.2	Bose-Einstein-Kondensation	12
2.2.1	Grundlagen	13
2.2.2	Propagation in einem periodischen Potential	16
2.3	Numerische Methoden	20
2.3.1	Berechnung der Bandstruktur und der Blochfunktionen	20
2.3.2	Simulationen	21
3	Experimentelles System	23
3.1	Apparatur zur Erzeugung des BECs	23
3.1.1	Gesamtaufbau	23
3.1.2	Aufbau um die Glaszelle	28
3.2	Optische Potentiale	29
3.2.1	Wellenleiter (WG) und Haltestrahl (XDT)	29
3.2.2	Periodisches Potential	30
3.2.3	Aktive Stabilisierung der Potentialtiefen	33
3.2.4	Weitere optische Potentiale	33
3.3	Abbildungssystem	35
3.3.1	Absorptionsabbildung kalter Atome	35
3.3.2	Messung der Phasenraumdichte	36
3.4	Bose-Einstein-Kondensation	37
3.4.1	Prinzip der Evaporationskühlung	37
3.4.2	Vorkühlung und Magnetfalle	37
3.4.3	Optische Dipolfalle und Kondensation	38
4	Dispersionsmanagement für Materiewellen	43
4.1	Theoretisches Modell für Propagation im Bereich anomaler Dispersion	44
4.2	Veröffentlichung „Dispersion Management for Atomic Matter Waves“	44
5	Atomares Gap-Soliton	51
5.1	Experimentelle Realisierung	51

Inhaltsverzeichnis

5.1.1	Voraussetzungen	52
5.1.2	Transversale Schwingungen	53
5.1.3	Longitudinale Beschleunigungen	55
5.1.4	Eindimensionalität	55
5.1.5	Bragg-Puls	58
5.1.6	Demonstration des fundamentalen Solitons	59
5.2	Signaturen des fundamentalen Gap-Solitons	60
5.2.1	Gruppengeschwindigkeit und unterdrückte Dispersion	60
5.2.2	Skalierungsverhalten	62
5.3	Solitonen höherer Ordnung	63
5.4	Vorschlag zur Untersuchung von Soliton-Kollisionen	65
5.4.1	Theorie	65
5.4.2	Experimentelle Vorarbeiten	66
5.4.3	Vorschlag zur experimentellen Umsetzung	68
6	Zusammenfassung und Ausblick	73
A	Anhang	77
	Literaturverzeichnis	84
	Danksagung	85

1 Einleitung

Nicht-zerfließende lokalisierte Wellenpakete, helle Solitonen, sind ein Paradebeispiel für nichtlineare Wellendynamik. Ihr Auftreten basiert auf dem Zusammenspiel von Dispersion und Nichtlinearität. Solitonen wurden zum ersten Mal vor fast 200 Jahren von J.S. Russel in einem flachen Wasserkanal beobachtet [1]. Sie spielen heute in vielen Bereichen der Naturwissenschaften und der Technik eine Rolle, von der Reizleitung in Nervenzellen, über ozeanographische Erscheinungen und die Telekommunikation mit Laserpulsen durch Glasfasern bis hin zur Theorie der Elementarteilchen.

Ähnlich wie die Entwicklung des Lasers die Optik revolutioniert und zur Entstehung neuer eigenständiger Forschungsgebiete wie der nichtlinearen Optik geführt hat, so stellte die Realisierung der Bose-Einstein-Kondensation verdünnter atomarer Gase einen Meilenstein für die Materiewellenoptik mit ultrakalten Atomen dar. Sie ermöglichte es, auch in der Atomoptik nichtlineare Effekte zu untersuchen, und war Voraussetzung zur Erzeugung atomarer Solitonen.

Bose-Einstein-Kondensation

Das Konzept der Bose-Einstein-Kondensation (BEC) geht auf eine 1925 von A. Einstein veröffentlichte Arbeit [2] zurück. Aufbauend auf theoretischen Ergebnissen von S. Bose [3] sagte er das Phänomen als eine Konsequenz der Statistischen Mechanik voraus. Die anfängliche Skepsis an den Ergebnissen lässt sich am besten in Einsteins eigenen Worten zusammenfassen:

Von einer bestimmten Temperatur an kondensieren die Moleküle ohne attraktive Kräfte, d.h. sie akkumulieren bei verschwindender Geschwindigkeit. Die Theorie ist schön, aber enthält sie auch etwas Wahrheit?

Bose-Einstein-Kondensation, also die makroskopische Besetzung des quantenmechanischen Grundzustandes in einem System von Bosonen, tritt auf, wenn die deBroglie-Wellenlänge λ_{dB} der Atome vergleichbar mit dem mittleren Atomabstand wird. Genauer formuliert tritt dieser Zustand der so genannten Quantenentartung ein, wenn

$$\mathcal{D} = n\lambda_{\text{dB}}^3 = 2.61, \quad \lambda_{\text{dB}} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}}, \quad (1.1)$$

wobei n für die Atomzahldichte, m für die Masse eines Atoms und T für die Temperatur des Ensembles stehen. Die für den Quantenphasenübergang entscheidende Größe \mathcal{D} wird als Phasenraumdicke bezeichnet.

Heute werden Bose-Einstein-Kondensate schwach wechselwirkender atomarer Gase von immer mehr Gruppen routinemäßig hergestellt und für weitergehende Experimente verwendet. Dieser Situation ging eine lange Phase der Entwicklung und Verfeinerung verschiedener experimenteller Techniken voraus. Grundlegende Methoden der Laserkühlung, wie die magneto-optische Falle (MOT) [4] und das Polarisationsgradientenkühlen wurden in den 1980er Jahren entwickelt. Sie ermöglichten das Erreichen von Temperaturen im μK -Bereich ohne die für Kryostaten typischen Beschränkungen. Da in einer MOT die Quantisierung des Lichts die minimal erzielbare Temperatur limitiert und die Reabsorption gestreuter Photonen zu einer Begrenzung der Dichte führt [5], konnte mit diesen Methoden die Quantenentartung jedoch noch nicht erreicht werden. Signifikante Fortschritte wurden erst durch Transfer der mit Laserkühlmethoden vorgekühlten Atome in eine Magnetfalle erzielt. Ein solcher magnetischer Einschluss neutraler Atome gelang zum ersten Mal 1985 [6] und wurde von der Entwicklung verschiedener Fallengeometrien gefolgt [7]. Mit Magnetfallen lassen sich nahezu perfekte harmonische Potentiale erzielen und die oben genannten Schwierigkeiten der Laserkühlung bei kleinen Temperaturen und großen Dichten vermeiden. Der letzte entscheidende Kühlschritt war schließlich die Anwendung der Evaporationskühlung auf mit Laserkühltechniken vorgekühlte und in einer Magnetfalle gefangene atomare Wolken geeigneter Elemente. Evaporationskühlung [8] basiert auf dem gleichen physikalischen Prinzip, das auch den Kaffee in einer Tasse abkühlen lässt: Durch Entfernung der heißesten Atome, die mehr als die durchschnittliche Energie pro Atom aus dem Ensemble mit sich nehmen, wird die mittlere Energie der Atome des Ensembles erniedrigt. Für ein effektives Funktionieren der Evaporationskühlung ist dabei eine schnelle Rethermalisierung der verbliebenen Atome bei einer neuen, niedrigeren Temperatur durch elastische Stöße notwendig.

Die Entwicklung gipfelte schließlich 1995 in der ersten Beobachtung von BEC in schwach wechselwirkenden Gasen [9, 10]. In diesen Experimenten wurden Rubidium- bzw. Natrium-Atome in einer MOT eingefangen und vorgekühlt. Nach dem Transfer in eine Magnetfalle führte Evaporationskühlung bis zur Quantenentartung. Wenig später wurde auch die Kondensation von Lithium [11, 12] realisiert. Zum Zeitpunkt dieser Arbeit existieren neben Rubidium-, Natrium- und Lithium-BECs auch Kondensate von Wasserstoff, Kalium, Cäsium und metastabilem Helium.

Die ersten Experimente nach der Realisierung von BEC mit Alkaligasen konzentrierten sich auf die makroskopischen Eigenschaften des Kondensats [13, 14, 15, 16]. Später wurde die quantenmechanische Natur des makroskopischen Kondensats untersucht. Die Analogie zwischen der Kohärenz von BECs und von Laserlicht inspirierte dabei zu sehr illustrativen Experimenten, wie der Interferenz von Kondensaten [17, 18] und der Realisierung eines Atomlasers [19, 20, 21].

Nichtlineare Atomoptik

Ähnlich wie die Ausbreitung intensiven Lichts in Medien durch nichtlineare Prozesse aufgrund des Kerr-Effekts stark beeinflusst wird, spielen auch bei der Dynamik eines Bose-Einstein-Kondensats nichtlineare Effekte eine wichtige Rolle. Die Nichtlinearität in einem Kondensat wird dabei durch elastische Stöße zwischen den Atomen hervorgerufen und kann, je nach verwendeter atomarer Spezies, repulsiv oder attraktiv sein. Die Dynamik eines BECs in einem eindimensionalen Wellenleiter und die Entwicklung der Einhüllenden eines Laserpulses in der nichtlinearen Faseroptik werden von formal

identischen Bewegungsgleichungen, den jeweiligen nichtlinearen Schrödingergleichungen, bestimmt. Diese Gleichungen unterstützen, je nach relativem Vorzeichen des Dispersionsterms und des nichtlinearen Terms, helle oder dunkle Solitonen [22, 23]. In der Atomoptik zeichnet sich ein helles Soliton dabei durch eine über die Zeit nicht zerlaufende, lokalisierte Dichteverteilung aus, während ein dunkles Soliton eine mit einem Phasensprung π verbundene, lokalisierte Dichteverdünnung zeitlich konstanter Form auf einem breiten Hintergrund ist. Helle Solitonen für attraktive interatomare Wechselwirkung [24, 25] und dunkle Solitonen für repulsive Wechselwirkung [26, 27] wurden bereits demonstriert. Bei den zwei erstgenannten Experimenten wurden Feshbach-Resonanzen [28, 29, 30] zur experimentellen Kontrolle der interatomaren Wechselwirkung und damit der Nichtlinearität eingesetzt. Für die Realisierung heller Solitonen für repulsive Wechselwirkung muss jedoch das Vorzeichen des Dispersionsterms in der nichtlinearen Bewegungsgleichung umgekehrt werden. Die experimentelle Kontrolle der Dispersion wird als Dispersionsmanagement bezeichnet und ist durch die Verwendung schwacher periodischer Potentiale möglich.

Aus der Festkörperphysik ist bekannt, dass Elektronen in periodischen Potentialen eine veränderte Dispersionsrelation aufweisen, wenn ihr Quasiimpuls am Rand der Brillouinzone liegt [31]. Im Rahmen einer lokalen parabolischen Näherung der Dispersionsrelation wird eine „effektive Masse“ in die Bewegungsgleichungen eingeführt. Ihr Wert hängt vom zentralen Quasiimpuls und der Modulationstiefe des periodischen Potentials ab und kann sowohl positiv als auch negativ sein. Die Dynamik von atomaren Materiewellen in periodischen optischen Potentialen ist in den letzten Jahren in zahlreichen theoretischen und experimentellen Arbeiten untersucht worden [32, 33, 34]. Im Gegensatz zu Systemen aus der Festkörperphysik können in solchen atomoptischen Systemen die periodischen Potentiale experimentell sehr exakt kontrolliert und die Materiewellen direkt im Ortsraum beobachtet werden.

Gliederung dieser Arbeit

Gegenstand der vorliegenden Arbeit sind die Vertiefung der in [35] begonnenen Untersuchungen zum Dispersionsmanagement von Materiewellen und die Anwendung dieser Technik zur experimentellen Realisierung heller atomarer Solitonen im Fall repulsiver Wechselwirkung. In Ergänzung dazu werden experimentelle Vorarbeiten und theoretische Grundlagen zur Studie von Soliton-Kollisionen vorgestellt.

Die Arbeit gliedert sich im Einzelnen wie folgt: Nach dieser Einleitung werden in Kapitel 2 theoretische Grundlagen bereitgestellt, die für die Durchführung und Interpretation von Experimenten mit linearen Materiewellen und BECs in periodischen Potentialen notwendig sind. Es werden zudem numerische Methoden dargestellt, die in Simulationen zu den Experimenten Verwendung finden.

Kapitel 3 gibt einen Überblick über den verwendeten Aufbau und zentrale experimentelle Techniken. Neben einer kurzen Vorstellung der wichtigsten Teile der Apparatur und Berechnungen der optischen Potentiale wird dabei insbesondere auf essentielle Verbesserungen und Umbauten im Rahmen dieser Diplomarbeit eingegangen, die erst die Realisierung von Solitonen ermöglicht haben.

Kapitel 4 beschreibt die Experimente zum Dispersionsmanagement und wurde zu weiten Teilen in [36] veröffentlicht. Ergänzend zu der Veröffentlichung werden Details des Modells, das zur Interpretation der experimentellen Ergebnisse entwickelt wurde,

Kapitel 1 Einleitung

präsentiert und dessen numerische Umsetzung erläutert.

In Kapitel 5 wird schließlich die Realisierung heller atomarer Gap-Solitonen für Atome mit repulsiver Wechselwirkung und deren systematische Untersuchung vorgestellt. Dabei wird insbesondere auch auf aufgetretene experimentelle Hürden und deren jeweilige Lösung eingegangen. Im Rahmen dieser Arbeit wurden zudem ein weiteres Diodenlasersystem und zusätzliche optische Potentiale aufgebaut, die für eine Vielzahl neuer Experimente verwendet werden können. Im Kontext der hier vorgestellten Experimente werden experimentelle Vorarbeiten und theoretische Grundlagen zur Realisierung von Soliton-Kollisionen präsentiert.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Lineare Dispersion von Materiewellen

Ein räumlich endlich breites Wellenpaket hat generell eine nichtverschwindende Impulsbreite. Dispersion, d. h. das Zerfließen eines Wellenpaketes mit der Zeit, tritt immer dann auf, wenn die verschiedenen Impulskomponenten unterschiedliche Gruppengeschwindigkeiten haben. Dies soll in diesem Abschnitt für Materiewellen am Beispiel eines Gaußschen Wellenpaketes konkretisiert werden. Dabei beschränken wir uns auf eine eindimensionale Situation, da die im Rahmen dieser Diplomarbeit durchgeführten Experimente in einem eindimensionalen Wellenleiter stattfinden. Aus didaktischen Gründen wird dabei zunächst der Spezialfall wechselwirkungsfreier Atome betrachtet.

2.1.1 Dispersion freier Teilchen

Gegeben sei zu einem Anfangszeitpunkt $t = 0$ ein unschärfebegrenztes Gaußsches Wellenpaket

$$\Psi(x, 0) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{\sigma^2} + ik_0(x-x_0)\right]. \quad (2.1)$$

Dieses Wellenpaket beschreibt ein in einem Bereich der Breite $2\Delta x(0) = \sigma$ lokalisiertes¹ Atom mit dem Impuls k_0 . Die zugehörige Impulsverteilung $|\Psi(k = \frac{p}{\hbar}, 0)|^2$ ergibt sich aus der Fouriertransformierten $\Psi(k, 0) = (2\pi)^{-1/2} \int \Psi(x, 0)e^{-ikx} dx$. Sie ist gaußförmig um den zentralen Wellenvektor k_0 verteilt und hat eine durch die Heisenbergsche Unschärferelation bestimmte Breite $\Delta p = \hbar\Delta k = \hbar/2\Delta x(0)$.

Die Dynamik dieses Wellenpaketes ist durch die freie Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) \quad (2.2)$$

bestimmt. Die Eigenzustände der freien Schrödingergleichung sind durch die ebenen Wellen e^{ikx} mit den Eigenenergien $E(k)$ gegeben. Die Dispersionsrelation

$$E(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (2.3)$$

ist quadratisch im Wellenvektor k .

¹Mit Δx sei die Standardabweichung $\Delta x(t) = \sqrt{\langle \hat{x}^2 \rangle_t - \langle \hat{x} \rangle_t^2}$ der Wahrscheinlichkeitsverteilung $|\Psi(x, t)|^2$ für die Beobachtung des Atoms zum Zeitpunkt t am Ort x bezeichnet. Analoge Definitionen gelten für die Größen $\Delta p := \Delta p(0)$ und $\Delta k := \Delta k(0)$. Für die $1/e^2$ -Breiten der Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden in dieser Arbeit hingegen immer griechische Buchstaben verwendet.

Der Hamiltonoperator eines freien Teilchens ist im Impulsraum diagonal, so dass die Impulsverteilung bei der Propagation erhalten bleibt. Das Wellenpaket nach einer Zeit t ergibt sich daher am einfachsten aus der Integration der Schrödingergleichung im Impulsraum:

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \Psi(k, 0) e^{-\frac{i}{\hbar} E(k)t} e^{ikx} dk. \quad (2.4)$$

Aus (2.4) ist ersichtlich, dass die Dynamik allein durch die Dispersionsrelation $E(k)$ festgelegt ist. Mit der Dispersionsrelation (2.3) ergibt sich:

$$|\Psi(x, t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \Delta x(t)} \exp \left[-\frac{(x - x_0 - v_g(k_0) t)^2}{2 \Delta x(t)^2} \right]. \quad (2.5)$$

Das Wellenpaket bewegt sich mit einer Gruppengeschwindigkeit

$$v_g(k_0) = \left. \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dk} \right|_{k_0} = \frac{\hbar k_0}{m} \quad (2.6)$$

und zerfließt auf einer typischen Zeitskala T_D , der Dispersionszeit², gemäß:

$$\Delta x(t) = \Delta x(0) \sqrt{1 + \left(\frac{t}{2T_D} \right)^2}, \quad T_D = \frac{m \Delta x(0)^2}{\hbar}. \quad (2.7)$$

Entwicklung der Phase

Entscheidend für das Verständnis von Dispersionsmanagement ist die Phase $\phi(k, t)$ der Wellenfunktion im Impulsraum $\Psi(k, t) = \Psi(k, 0) e^{-i\phi(k, t)}$. Ein unschärfebegrenztes Wellenpaket hat eine in k lineare Phase. Aus den Gleichungen (2.3) und (2.4) ist ersichtlich, dass bei der freien Propagation eines solchen Wellenpaketes eine in k quadratische Phase

$$\phi(k, t) = \frac{E(k)}{\hbar} t = \frac{\hbar k^2}{2m} t \quad (2.8)$$

akkumuliert wird. Dies entspricht gemäß (2.7) einer Verbreiterung im Ortsraum.

Kontrolle der Dispersion

Eine Kontrolle der Dispersion erfordert, dass die Größe und das Vorzeichen der Phase $\phi(k, t)$ experimentell eingestellt werden können. Gleichung (2.8) zeigt, dass die Phase die Masse m des Atoms als Parameter enthält. In Abschnitt 2.1.2 wird gezeigt, dass unter bestimmten Bedingungen die Masse m in der Dispersionsrelation (und damit in der Phase) durch einen experimentell kontrollierbaren Parameter, die effektive Masse m_{eff} , ersetzt werden kann. Damit ist es also möglich, dem Wellenpaket während der Propagation nach Belieben eine quadratische Phase mit positiver oder negativer Krümmung aufzuprägen. In beiden Fällen entspricht die quadratische Phase einer Verbreiterung im Ortsraum gegenüber dem anfänglichen unschärfebegrenzten Wellenpaket.

²Die hier angegebene Dispersionszeit ist die relevante Zeitskala für das Zerfließen eines Gaußschen Wellenpaketes. Für ein Wellenpaket mit Sekans-Hyperbolikus-Form muss $\Delta x(0)$ durch die Solitonbreite x_0 ersetzt werden (siehe Abschnitt „Atomare Gap-Solitonen“, S.18).

2.1 Lineare Dispersion von Materiewellen

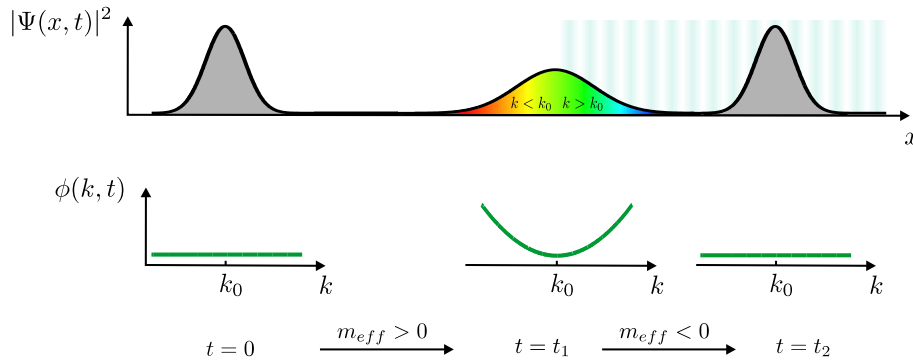


Abbildung 2.1: Dispersionsmanagement für Materiewellen: Über die effektive Masse kann die Dispersion experimentell kontrolliert werden. Einer quadratischen Phase im Impulsraum entspricht eine Verbreiterung im Ortsraum.

In Abb. 2.1 ist ein Testexperiment für Dispersionsmanagement dargestellt: Ein bei $t = 0$ unschärfebegrenzt Gaußsches Wellenpaket propagiert in einem ersten Schritt bis $t = t_1$ bei positiver effektiver Masse $m_{\text{eff},1} > 0$ („normale Dispersion“). Es akkumuliert dabei eine quadratische Phase $\phi(k, t)$ mit positiver Krümmung und läuft räumlich auseinander. Zum Zeitpunkt $t = t_1$ wird auf negative effektive Masse $m_{\text{eff},2} < 0$ („anomale Dispersion“) umgeschaltet. Während dieses zweiten Schrittes akkumuliert das Wellenpaket eine quadratische Phase mit negativer Krümmung. Diese baut die im ersten Schritt aufgesammelte Phase kontinuierlich ab. Die Breite des Wellenpaketes reduziert sich entsprechend. Zum Zeitpunkt $t_2 = t_1 + \left| \frac{m_{\text{eff},2}}{m_{\text{eff},1}} \right|$ wird wieder die anfängliche lineare Phase und damit die unschärfebegrenzte Breite erreicht. Eine weitere Propagation bei negativer effektiver Masse würde nicht zu einer zusätzlichen Kompression des Wellenpaketes, sondern wieder zu einer Expansion führen, da dabei eine quadratische Phase $\phi(k, t)$ mit negativer Krümmung akkumuliert werden würde³.

Alternativ kann man das Experiment auch folgendermaßen verstehen: Im unschärfebegrenzten Anfangswellenpaket besteht keine Korrelation zwischen dem Ort und der Impulsverteilung. Im ersten Schritt ist die effektive Masse positiv, so dass die Gruppengeschwindigkeit $v_g(k)$ in k monoton steigt („normale Dispersion“). Bei der Propagation sammeln sich daher im vorderen Teil des Wellenpaketes Beiträge von Wellenvektoren mit $k > k_0$ und im hinteren Teil solche mit $k < k_0$. Im zweiten Schritt ist $m_{\text{eff}} < 0$, die Gruppengeschwindigkeit fällt also monoton in k („anomale Dispersion“). Die zum Zeitpunkt t_1 vorhandene Korrelation zwischen dem Ort und der Impulsverteilung wird wieder abgebaut, bis zum Zeitpunkt t_2 das Wellenpaket wieder unschärfebegrenzt ist. Eine weitere Propagation bei anomaler Dispersion würde zu einer entgegengesetzten Korrelation und damit wieder zu einer Verbreiterung des Wellenpaketes führen.

³Da bei der hier besprochenen freien Propagation die Impulsbreite erhalten bleibt, kann aufgrund der Heisenbergschen Unschärferelation die anfängliche Ortsbreite nicht unterschritten werden. Treten dagegen örtlich inhomogene Kräfte (z.B. Atom-Atom-Wechselwirkung) auf, verändert sich die Impulsbreite und eine Kompression des Wellenpaketes unter die anfängliche Breite ist möglich (vgl. Abschnitt 2.2.2).

2.1.2 Dispersion in einem periodischen Potential

Die Manipulation der Dispersionsrelation und damit die Kontrolle über die Dispersion von Materiewellen gelingt mit Hilfe eines periodischen Potentials. In unserem Experiment wird dieses Potential durch eine weit verstimmte optische Stehwelle der Wellenlänge λ erzeugt (siehe Abschnitt 3.2). Effektiv bewegen sich die Atome in einem Potential

$$V(x) = \frac{V_0}{2} \cos(Gx) + \frac{V_0}{2} \quad (2.9)$$

mit $G = \frac{2\pi}{d}$, wobei $d = \frac{\lambda}{2}$ die Periode des Potentials bezeichnet. Die Modulationstiefe V_0 des periodischen Potentials ist bei den im Rahmen dieser Arbeit vorgestellten Experimenten von der Größenordnung der Gitterrückstoß-Energie $E_{\text{rec}} = \hbar^2 k_{\text{rec}}^2 / 2m$. Dabei steht $k_{\text{rec}} = G/2$ für den Gitterrückstoß-Impuls. Unter bestimmten Bedingungen kann das periodische Potential formal aus der Bewegungsgleichung entfernt werden, indem das aus der Festkörper-Physik bekannte Konzept der effektiven Masse [31] verwendet wird.

Bloch-Theorem und Bandstruktur

Das Bloch-Theorem [37] besagt, dass jeder Eigenzustand $\Phi_{n,k}(x)$ des Hamilton-Operators \hat{H} für ein beliebiges periodisches Potential $U(x)$,

$$\hat{H}\Phi_{n,k}(x) := \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x) \right\} \Phi_{n,k}(x) = E_{n,k} \Phi_{n,k}(x), \quad (2.10)$$

als Produkt aus einer Funktion $u_{n,k}(x)$ mit der Periodizität d des Potentials und einer ebenen Welle mit Wellenvektor k geschrieben werden kann:

$$\Phi_{n,k}(x) = u_{n,k}(x) e^{ikx}, \quad u_{n,k}(x+d) = u_{n,k}(x) \text{ für alle } x. \quad (2.11)$$

Für das vorliegende kosinusförmige Potential (2.9) wird (2.10) zur Mathieu-Differentialgleichung, deren Lösungen durch die Mathieu-Funktionen gegeben sind [38, 39].

Abbildung 2.2 a zeigt die Dispersionsrelation $E = E_n(k)$ der Blochfunktionen $\Phi_{n,k}(x)$ für eine typische Potentialstärke V_0 . Sie ist eine periodische Funktion des Quasiimpulses k mit einer Periode $2\pi/d$. Durch das periodische Potential entstehen aufgrund von Niveauabstoßung Bänder, die durch Bandlücken getrennt sind. Die Größe der Bandlücken hängt dabei von der Modulationstiefe V_0 des periodischen Potentials ab.

Besonders relevant für die in dieser Arbeit vorgestellten Experimente ist das unterste Band $E_1(k)$: Im Zentrum der Brillouin-Zone ($|k| \ll k_{\text{rec}}$) weicht es bei kleinen Modulationstiefen nur unwesentlich von der quadratischen Dispersionsrelation freier Teilchen ab. Am Rand der Brillouin-Zone ist die Dispersionsrelation hingegen stark modifiziert. Dieser Umstand wird zur experimentellen Realisierung von Dispersionsmanagement genutzt.

Dynamik der Blochwellen

Prinzipiell kann jedes beliebige Wellenpaket nach den Blochwellen entwickelt werden, da diese eine Basis des Hilbertraums darstellen. Die Dynamik ist dann durch die Dispersi-

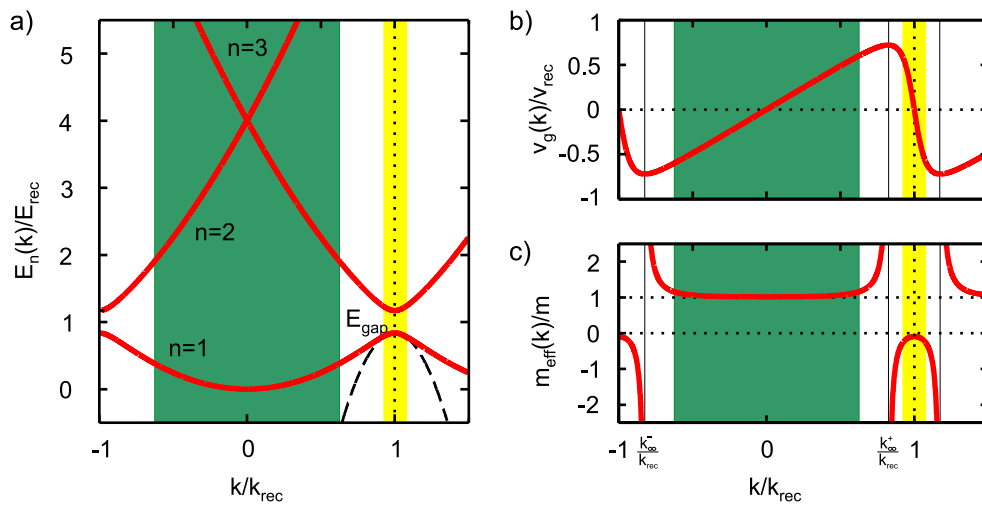


Abbildung 2.2: Numerisch bestimmte Bandstruktur von Atomen in einem periodischen Potential der Modulationstiefe $V_0 = 0.7 E_{\text{rec}}$. a) Energien der ersten drei Bänder: Die Energielücke zwischen den beiden ersten Bändern verändert die Dispersionsrelation am Rand der Brillouin-Zone drastisch. Die Energielücke zwischen dem zweiten und dritten Band ist dagegen sehr viel kleiner. Die parabolische Näherung der Bandstruktur (gestrichelt) entspricht der Näherung konstanter effektiver Masse. b) Gruppengeschwindigkeit $v_g(k)$ im untersten Band. c) Effektive Masse $m_{\text{eff}}(k)$ im untersten Band. Grün hinterlegt ist der Bereich annähernd konstanter positiver effektiver Masse (normale Dispersion), gelb hinterlegt der Bereich annähernd konstanter negativer effektiver Masse (anomale Dispersion).

Kapitel 2 Theoretische Grundlagen

onsrelation $E_n(k)$ festgelegt:

$$\Psi(x, t) = \sum_n \int_{-k_{\text{rec}}}^{k_{\text{rec}}} a_n(k) \Phi_{n,k}(x) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n(k)t} dk. \quad (2.12)$$

Bei Kenntnis der Entwicklungskoeffizienten $a_n(k)$ lässt sich dieses Integral mit Hilfe der Dispersionsrelation und der Blochfunktionen auswerten, die aus der konkreten Form des periodischen Potentials bestimmt werden können.

Dispersionsmanagement in der oben beschriebenen Form ist möglich, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

1. Die Atome müssen in einem Energieband (üblicherweise $n = 1$) präpariert werden. Falls keine Übergänge in höhere Bänder durch Atom-Atom-Wechselwirkung oder externe Kräfte induziert werden, beschränkt sich die Dynamik auf das eine besetzte Band. Im Folgenden wird nur noch $n = 1$ berücksichtigt.
2. Die Quasiimpulsverteilung $a_n(k)$ muss schmal sein im Vergleich zur Breite $2k_{\text{rec}}$ der Brillouin-Zone. Gemäß der Heisenbergschen Unschärferelation bedingt dies für die Breite der Einhüllenden $A(x, t)$ des Wellenpaketes $\Delta x \gg d$.

Im Rahmen der „effektive-Masse-Näherung“ [31] wird das Energieband $E(k)$ um den zentralen Quasiimpuls der Verteilung $a(k)$ bis zur zweiten Ordnung in k entwickelt

$$E(k) \approx E(k_0) + \hbar v_g(k_0)(k - k_0) + \frac{\hbar^2}{2 m_{\text{eff}}}(k - k_0)^2, \quad (2.13)$$

wobei die Gruppengeschwindigkeit und die effektive Masse gegeben sind durch:

$$v_g(k_0) = \frac{1}{\hbar} \left. \frac{\partial E(k)}{\partial k} \right|_{k_0}, \quad \frac{1}{m_{\text{eff}}} = \frac{1}{\hbar^2} \left. \frac{\partial^2 E(k)}{\partial k^2} \right|_{k_0}. \quad (2.14)$$

Die Verläufe von $v_g(k)$ und $m_{\text{eff}}(k)$ sind in Abb. 2.2 b bzw. c für eine typische Potentialstärke $V_0 = 0.7 E_{\text{rec}}$ gezeigt. Sie sind wie auch die Bandstruktur periodisch in k . Die Gruppengeschwindigkeit nimmt bei den Quasiimpulsen k_{∞}^+ und k_{∞}^- ihre Extremalwerte $v_{g,\text{max}}$ bzw. $v_{g,\text{min}}$ an. Der Betrag $|v_{g,\text{max}}| = |v_{g,\text{min}}|$ ist charakteristisch für die Stärke des periodischen Potentials. Die effektive Masse ist im Zentrum der Brillouin-Zone positiv und für schwache Potentiale gilt dort $m_{\text{eff}} \approx m$. Bei den Quasiimpulsen k_{∞}^{\pm} divergiert die effektive Masse, so dass die Dispersion hier stark unterdrückt ist. Am Rand der Brillouin-Zone nimmt m_{eff} negative Werte an. Bei schwachem Potential ist $|m_{\text{eff}}|$ hier sehr klein, die Dispersion also ausgesprochen stark. Für Dispersionsmanagement kann die effektive Masse kontrolliert werden, indem Wellenpakete bei unterschiedlichen Potentialstärken V_0 und verschiedenen zentralen Quasiimpulsen k_0 präpariert werden.

Die Wellenfunktion wird nun in der Form $\Psi_{k_0}(x, t) = \Phi_{k_0}(x) e^{-\frac{i}{\hbar} E(k_0)t} A(x, t)$ geschrieben, d.h. die schnellen Oszillationen der Wellenfunktion werden durch die zentrale Blochfunktion aufgefangen und $A(x, t)$ beschreibt die Einhüllende des Wellenpaketes. Unter der Annahme, dass sich der gitterperiodische Anteil $u_k(x)$ der Blochfunktionen wesentlich langsamer mit k ändert als die Entwicklungskoeffizienten $a(k)$ (vgl. Bedingung 2), gilt: $\Phi_k(x) = u_k(x) e^{ikx} \approx u_{k_0}(x) e^{ikx}$. Die Verwendung der Näherung (2.13) liefert

dann eine einfache Bewegungsgleichung für die Einhüllende $A(x, t)$ des Wellenpaketes $\Psi(x, t)$:

$$i\hbar \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + v_g \frac{\partial}{\partial x} \right\} A(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m_{\text{eff}}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} A(x, t). \quad (2.15)$$

In einem mit der Geschwindigkeit v_g mitbewegten Bezugssystem propagiert $A(x, t)$ also wie die Wellenfunktion eines freien Teilchens mit modifizierter Masse.

Bei Quasiimpulsbreiten, die größer sind als der Bereich annähernd konstanter effektiver Masse, müssen in der Entwicklung (2.13) auch höhere Terme berücksichtigt werden. Im Rahmen dieser Diplomarbeit wurden auch die daraus resultierenden Verformungen des Wellenpaketes (insbesondere die Effekte der Punkte mit divergierender effektiver Masse) systematisch untersucht.

Präparation in der Brillouin-Zone

Die Präparation eines Wellenpaketes im k -Raum an einem vorgegebenen zentralen Quasiimpuls k_0 läuft in zwei Schritten ab:

1. Im ersten Schritt wird das periodische Potential mit einer linearen Amplitudenrampe $V_0(t) = V_0 t/\tau_1$ der Dauer τ_1 eingeschaltet. Dies führt zu einer adiabatischen Präparation des Wellenpaketes im Zentrum der Brillouin-Zone, falls τ_1 hinreichend lang gewählt wird und sich das periodische Potential relativ zu den Atomen in Ruhe befindet.
2. Im zweiten Schritt wird das periodische Potential mit einer linearen Geschwindigkeitsrampe $v(t) = -v_0 t/\tau_2$ der Dauer τ_2 auf die Geschwindigkeit $-v_0$ beschleunigt. Dadurch wirkt im Bezugssystem der Stehwelle eine Scheinkraft $F_{\text{vir}} = mv_0/\tau_2$, die gemäß $\hbar \dot{k} = F$ die Quasiimpulsverteilung von $k_0(\tau_1) = 0$ auf $k_0(\tau_1 + \tau_2) = mv_0/\hbar$ verschiebt. Bei adiabatisch langsamer Beschleunigung bleiben die Atome dabei im untersten Energieband.

Bezeichnet $|n, k\rangle$ die Blochzustände mit Energien $E_n(k)$, so lautet das Adiabatizitätskriterium bezüglich Übergängen in höhere Bänder

$$\left| \langle n, k(t) | \frac{\partial}{\partial t} | 1, k(t) \rangle \right|^2 \ll \frac{|E_n(k(t)) - E_1(k(t))|^2}{\hbar^2}. \quad (2.16)$$

Gleichung (2.16) zeigt, dass aufgrund der bei $V_0 = 0$ verschwindenden Energielücke ein adiabatisches Hochrampen des periodischen Potentials am Rand der Brillouin-Zone nicht möglich wäre und daher obige Präparation in zwei Schritten notwendig ist.

Eine obere Grenze für die Dauer τ_2 der Beschleunigung ist durch die Forderung gegeben, dass die Dynamik des Wellenpaketes im Wesentlichen erst nach Abschluss des Präparationsprozesses stattfinden soll. Es muss daher $\tau_2 \ll T_D$ und im nichtlinearen Fall zusätzlich $\tau_2 \ll T_{\text{NL}}$ erfüllt sein, wobei T_D und T_{NL} die Dispersionszeit bzw. die nichtlineare Zeit (siehe Abschnitt 2.2.2) bezeichnen. Diese Größen sind charakteristische Zeitskalen für die jeweilige Dynamik.

Um die Präparationszeit in dem meist verwendeten Fall $k_0 = k_{\text{rec}}$ unter Beachtung des Adiabatizitätskriteriums möglichst kurz zu halten, wurde die Geschwindigkeitsrampe bei einigen Experimenten in zwei ebenfalls lineare Teilrampen unterteilt mit jeweils

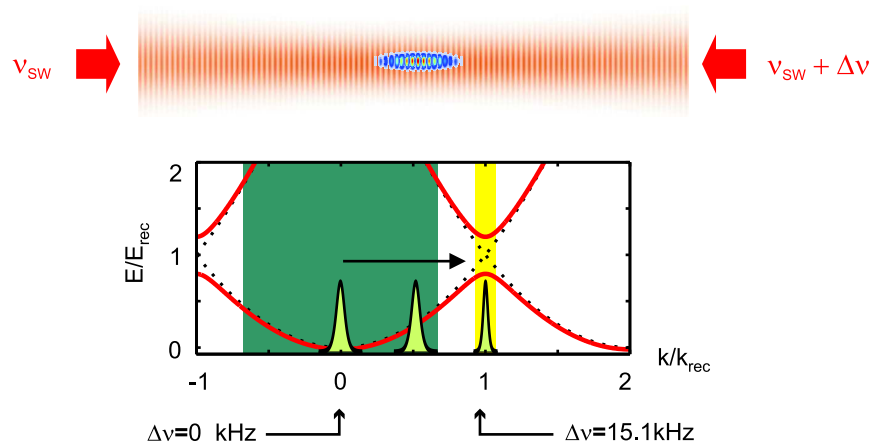


Abbildung 2.3: Präparation in der Brillouin-Zone: Im ersten Schritt wird das Wellenpaket durch langsames Hochrampen einer optischen Stehwelle adiabatisch bei $k_0 = 0$ präpariert. Im zweiten Schritt wird die Verstimmung von einem der beiden Laserstrahlen von 0 auf $\Delta\nu$ gerammt. Dadurch wird das periodische Potential auf eine Geschwindigkeit $v_0 = -\frac{c\Delta\nu}{2\nu_{\text{sw}}}$ beschleunigt und das Wellenpaket an einem zentralen Quasiimpuls $k_0 = mv_0/\hbar$ präpariert.

der Dauer $\tau_2/2$. In der ersten Teilrampe wird das periodische Potential von 0 auf $0.8 v_{\text{rec}}$ beschleunigt und in der zweiten Teilrampe weiter auf v_{rec} . Die Photonen-Rückstoßgeschwindigkeit ist dabei gegeben durch $v_{\text{rec}} = \hbar k_{\text{rec}}/m$. Typische Zeiten in unseren Experimenten sind $\tau_1=4\text{--}6$ ms und $\tau_2=1.3$ ms. Numerische Rechnungen zeigen, dass dies auch im Fall wechselwirkender Atome eine hinreichend adiabatische Präparation sicherstellt.

Abbildung 2.3 zeigt schematisch die experimentelle Realisierung des Präparationsvorgangs: Das periodische Potential ist experimentell durch eine optische Stehwelle realisiert, die gegenüber dem D₂-Übergang bei 780.24 nm um einige Nanometer rotverstimmt ist. Diese Stehwelle wird durch zwei kollineare, gegenläufige Laserstrahlen der Wellenlänge $\lambda_{\text{sw}} = c/\nu_{\text{sw}}$ erzeugt. Mittels einer Verstimmung $\Delta\nu$ des einen Laserstrahls gegenüber dem anderen wird das periodische Potential auf eine Geschwindigkeit $v_0 = -\frac{c\Delta\nu}{2\nu_{\text{sw}}}$ beschleunigt. Dies entspricht einer Verschiebung des Wellenpaketes im Quasiimpuls-Raum von $k_0 = 0$ nach $k_0 = mv_0/\hbar$.

2.2 Bose-Einstein-Kondensation

Mit der ersten experimentellen Realisierung von Bose-Einstein-Kondensation verdünnter atomarer Gase im Jahr 1995 [9, 10] wurde ein neues Fenster in die Quantenwelt geöffnet. Die Atome im Kondensat können durch eine gemeinsame makroskopische Wellenfunktion beschrieben werden. Dies ermöglicht eine direkte Beobachtung der Entwicklung eines kohärenten Materiewellenpaketes im Ortsraum. In diesem Abschnitt wird die Theorie von Bose-Einstein-Kondensaten (BECs) kurz vorgestellt, soweit sie für die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Experimente relevant ist. Ausführliche Diskussionen der Physik von BECs finden sich in zahlreichen Übersichtsartikeln, zum Beispiel in [40, 41].

2.2.1 Grundlagen

Bose-Einstein-Kondensation beruht auf der Ununterscheidbarkeit und der Wellennatur von Teilchen. Bereits in den Jahren 1924–1925 sagten S. Bose [3] und A. Einstein [2] theoretisch voraus, dass in einem homogenen System von Bosonen oberhalb einer kritischen Phasenraumdichte

$$\mathcal{D}_c = n\lambda_{\text{dB}}^3 = \zeta(3/2) \approx 2.612 \quad (2.17)$$

der Grundzustand makroskopisch besetzt wird. Dabei bezeichnet n die räumliche Dichte der Bosonen und

$$\lambda_{\text{dB}} = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T} \right)^{1/2} \quad (2.18)$$

die thermische deBroglie-Wellenlänge für ein Teilchen der Masse m in einem Gas der Temperatur T . Die deBroglie-Wellenlänge λ_{dB} kann als die Ortsunschärfe angesehen werden, die mit der thermischen Impulsverteilung assoziiert ist. Bei der kritischen Phasenraumdichte ist λ_{dB} von der Größenordnung des mittleren Teilchenabstands $n^{-1/3}$.

Vom experimentellen Standpunkt aus sind BECs in harmonischen Fallen besonders interessant, da sie inhomogene und örtlich begrenzte Systeme darstellen. Dies bewirkt, dass sich der Phasenübergang nicht nur im Impuls-, sondern auch im Ortraum zeigt. Bei vorgegebener Atomzahl N wird der Grundzustand einer harmonischen Falle für Temperaturen unterhalb einer kritischen Temperatur

$$T_c = \frac{\hbar\omega_{ho}}{k_B} \left(\frac{N}{\zeta(3)} \right)^{1/3} \approx 0.94 \frac{\hbar\omega_{ho}}{k_B} N^{1/3} \quad (2.19)$$

makroskopisch besetzt. Dabei ist $\omega_{ho} = (\omega_x\omega_y\omega_z)^{1/3}$ das geometrische Mittel der Fallenfrequenzen. Dies gilt für wechselwirkungsfreie Bosonen im thermodynamischen Limes. Gleichung (2.19) zeigt, dass die kritische Temperatur T_c mit der Atomzahl N abnimmt. Dies erschwert die experimentelle Erzeugung reiner Kondensate mit sehr kleinen Atomzahlen.

Gross-Pitaevskii-Gleichung

Die Dynamik eines schwach wechselwirkenden BECs kann in Meanfield-Näherung durch die Gross-Pitaevskii-Gleichung (GPE) für den Erwartungswert des Feldoperators $\Psi(\mathbf{r}, t) = \langle \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \rangle$ beschrieben werden [42, 43, 44]. $\Psi(\mathbf{r}, t)$ hat die Bedeutung eines Ordnungsparameters und wird auch als die „Wellenfunktion des Kondensats“ bezeichnet, da die Dichte des Kondensats über $n(\mathbf{r}, t) = |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$ festgelegt ist. Die GPE enthält mehrere Näherungen, jedoch stellt sie für kleine Temperaturen ($T \ll T_c$) und große Kondensate ($N \gg 1$) eine gute Approximation dar.

In einem verdünnten Gas bei niedriger Temperatur sind nur binäre Stöße relevant und die Wechselwirkung kann durch einen einzigen Parameter, die s-Wellen-Streulänge a , beschrieben werden. Das Atom-Atom-Wechselwirkungspotential $V(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ wird dann durch ein Pseudopotential $g \cdot \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ ersetzt, wobei die Kopplungskonstante g durch

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \quad (2.20)$$

gegeben ist. Das Potential ist für negative Streulänge attraktiv und für positive Streulänge repulsiv. Der Wert von a kann prinzipiell durch ein statisches externes Magnetfeld mittels Feshbach-Resonanzen experimentell in Betrag und Vorzeichen kontrolliert werden [28, 29, 30]. Bei den in dieser Arbeit verwendeten kleinen Magnetfeldern ist für ^{87}Rb die Streulänge jedoch immer positiv, so dass im Folgenden nur noch der Fall $a > 0$ betrachtet wird.

Mit den obigen Definitionen und Näherungen lautet die Gross-Pitaevskii-Gleichung (GPE) für ein BEC in einem externen Potential $V_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)$:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \left\{ -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) + g|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right\} \Psi(\mathbf{r}, t). \quad (2.21)$$

Die Wellenfunktion ist dabei auf die Atomzahl normiert, $\int |\Psi|^2 d^3r = N$.

Berechnung des Grundzustandes

Der stationäre Grundzustand eines Bose-Einstein-Kondensats in einem beliebigen Potential hat die Form $\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi(\mathbf{r})e^{-\frac{i}{\hbar}\mu t}$ mit dem chemischen Potential μ . Bei nicht miteinander wechselwirkenden Atomen ist die Wellenfunktion des Kondensats durch $\sqrt{N}\Psi_0(x)$ gegeben, wobei $\Psi_0(x)$ die Wellenfunktion des Einteilchen-Grundzustands in dem Potential bezeichnet. Für wechselwirkende Atome ist die Berechnung des Kondensat-Grundzustands bzw. der entsprechenden Dichteverteilung hingegen im allgemeinen eine nicht triviale Aufgabe. Im Fall harmonischer Fallen stehen jedoch verschiedene numerische bzw. analytische Näherungsmethoden zur Verfügung [45, 46, 47]. Der entscheidende Parameter für die Wahl einer Näherungsmethode ist dabei das Verhältnis aus nichtlinearer und kinetischer Energie $\gamma := \frac{E_{\text{NL}}}{E_{\text{kin}}}$.

Thomas-Fermi-Näherung Für große Nichtlinearität ($\gamma \gg 1$) kann der kinetische Term in der Gross-Pitaevskii-Gleichung vernachlässigt werden (Thomas-Fermi-Näherung), d.h. die zu (2.21) korrespondierende stationäre GPE vereinfacht sich zu

$$\mu\Psi(\mathbf{r}) = \{V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + g|\Psi(\mathbf{r})|^2\} \Psi(\mathbf{r}). \quad (2.22)$$

Für Kondensate in einem harmonischen Fallenpotential mit den Fallenfrequenzen $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ ist die Bedingung $\gamma \gg 1$ erfüllt, wenn $\frac{Na}{a_{ho}} \gg 1$, wobei $a_{ho} := \sqrt{\hbar/m\omega_{ho}}$ die mittlere Oszillatorlänge bezeichnet. In der Thomas-Fermi-Näherung lassen sich dann einfache analytische Ausdrücke für wichtige Größen berechnen [41]:

Die Dichteverteilung des Kondensats kann (mit Ausnahme eines schmalen Randbereiches) in guter Näherung durch

$$n(\mathbf{r}) = \begin{cases} g^{-1} [\mu - V_{\text{ext}}(\mathbf{r})] & \text{für } \mu \geq V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.23)$$

beschrieben werden. Das chemische Potential ergibt sich dabei aus der Normierung der Wellenfunktion zu

$$\mu = \left(\frac{15^2 m a^2 \hbar^4}{32} \right)^{1/5} N^{2/5} \omega_{ho}^{6/5}. \quad (2.24)$$

Das Kondensat hat bei einem harmonischen Fallenpotential also eine parabolische Dichteverteilung mit den Thomas-Fermi-Radien

$$R_{\text{TF},i} = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_i^2}} = \left(\frac{15a\hbar^2}{m^2}\right)^{1/5} \frac{N^{1/5}\omega_{\text{ho}}^{3/5}}{\omega_i} \quad (i = x, y, z). \quad (2.25)$$

Diese Gleichungen gelten für die Thomas-Fermi-Näherung der 3D-Gross-Pitaevskii-Gleichung.

Falls in einer axialsymmetrischen Situation (d.h. $\omega_y = \omega_z =: \omega_\perp$) die transversalen Freiheitsgrade ausgefroren sind, wird die Dynamik des Systems durch die 1D-Gross-Pitaevskii-Gleichung (2.31) beschrieben (siehe detailliertere Erläuterung dort). Unter der Voraussetzung $\gamma \gg 1$ bzw. $\frac{Na}{a_\perp^2/a_x} \gg 1$ kann in der entsprechenden stationären 1D-GPE wieder die kinetische Energie vernachlässigt werden. In dieser 1D-Thomas-Fermi-Näherung gilt für das chemische Potential

$$\mu = \left(\frac{9a^2\hbar^2m}{8}\right)^{1/3} (N\omega_\perp\omega_x)^{2/3}. \quad (2.26)$$

Die Dichteverteilung ist dann für $x \leq R_{\text{TF},x}$ durch

$$n(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{g_{1d}} \left[1 - \left(\frac{x}{R_{\text{TF},x}}\right)^2\right] \cdot |\Psi_\perp(y, z)|^2 \quad (2.27)$$

gegeben und sonst 0. Dabei bezeichnen $\Psi_\perp(y, z)$ die auf 1 normierte Grundzustands-Wellenfunktion des transversalen Oszillators und

$$R_{\text{TF},x} = \left(\frac{3a\hbar}{m}\right)^{1/3} \left(\frac{N\omega_\perp}{\omega_x^2}\right)^{1/3} \quad (2.28)$$

den Thomas-Fermi-Radius in axialer Richtung.

Ein Vergleich der Formeln (2.24) und (2.26) für das chemische Potential bzw. von (2.25) und (2.28) für die Thomas-Fermi-Radien in den beiden Fällen zeigt, dass die Abhängigkeit dieser Größen von der Atomzahl N sich mit der Dimension des beschriebenen Systems ändert.

Effektive Fallenfrequenzen Für kleinere Nichtlinearität $\gamma \lesssim 1$ bietet folgende von Baym und Pethick [48] vorgeschlagene numerische Methode eine bessere Beschreibung. Die exakte Grundzustandsenergie des Systems in Mean-Field-Näherung ist durch das Ginzburg-Pitaevskii-Gross-Energiefunktional gegeben, das der Gross-Pitaevskii-Gleichung zugrunde liegt. Als Ansatz für die Wellenfunktion des Kondensats dient nun eine Gaußfunktion

$$\Psi(\mathbf{r}) = N^{1/2} (\tilde{\omega}_x \tilde{\omega}_y \tilde{\omega}_z)^{1/4} \left(\frac{m}{\pi\hbar}\right)^{3/4} \exp\left[-\frac{m}{2\hbar}(\tilde{\omega}_x x^2 + \tilde{\omega}_y y^2 + \tilde{\omega}_z z^2)\right], \quad (2.29)$$

wobei die so genannten effektiven Fallenfrequenzen $\tilde{\omega}_i$ Variationsparameter sind. Die Grundzustandsenergie ist dann durch eine analytische Funktion $E(\tilde{\omega}_x, \tilde{\omega}_y, \tilde{\omega}_z)$ gegeben. Eine Minimierung der Energie bezüglich $(\tilde{\omega}_x, \tilde{\omega}_y, \tilde{\omega}_z)$ liefert die gesuchten effektiven Fallenfrequenzen. Bei repulsiver Wechselwirkung sind diese immer kleiner als die Fallenfrequenzen ω_i des Potentials. Dies entspricht einem gegenüber dem wechselwirkungsfreien Fall weiter ausgedehnten Grundzustand mit niedrigerer Dichte im Fallenzentrum.

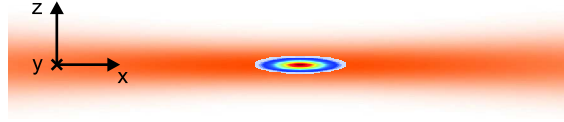


Abbildung 2.4: Wellenleiter für Atome. Bei hinreichend kleiner linearer Dichte befinden sich die Atome transversal im Grundzustand und die Dynamik ist auf eine Dimension begrenzt.

Propagation im Wellenleiter

Die in dieser Arbeit vorgestellten Experimente wurden alle in einem eindimensionalen Wellenleiter durchgeführt, der die Atome transversal in ein harmonisches Potential

$$V_{\text{WG}} = \frac{1}{2}m\omega_{\perp}^2(y^2 + z^2) \quad (2.30)$$

einschließt, sie aber longitudinal (fast) frei propagieren lässt (Abb. 2.4). Für nicht wechselwirkende Atome ist die GPE mit diesem Potential separabel und die Wellenfunktion kann als Produkt aus einem longitudinalen und einem transversalen Anteil geschrieben werden, $\Psi(\mathbf{r}) = \Psi(x)\Psi_{\perp}(y, z)$. Bei wechselwirkenden Atomen sind die transversalen und die longitudinalen Freiheitsgrade durch den nichtlinearen Term in der GPE miteinander gekoppelt. Solange die nichtlineare Energie kleiner als die Energie $\hbar\omega_{\perp}$ transversaler Anregungen ist, stellt der obige Produktansatz in diesem Fall jedoch eine gute Näherung dar. Das Kondensat behält dann auch während der Propagation längs des Wellenleiters einen anfänglich präparierten transversalen Zustand bei, der Wellenleiter ist dynamisch eindimensional.

In erster Näherung kann für den transversalen Grundzustand der wechselwirkenden Atome der Grundzustand des transversalen Oszillators mit der Oszillatorlänge $a_{\perp} = \sqrt{\hbar/m\omega_{\perp}}$ verwendet werden. Der obige Separationsansatz führt dann auf die 1D-Gross-Pitaevskii-Gleichung:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x, t) = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_{\text{ext}}(x, t) + g_{1\text{d}}|\Psi(x, t)|^2 \right\} \Psi(x, t). \quad (2.31)$$

Dabei ist $g_{1\text{d}} = g/2\pi a_{\perp}^2 = 2a\hbar\omega_{\perp}$ und $\Psi(x, t)$ ist auf die Atomzahl N normiert. Mit diesem Ansatz lautet die Bedingung für dynamische Eindimensionalität

$$n_{1\text{d},\text{max}} = \max_x (|\Psi(x, t)|^2) \leq \frac{1}{2a}. \quad (2.32)$$

Für ^{87}Rb ergibt sich damit [49] eine maximal erlaubte lineare Dichte von 87 Atomen/ μm .

2.2.2 Propagation in einem periodischen Potential

Die Wellenfunktion eines BECs in dem periodischen Potential (2.9) in einer dynamisch eindimensionalen Situation entwickelt sich gemäß

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x, t) = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{V_0}{2}\cos\left(2\pi\frac{x}{d}\right) + g_{1\text{d}}|\Psi(x, t)|^2 \right\} \Psi(x, t). \quad (2.33)$$

Neben der veränderten Dispersionsrelation spielt hierbei auch die Nichtlinearität eine entscheidende Rolle und durch das Zusammenwirken der beiden Beiträge treten völlig neue Phänomene auf (siehe Abschnitt „Atomare Gap-Solitonen“, Seite 18).

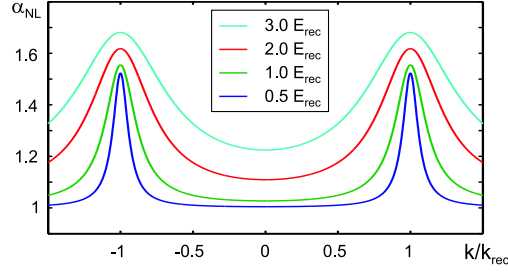


Abbildung 2.5: Verlauf des Faktors α_{NL} in Abhängigkeit des Quasiimpulses k für verschiedene Modulationstiefen V_0 des periodischen Potentials.

Effektive-Masse-Theorie für schwache Nichtlinearität

Aufgrund des nichtlinearen Terms in der GPE sind die Blochfunktionen $\Phi_{n,k}(x)$ keine Eigenfunktionen von (2.33). Unter folgenden beiden Bedingungen kann der Formalismus der effektiven Masse dennoch auch auf die GPE übertragen werden:

1. Wie im linearen Fall muß die Breite der Verteilung des Wellenpaketes im Quasiimpulsraum schmal sein gegenüber der Breite der Brillouinzone. Dies ermöglicht die Beschreibung durch eine langsam veränderliche Einhüllende.
2. Die Nichtlinearität darf nur eine kleine Störung darstellen, d.h. die maximale Nichtlinearität muß klein sein gegenüber der Bandlücke E_{gap} über dem niedrigsten Band. Dann können Kopplungen an höhere Bänder vernachlässigt werden und es genügt das unterste Band zur Beschreibung der Dynamik.

Analog zum linearen Fall wird die Wellenfunktion angesetzt als das Produkt aus einer Blochfunktion Φ_{k_0} im untersten Energieband, wobei k_0 wieder das Zentrum der Quasiimpulsverteilung bezeichnet, und einer langsam variierenden Einhüllenden $A(x, t)$:

$$\Psi(x, t) = \Phi_{k_0}(x) e^{-\frac{i}{\hbar} E(k_0)t} A(x, t). \quad (2.34)$$

Dies führt im Rahmen des Konzepts der effektiven Masse [50] oder einer multiple scales Analyse [51] auf folgende effektive 1D-Gross-Pitaevskii-Gleichung für die Einhüllende:

$$i\hbar \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + v_g \frac{\partial}{\partial x} \right\} A(x, t) = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m_{\text{eff}}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha_{\text{NL}} g_{1\text{d}} |A(x, t)|^2 \right\} A(x, t). \quad (2.35)$$

Die Gruppengeschwindigkeit v_g und die effektive Masse m_{eff} sind dabei wie in (2.14) definiert. Die Blochfunktionen sind gemäß $d^{-1} \int_{-d/2}^{d/2} |u_{n,k_0}(x)|^2 dx = 1$ normiert, während die Einhüllende über $[-\infty, \infty]$ auf die Atomzahl N normiert ist. Der Vorfaktor $\alpha_{\text{NL}} = d^{-1} \int_{-d/2}^{d/2} |u_{n,k_0}(x)|^4 dx$ nimmt für schwache Potentiale ($V_0 \sim E_{\text{rec}}$) Werte zwischen 1.0 und 1.6 an (siehe Abb. 2.5). Er berücksichtigt die aufgrund der Dichtemodulation im periodischen Potential erhöhte Nichtlinearität.

Hiermit kann nun die 2. Bedingung von oben konkretisiert werden: Für schwache Potentiale ist $E_{\text{gap}} \approx V_0/2$, so dass die Bedingung schließlich lautet:

$$n_{1\text{d},\text{max}} = \max_x (|A(x, t)|^2) \ll \frac{V_0}{4\alpha_{\text{NL}} \hbar \omega_{\perp} a}. \quad (2.36)$$

Kapitel 2 Theoretische Grundlagen

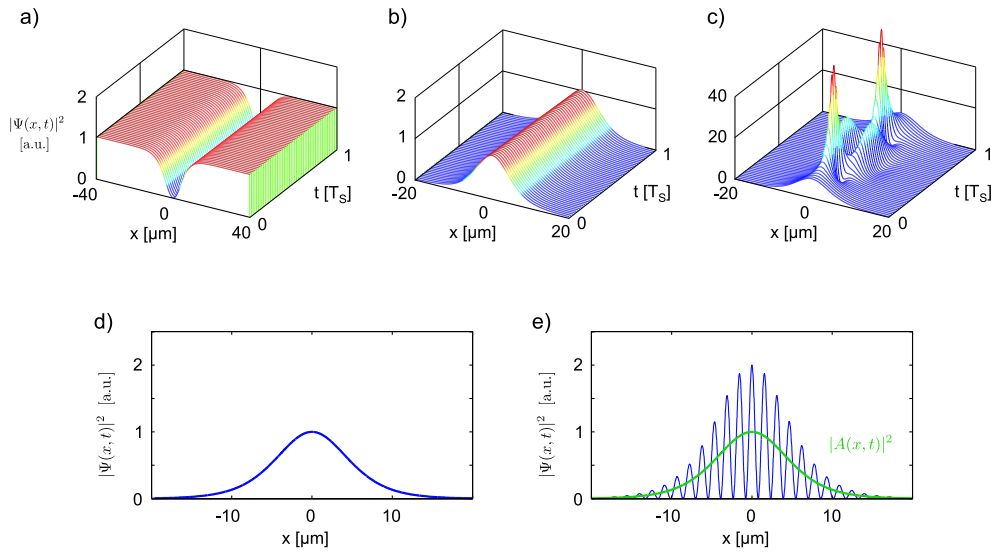


Abbildung 2.6: Solitonen verschiedenen Typs und verschiedener Ordnung. a) Dunkles Soliton erster Ordnung auf einem breiten Hintergrund für $m_{\text{eff}} \cdot g_{1d} > 0$. b) Helles Soliton erster Ordnung für $m_{\text{eff}} \cdot g_{1d} < 0$. c) Helles Soliton dritter Ordnung mit derselben Anfangswellenfunktion wie bei b) aber 9 mal so großer Atomzahl. Man beachte die unterschiedlichen Achsenskalierungen in den Graphen a),b),c). d) Helle Solitonen bei attraktiver interatomarer Wechselwirkung ($g_{1d} < 0$) sind auch ohne die Anwendung von Dispersionsmanagement realisierbar. In diesem Fall ist die solitonische Lösung durch die Wellenfunktion $\Psi(x,t)$ selbst gegeben. e) Die Erzeugung eines hellen Solitons bei repulsiver Atom-Atom-Wechselwirkung ($g_{1d} > 0$) ist nur für anomale Dispersion ($m_{\text{eff}} < 0$) möglich. Diese wird durch Dispersionsmanagement mittels periodischer Potentiale, die eine Modulation der Wellenfunktion bewirken, realisiert. Hier zeigt nicht die Wellenfunktion selbst, sondern deren Einhüllende $A(x,t)$ solitonisches Verhalten. Im Graphen ist die Modulationsperiode der Wellenfunktion zur besseren Darstellbarkeit um den Faktor 4 vergrößert abgebildet.

Für $V_0 = E_{\text{rec}}$, $k_0 = k_{\text{rec}}$ und eine typische Fallenfrequenz von $\omega_{\perp} = 2\pi \cdot 100$ Hz muß die lineare Dichte kleiner als 1040 Atome/ μm sein. Diese Bedingung ist hier also weniger streng als die Bedingung (2.32) für dynamische Eindimensionalität.

Wie schon im linearen Fall erlaubt die Kontrolle der effektiven Masse eine Änderung des kinetischen Terms in Betrag und Vorzeichen. Die über die Kopplungskonstante g im nichtlinearen Term auftretende Masse wird jedoch nicht durch die effektive Masse ersetzt, da die charakteristische Längenskala der Wechselwirkung $a = 5.77$ nm $\ll d$ ist und das periodische Potential daher keine Auswirkungen auf die Kopplungskonstante hat.

Atomare Gap-Solitonen

Die nichtlineare Schrödingergleichung (2.35) ist formal identisch mit der Bewegungsgleichung für Laserpulse in optischen Glasfasern, wobei Orts- und Zeitvariablen vertauscht sind. Die Wechselwirkung zwischen den Atomen entspricht dabei der Selbst(de)fokussierung aufgrund des Kerr-Effektes in der Optik.

Die Gleichung hat solitonische Lösungen [52]. Für $m_{\text{eff}} \cdot g > 0$ treten dunkle Solitonen

(siehe Abb. 2.6 a) auf. Unter einem dunklen Soliton versteht man ein schmales, zeitlich nicht zerfließendes Dichteminimum mit einem Phasensprung π innerhalb eines breiten Untergrundes. Für $m_{\text{eff}} \cdot g < 0$ unterstützt (2.35) helle Solitonen (siehe Abb. 2.6 b,c), d.h. Lösungen, bei denen das gesamte Kondensat als nicht zerfließendes Wellenpaket propagiert.

Die beiden Spezialfälle dunkler Solitonen bei repulsiver Wechselwirkung [26, 27] und heller Solitonen bei attraktiver Wechselwirkung [24, 25] wurden schon von verschiedenen Gruppen demonstriert. In diesen Fällen ist kein Dispersionsmanagement notwendig ($m_{\text{eff}} = m > 0$) und die Wellenfunktion selbst zeigt solitonisches Verhalten.

In dieser Arbeit werden nun zum ersten Mal helle Solitonen für repulsive Wechselwirkung (also $m_{\text{eff}} < 0$, $a > 0$) untersucht. Die negative effektive Masse wird, wie erläutert, durch Verwendung eines periodischen Potentials und Präparation des Wellenpaketes an der Bandkante realisiert. Aufgrund der Nichtlinearität liegt die Energie dann in der Bandlücke, weshalb man diese Klasse von Lösungen auch als „helle Gap-Solitonen“ bezeichnet. Im Gegensatz zu den oben diskutierten Fällen zeigt bei Gap-Solitonen nicht die Wellenfunktion selbst, sondern deren Einhüllende $A(x, t)$ solitonisches Verhalten (siehe Abb. 2.6 d). Gap-Solitonen wurden in der nichtlinearen Faseroptik bereits demonstriert [53, 54], für BECs bisher aber nur theoretisch vorhergesagt [55, 50]. Im streng mathematischen Sinn handelt es sich bei Gap-Solitonen nicht um Solitonen, sondern um „solitäre Wellen“, da die GPE mit periodischem Potential nicht integrabel ist [56].

Solitonen beruhen auf dem Zusammenspiel von Dispersion und Nichtlinearität. Mit den beiden Beiträgen sind jeweils charakteristische Energien bzw. Zeiten verbunden, die Dispersionszeit T_{D} und die nichtlineare Zeit T_{NL} :

$$T_{\text{D}} = \frac{|m_{\text{eff}}|x_0^2}{\hbar}, \quad T_{\text{NL}} = \frac{\hbar}{\alpha_{\text{NL}}|g_{1\text{d}}|n_{1\text{d},\text{max}}} \quad (2.37)$$

Dabei ist x_0 die in (2.39) genauer definierte Breite der Einhüllenden $A(x, t = 0)$. Für ein Soliton der Ordnung \mathcal{N} (mit $\mathcal{N} \in \mathbb{N}$) gilt:

$$T_{\text{D}} = \mathcal{N}^2 T_{\text{NL}}. \quad (2.38)$$

Die Einhüllende des fundamentalen Solitons ($\mathcal{N} = 1$, siehe Abb. 2.6 b) ist gegeben durch

$$A(x, t) = \sqrt{\frac{N}{2x_0}} \operatorname{sech}\left(\frac{x - v_{\text{g}}t}{x_0}\right) e^{-i\frac{\pi}{4}\frac{t}{T_{\text{s}}}} \quad (2.39)$$

mit der Solitonbreite x_0 und der Solitonperiode T_{s} :

$$x_0 = \frac{2\hbar^2}{N|m_{\text{eff}}|\alpha_{\text{NL}}g_{1\text{d}}}, \quad T_{\text{s}} = \frac{\pi|m_{\text{eff}}|x_0^2}{2\hbar}. \quad (2.40)$$

Das fundamentale Soliton behält also seine Breite und Form über die Zeit bei. Es tritt, wie schon erwähnt, bei repulsiver Wechselwirkung nur für $m_{\text{eff}} < 0$ auf, kann also nur am Rand der Brillouin-Zone generiert werden. Interessant ist die Tatsache, dass dasselbe Wellenpaket im *wechselwirkungsfreien* Fall wegen $|m_{\text{eff}}(k_{\text{rec}})| < |m_{\text{eff}}(0)|$ hier sogar schneller zerfließen würde als bei Präparation im Zentrum der Brillouin-Zone. Eine *repulsive* Wechselwirkung wirkt also dem dispersiven Auseinanderfließen des Wellenpaketes *entgegen*. Dies ist eine sehr eindrucksvolle Manifestation der negativen effektiven Masse.

Kapitel 2 Theoretische Grundlagen

Für das fundamentale Soliton ist $n_{1d,\max} = N/2x_0$, so dass die Solitonbedingung (2.38) bei gegebenen experimentellen Parametern und gegebener Anfangsbreite eine Bedingung an die Atomzahl N im Soliton ist:

$$N = \frac{\hbar}{m_{\text{eff}}\omega_{\perp}\alpha_{\text{NL}}ax_0}. \quad (2.41)$$

Ein Anfangswellenpaket derselben Form aber mit \mathcal{N}^2 -facher Atomzahl stellt ein Soliton der Ordnung \mathcal{N} dar. Solitonen mit $\mathcal{N} > 1$ zeigen ein periodisches „Atmen“ der Breite. Während einer Solitonperiode T_s treten $\mathcal{N} - 1$ Minima der Breite auf (siehe Abb. 2.6 c). Mit typischen experimentellen Parametern ($V_0 = 0.7 E_{\text{rec}}$, $\omega_{\perp} = 2\pi \cdot 85 \text{ Hz}$, $x_0 = 6.5 \mu\text{m}$) ergibt sich $N = 244$. Die reproduzierbare Erzeugung solch kleiner Kondensate stellt sehr hohe experimentelle Anforderungen und war eine der Hauptschwierigkeiten für die Demonstration des hellen Gap-Solitons. Numerische Untersuchungen zeigen, dass Solitonen stabil sind gegenüber leichten Abweichungen von der durch (2.41) geforderten Atomzahl und der sech-Form [22]. Dies wird durch die in Abschnitt 5.2 vorgestellten experimentellen Ergebnisse bestätigt.

2.3 Numerische Methoden

Für einen quantitativen Vergleich der experimentellen Ergebnisse mit den theoretischen Vorhersagen wurden verschiedene numerische Berechnungen und Simulationen durchgeführt. Die zugrundeliegenden Methoden sollen hier kurz vorgestellt werden.

2.3.1 Berechnung der Bandstruktur und der Blochfunktionen

Die hier vorgestellte Methode zur numerischen Bestimmung der Bandstruktur und der Blochfunktionen ist aus der Festkörperphysik wohlbekannt [31]. Um aus der Eigenwertgleichung $H\Phi_{n,k} = E_{n,k}\Phi_{n,k}$ eine numerisch verwendbare Gleichung abzuleiten, werden das periodische Potential und die Blochwellen nach ebenen Wellen entwickelt:

$$V(x) = \sum_G V_G e^{iGx}, \quad \Phi_{n,k}(x) = \left(\sum_K c_{k-K} e^{-iKx} \right) e^{ikx}. \quad (2.42)$$

Aus dem Blochtheorem folgt, dass K als Werte nur ganzzahlige Vielfache von $G = 2k_{\text{rec}}$ annimmt. Aufgrund der konkreten Form (2.9) des periodischen Potentials enthält die Entwicklung von $V(x)$ sogar nur die beiden Terme $V_{-G} = V_G = \frac{V_0}{4}$. Unter Verwendung dieser Entwicklungen und der Orthogonalität der ebenen Wellen lässt sich die Eigenwertgleichung in folgendes Gleichungssystem umschreiben

$$\begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & & & & \\ & V_G & T_{k-G} & V_{-G} & & & \\ & & V_G & T_k & V_{-G} & & \\ & & & V_G & T_{k+G} & V_{-G} & \\ & & & & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ c_{k-G} \\ c_k \\ c_{k+G} \\ \vdots \end{bmatrix} = E_{n,k} \begin{bmatrix} \vdots \\ c_{k-G} \\ c_k \\ c_{k+G} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad (2.43)$$

wobei $T_{k-K} = \frac{\hbar^2}{2m}(k-K)^2$ ist. Das abzählbar unendlich große Gleichungssystem wird numerisch durch Berücksichtigung von J reziproken Gittervektoren $K = m \cdot G$ ($m \in \mathbb{Z}$) näherungsweise gelöst: Zu jedem Quasiimpuls $k \in [-k_{\text{rec}}, k_{\text{rec}}]$ ergeben sich eine Reihe von Energieeigenwerten $E_{n,k}$ mit jeweils dazugehörigem Eigenvektor, d.h. mit der entsprechenden Blochfunktion $\Phi_{n,k}$. Durch Differentiation von $E_{n,k}$ nach k können schließlich noch die Gruppengeschwindigkeit $v_g(k)$ und die effektive Masse $m_{\text{eff}}(k)$ im n -ten Band bestimmt werden.

2.3.2 Simulationen

Die nichtlineare Dynamik eines Bose-Einstein-Kondensats kann außer in Spezialfällen nur numerisch berechnet werden. Eine in vielen Fällen sehr gute, jedoch recht rechenaufwändige Methode ist die unten beschriebene Split-Step-Technik. Für die Propagation eines Wellenpaketes wechselwirkungsfreier Atome in einem periodischen Potential bietet sich folgende wesentlich schnellere Methode an.

Lineare Propagation eines Bloch-Wellenpaketes

Bei Abwesenheit von interatomaren Wechselwirkungen sind die Eigenzustände in einem periodischen Potential durch die Blochwellen $\Phi_{n,k}(x) = u_{n,k}(x)e^{ikx}$ gegeben. Betrachtet sei hier ein Wellenpaket, das im untersten Energieband $E_1(k) = E_{1,k}$ in einem schmalen Bereich um einen zentralen Quasiimpuls k_0 präpariert ist. Das Wellenpaket wird nun nach den Blochwellen entwickelt und diese werden einzeln propagiert:

$$\Psi(x, t_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(k, t_1) \Phi_{1,k}(x) e^{-i\frac{E_1(k)}{\hbar}(t_2-t_1)} dk \quad (2.44)$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} u_{1,k_0}(x) \int_{-\infty}^{\infty} f(k, t_1) e^{ikx} e^{-i\frac{E_1(k)}{\hbar}(t_2-t_1)} dk. \quad (2.45)$$

Für die Näherung wurde vorausgesetzt, dass sich $u_{n,k}$ im Bereich um k_0 viel langsamer mit k ändert als e^{ikx} . Diese Bedingung ist in unseren Experimenten im Allgemeinen sehr gut erfüllt. Man führt nun eine Funktion $f(x, t)$ durch folgende Definition ein:

$$\Psi(x, t) =: u_{1,k_0}(x) \cdot f(x, t). \quad (2.46)$$

Die ganze Dynamik des Systems wird also durch die Funktion $f(x, t)$ beschrieben. In obiger Näherung ist $f(k, t_1)$ durch die Fouriertransformierte von $f(x, t_1)$ gegeben. Aus (2.45) ergibt sich somit, dass bei Kenntnis der Dispersionsrelation $E_1(k)$ die zeitliche Entwicklung von f und damit von Ψ sehr einfach berechnet werden kann:

$$f(x, t_2) \approx \mathcal{F}^{-1} \left[\mathcal{F} [f(x, t_1)] e^{-i\frac{E_1(k)}{\hbar}(t_2-t_1)} \right]. \quad (2.47)$$

Hierbei bezeichnet \mathcal{F} die Fouriertransformation.

Split-Step-Methode

Die Split-Step-Methode ist ein allgemeines Verfahren zur Integration einer beliebigen Schrödingergleichung, falls der Hamiltonoperator in zwei Terme aufgeteilt werden kann, die im Impulsraum bzw. im Ortsraum diagonal sind:

$$\hat{H}(\hat{x}, \hat{p}, t) = \hat{K}(\hat{p}, t) + \hat{V}(\hat{x}, t). \quad (2.48)$$

Kapitel 2 Theoretische Grundlagen

Die Idee besteht nun darin, den infinitesimalen Zeitentwicklungsoperator $U(t + dt, t)$ [57] in Terme aufzuspalten, die jeweils leicht im Orts- bzw. im Impulsraum ausgewertet werden können:

$$U(t + dt, t) = e^{-i\hat{H}dt} = e^{-i(\hat{K} + \hat{V})dt} \approx e^{-i\hat{K}dt/2} e^{-i\hat{V}dt} e^{-i\hat{K}dt/2}. \quad (2.49)$$

Da die Operatoren \hat{x} und \hat{p} nicht kommutieren, wird bei der Aufteilung in Faktoren ein Fehler gemacht. Durch die symmetrische Aufteilung wird der Fehler jedoch von dt^2 auf dt^3 verringert im Vergleich zu einer Aufteilung $e^{-i\hat{K}dt} e^{-i\hat{V}dt}$. Der Operator \hat{K} ist diagonal im Impulsraum, während \hat{V} im Ortsraum diagonal ist. Die Wellenfunktion $\Psi(x, t_2) = U(t_2, t_1)\Psi(x, t_1)$ zu einem Zeitpunkt $t_2 = t_1 + N_{step} dt$ ergibt sich dann durch abwechselnde Propagation im Impuls- und im Ortsraum

$$\Psi(x, t_2) \approx \hat{P}_{1/2} \hat{R}(t) [\hat{P} \hat{R}(t)]^{N_{step}-1} \hat{P}_{1/2} \Psi(x, t_1), \quad (2.50)$$

mit

$$\hat{P}_{1/2} = \mathcal{F}^{-1} e^{-\frac{i}{\hbar} K dt/2} \mathcal{F}, \quad \hat{P} = \mathcal{F}^{-1} e^{-\frac{i}{\hbar} K dt} \mathcal{F}, \quad \hat{R}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} V(t) dt}. \quad (2.51)$$

Mit K ist dabei der Operator \hat{K} in Impulsdarstellung bezeichnet, während V für den Operator \hat{V} in Ortsdarstellung steht. Im Fall der 1D-Gross-Pitaevskii-Gleichung lauten K und V damit

$$K = \frac{p^2}{2m}, \quad V(t) = V(x, t) + g_{1d} |\Psi(x, t)|^2. \quad (2.52)$$

Der Operator $\hat{R}(t)$ muss bei der Propagation aufgrund der Nichtlinearität auch bei zeitunabhängigem Potential $V(x)$ in jedem Zeitschritt neu berechnet werden. Es sei noch einmal explizit darauf hingewiesen, dass einfach mittels der Halbschritte $\hat{P}_{1/2}$ an den Enden der Propagation die Genauigkeit von dt^2 auf dt^3 erhöht wird. Der Rechenaufwand steigt dagegen nur im ersten und letzten Schritt und beim Abspeichern der Wellenfunktion während der Simulation.

Die Split-Step-Methode kann analog auch zur Propagation der Einhüllenden $A(x, t)$ unter Einbeziehung der vollen Dispersionsrelation $E_1(k)$ des untersten Bandes verwendet werden. Die Faktoren K und V sind in diesem Fall durch

$$K = E_1(k), \quad V(t) = V_{\text{ext}}(x, t) + \alpha_{\text{NL}, k_0} g_{1d} |\Psi(x, t)|^2 \quad (2.53)$$

gegeben, wobei V_{ext} alle rein ortsabhängigen Potentiale mit Ausnahme des periodischen Potentials beinhaltet.

3 Experimentelles System

Dieses Kapitel gibt einen Überblick über die Apparatur, mit der Bose-Einstein-Kondensate hergestellt und die in den folgenden zwei Kapiteln beschriebenen Experimente durchgeführt wurden. Hierfür ist eine Kombination verschiedener experimenteller Techniken notwendig: Die Atome werden durch eine Vakuumkammer von der Umwelt isoliert und mit geeigneten Lasersystemen und optischen Aufbauten eingefangen und lasergekühlt. Der Quantenphasenübergang zum BEC wird durch zweistufige Evaporationskühlung zunächst in einer Magnetfalle und dann in einer optischen Dipolfalle erreicht. Ein periodisches optisches Potential ermöglicht Dispersionsmanagement. Diese Teile der Apparatur waren zu Beginn meiner Diplomarbeit schon vorhanden. Bis zur reproduzierbaren Kondensation in der optischen Dipolfalle, die eine wichtige Voraussetzung für die durchgeführten Experimente darstellt, waren jedoch noch viele Detailverbesserungen notwendig. Zudem erforderten die in Kapitel 5 beschriebenen Experimente zur Erzeugung atomarer Solitonen einmal eine grundlegende Modifikation der optischen Potentiale. Ein Umbau des Abbildungssystems führte außerdem zu einer deutlichen Verbesserung der Abbildungsqualität. Abschließend wurden zusätzliche optische Potentiale konzipiert und aufgebaut, mit deren Hilfe in Zukunft unter anderem Experimente zu Solitorkollisionen durchgeführt werden sollen.

Im Folgenden wird zunächst ein kurzer Überblick über die wesentlichen Teile der Apparatur gegeben. Es folgt eine detailliertere Beschreibung der für unsere Experimente zentralen optischen Potentiale und ihrer experimentellen Kontrolle. Das Abbildungssystem, mit dessen Hilfe alle experimentellen Daten gewonnen werden, wird im darauffolgenden Abschnitt behandelt. Das Kapitel schließt mit einer Erläuterung der Evaporationskühlung in der Magnet- und in der Dipolfalle.

3.1 Apparatur zur Erzeugung des BECs

Der folgende Abschnitt ist bewusst sehr kurz gehalten, da viele Details schon in [35] ausführlich beschrieben wurden. Lediglich die Magnetfalle, die eine zentrale Rolle spielt, wird ausführlicher behandelt. Den optischen Potentialen, der Abbildung und der Evaporationskühlung sind, wie bereits erwähnt, jeweils eigene Abschnitte gewidmet.

3.1.1 Gesamtaufbau

Die Abbildung 3.1 zeigt schematisch einen Überblick über den Gesamtaufbau der Apparatur, wie sie auf dem optischen Tisch angeordnet ist.

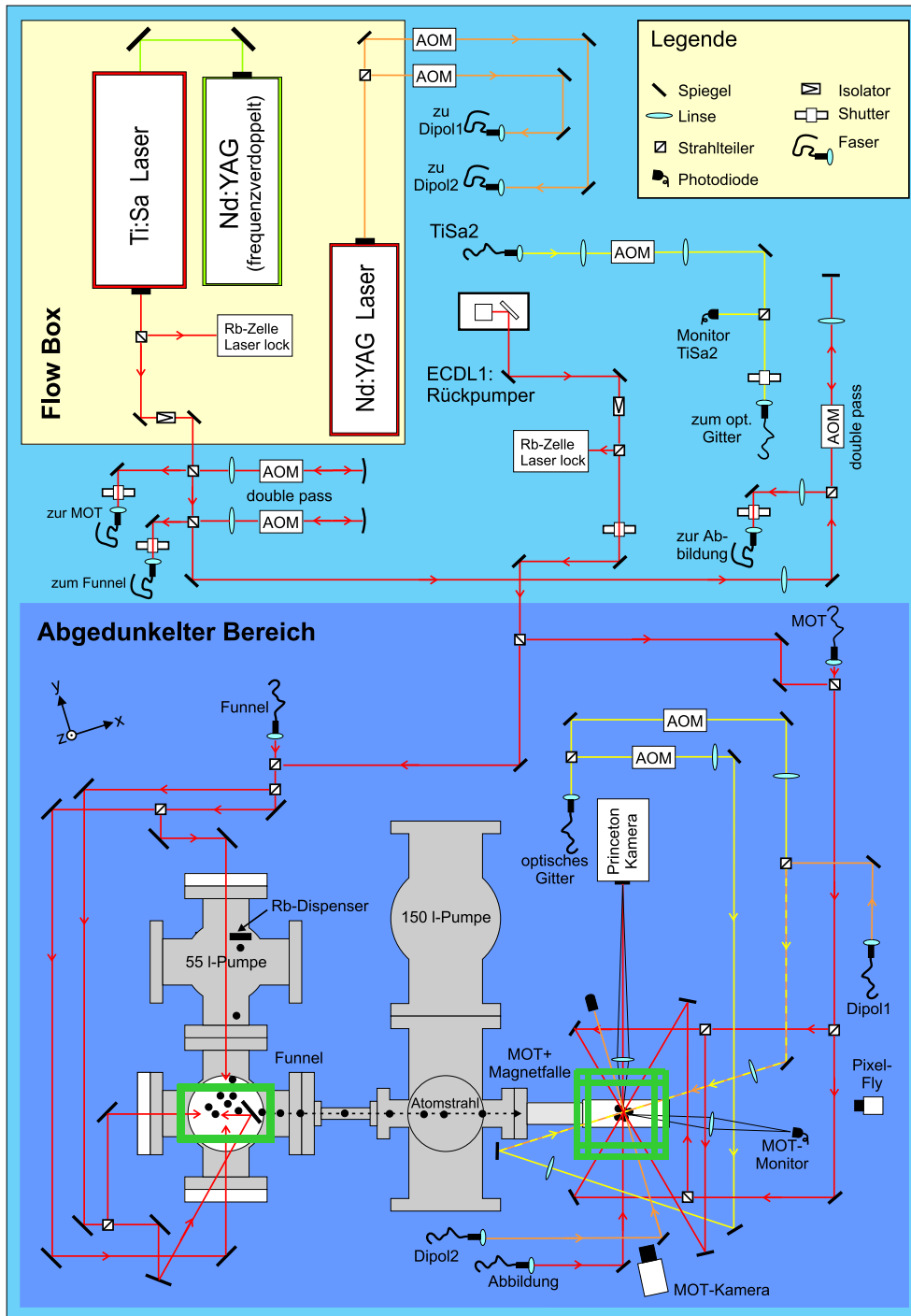


Abbildung 3.1: Schematischer Überblick über den Gesamtaufbau: Im oberen Teil befinden sich die Lasersysteme. Im unteren, gegen Streulicht abgedunkelten Teil befinden sich der Funnel und die Glaszelle, in der die Experimente stattfinden. In dieser Abbildung nicht gezeigt sind die senkrechten Funnel- und MOT-Strahlen, sowie der Laser und die Optik zur simultanen Erzeugung mehrerer Kondensate (siehe Abschnitt 5.4.2). Abbildung aus [35], bearbeitet.

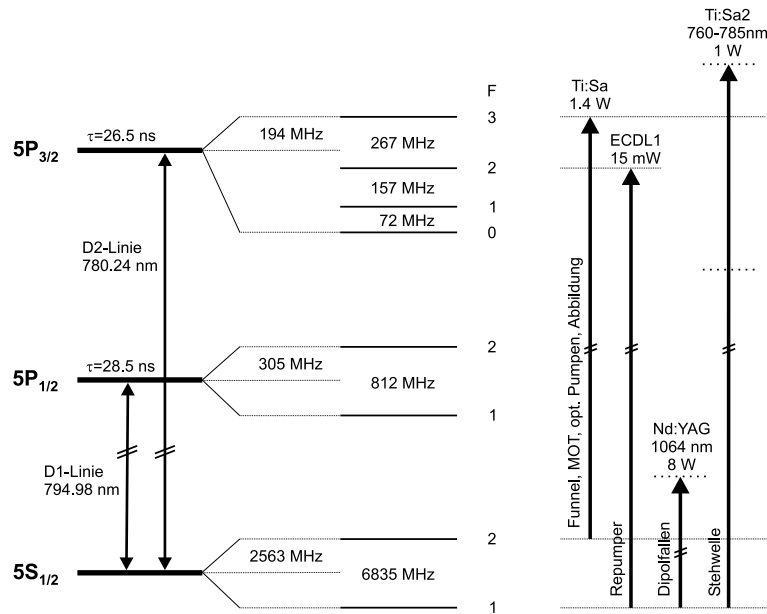


Abbildung 3.2: Hyperfeinstruktur von ^{87}Rb und verwendete Laserwellenlängen

Lasersystem

Im oberen Teil der Abbildung sind die Lasersysteme dargestellt:

- Ein Titan-Saphir-Laser (Coherent MBR-110), der mit einem frequenzverdoppelten Nd:YAG-Laser (Coherent Verdi V10) gepumpt wird und eine optische Ausgangsleistung von typischerweise 1.4 W hat. Er ist auf den $F=2 \rightarrow F'=3, 1$ -Crossover-Übergang der D₂-Linie von ^{87}Rb stabilisiert und liefert das Licht für den atomaren Funnel, die magneto-optische Falle (MOT), das optische Pumpen und die Abbildung.
- Ein gitterstabilisierter Diodenlaser (ECDL1), der als Rückpumper für Funnel und MOT auf den $F=1 \rightarrow F'=2$ -Übergang der D₂-Linie gelockt ist.
- Ein zweiter diodengepumpter Nd:YAG-Laser (Spectra-Physics T40-X30-106QW), der bei einer Wellenlänge von 1064 nm eine optische Leistung von 8 W für die Laserstrahlen der optischen Dipolfalle liefert.
- Zur Erzeugung des optischen Gitters konnte freundlicherweise der Titan-Saphir-Laser (Coherent 899) der Nachbargruppe mitgenutzt werden. Es stand dadurch schmalbandiges, gegenüber der D₂-Linie nach Belieben rot- oder blauverstimmtes Licht ausreichender Leistung (max. 1W) zur Verfügung.

Einen Überblick über das Termschema von ^{87}Rb und über die verwendeten Wellenlängen gibt Abb. 3.2.

Vakuumsystem, Funnel und MOT

Der auf der Abbildung untere Teil des Aufbaus ist zum Schutz gegen Streulicht abgedunkelt. Hier befinden sich das Vakuumsystem, der Funnel und die Glaszelle, in der das BEC hergestellt wird und die Experimente stattfinden. Mithilfe des atomaren Funnel [58] wird ein kalter Atomstrahl erzeugt. Dieser tritt durch ein kleines Loch, das als differentielle Pumpstufe dient, in die Ultrahochvakuum (UHV)-Kammer ein. In der Glaszelle werden die Atome in einer MOT [4] gefangen. Während des Experimentes wird die MOT kontinuierlich mit zwei Kameras beobachtet: Die erste ermöglicht eine schnelle qualitative Kontrolle der einwandfreien Funktion der MOT, während die zweite für quantitative Zwecke und zur Justierung von Funnel und MOT dient. Das Fluoreszenzlicht der Atome in der MOT wird mit einer Linse auf eine Fotodiode abgebildet. Dadurch ist es möglich, den experimentellen Ablauf nach dem Fangen der Atome in der MOT immer bei der gleichen Atomzahl fortzusetzen und somit reproduzierbare Anfangsbedingungen zu schaffen.

Magnetfalle

Von der MOT werden die Atome in eine räumlich überlappende Magnetfalle umgeladen. Diese beruht auf der Wechselwirkung des magnetischen Moments $\boldsymbol{\mu}$ des Atoms mit einem externen Magnetfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$. Die Wechselwirkungsenergie ist gegeben durch

$$U(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = m_F g_F \mu_B B(\mathbf{r}), \quad (3.1)$$

wobei $\boldsymbol{\mu}$ das magnetische Moment des Atoms mit dem Gesamtdrehimpuls \mathbf{F} bezeichnet. Die Atome sammeln sich abhängig vom Vorzeichen des gyromagnetischen Faktors g_F und vom magnetischen Unterzustand m_F entweder in Bereichen hoher Feldstärken („high field seeker“) oder in Bereichen kleiner Feldstärken („low field seeker“). Da aufgrund der Maxwell-Gleichungen in stromfreien Regionen nur Magnetfeldminima, jedoch keine Magnetfeldmaxima existieren können [59], sind ausschließlich „low field seeker“ magnetisch fangbar. Bei ^{87}Rb sind dies im Grundzustand die Unterzustände $|F=1, m_F=-1\rangle$, $|F=2, m_F=1\rangle$, $|F=2, m_F=2\rangle$ und, aufgrund des quadratischen Zeeman-Effektes, auch $|F=2, m_F=0\rangle$. Für die hier beschriebenen Experimente wird der Zustand $|F=2, m_F=2\rangle$ verwendet, in den die Atome mittels eines optischen Pumpimpulses präpariert werden.

Die einfachste Methode, eine Magnetfalle zu realisieren, besteht in einem Quadrupolfeld, das durch zwei Spulen in Anti-Helmholtz-Konfiguration erzeugt werden kann. Bewegen sich die Atome in der Falle, so folgt das magnetische Moment adiabatisch der Magnetfeldrichtung, d.h. die Atome bleiben polarisiert und damit gefangen. Eine Ausnahme davon bildet das Fallenzentrum mit verschwindender Feldstärke: Hier finden so genannte Majorana-Übergänge [60, 61] in nicht gefangene m_F -Zustände statt, was zu unerwünschten Verlusten aus der Falle führt. Es gibt verschiedene Fallengeometrien, die das Problem der Majorana-Verluste vermeiden, insbesondere die Ioffe-Pritchard-Falle [62] und die Time-Orbiting-Potential-Falle (TOP-Falle) [9]. Letztere bietet einen besseren optischen Zugang und findet in unserem Experiment Verwendung.

Bei einer TOP-Falle wird dem Quadrupolfeld ein in der radialen Ebene rotierendes magnetisches Bias-Feld überlagert. Wenn die Rotationsfrequenz wesentlich höher als die Oszillationsfrequenz der Atombewegung in der Falle ist und wesentlich niedriger als die

Lamorfrequenz, so entsteht ein zeitgemitteltes harmonisches Potential:

$$U_{TOP}(\mathbf{r}) = \frac{|m_F g_F \mu_B|}{2} (2B_0 + B''_\rho \rho^2 + B''_z z^2). \quad (3.2)$$

Darin bezeichnet $\rho = x^2 + y^2$ den Abstand von der Symmetrieachse des Quadrupolfeldes. $B''_\rho = \frac{B'^2}{2B_0}$ und $B''_z = \frac{4B'^2}{B_0}$ sind durch den radialen Gradienten B' des Quadrupolfeldes und die Stärke B_0 des Bias-Feldes festgelegt. Der Nullpunkt des magnetischen Feldes liegt nicht im Fallenzentrum, sondern bewegt sich auf einer Kreisbahn (dem „circle of death“) mit Radius $r_D = B_0/B'$ in der x-y-Ebene um dieses herum. Die Fallentiefe ist deswegen durch Majorana-Verluste auf $U_{TOP}(r_D) - U_{TOP}(0) = |m_F g_F \mu_B| B_0/4$ begrenzt. Für den $|F=2, m_F=2\rangle$ -Zustand mit $|\mu| = \mu_B$ ergeben sich die Fallenfrequenzen

$$\omega_x = \omega_y = \sqrt{\frac{\mu_B B'^2}{2mB_0}} = \frac{\omega_z}{\sqrt{8}}. \quad (3.3)$$

Unter Einfluss des Gravitationspotentials [63] ist die Ruhelage der Atomwolke um

$$\Delta z = -\frac{r_D}{2} \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{mg}{2\mu_B B'} \quad (3.4)$$

aus dem Fallenzentrum verschoben („gravitational sag“) und die Fallenfrequenzen ergeben sich aus einer harmonischen Näherung um diese Ruhelage zu:

$$\omega'_x = \omega'_y = \omega_x (1 - \beta^2)^{1/4} \sqrt{1 + \beta^2} \quad (3.5)$$

$$\omega'_z = \omega'_x \sqrt{8 \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2}}. \quad (3.6)$$

Für typische Quadrupolfallenströme von 100-200 A (siehe Abb. 3.6) ist bei unserem Aufbau $\beta < 0.1$ und die Korrekturen der Fallenfrequenzen gegenüber dem schwerelosen Fall liegen bei wenigen Promille. Die Veränderung der Ruheposition kann für diese Ströme durch $\Delta z = g/\omega_z^2$ genähert werden, wobei auch hier nur Fehler im Promillebereich in Kauf genommen werden müssen. Bei der weiteren Reduktion des Quadrupolfallenstroms während des Umladens werden die genaueren Korrekturen für den gravitational sag und die Fallenfrequenzen jedoch relevant, da die Fehler sonst mehrere Prozent betragen. Aus den Gleichungen (3.5) und (3.6) ist ersichtlich, dass sich die Form der Atomwolke bei weiterer Erniedrigung des Quadrupolfallenstroms (d.h. Erhöhung von β) von oblat nach sphärisch verändert, bis die Atome bei $\beta = 1$ nicht mehr gefangen sind.

Zur evaporativen Kühlung (siehe Abschnitt 3.4.1) stehen zwei Methoden zur Verfügung: Für das Circle of Death-Kühlen wird der Radius r_D kontinuierlich verringert, während für das Radiofrequenz(Rf)-Kühlen Strahlung mit einer typischen Frequenz von 4.5–7.5 MHz bei konstanten B' und B_0 über je eine Antenne ober- und unterhalb der Glaszelle eingestrahlt wird. Beide Techniken bewirken ausschließlich im Randbereich der atomaren Wolke Übergänge in ungefangene m_F -Zustände und den Verlust der entsprechenden Teilchen aus der Falle. Da sich hier bevorzugt die heißesten Atome aufhalten, führt dies in Verbindung mit einer hinreichend schnellen Rethermalisierung zu einer Erniedrigung der Temperatur.

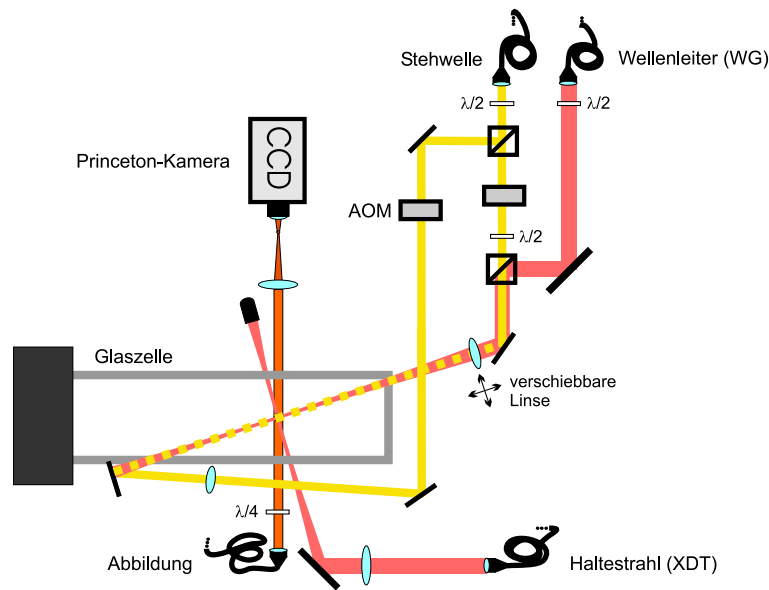


Abbildung 3.3: Aufbau um die Glazelle mit Wellenleiter, Haltestrahl, periodischem Potential und Abbildungsoptik. Nicht dargestellt sind die MOT-Strahlen und die Optik zur simultanen Erzeugung mehrerer Kondensate.

Computersteuerung des Experiments

Der gesamte experimentelle Ablauf wird mit Hilfe eines mit „LabView“ geschriebenen Computerprogramms in Millisekunden-Schritten gesteuert. Dazu stehen 16 analoge und 16 digitale Ausgabekanäle, sowie 8 analoge Eingabekanäle zur Verfügung. Mit einem zweiten Computer werden die Absorptionsbilder aus der Kamera ausgelesen und durch ein „MATLAB“-Programm sofort analysiert. Dies ermöglicht es, die Ergebnisse bereits während des Experimentierens zu kontrollieren und die Steuerungssequenzen gegebenenfalls kurzfristig zu korrigieren bzw. zu optimieren.

3.1.2 Aufbau um die Glazelle

Abbildung 3.3 zeigt schematisch den Aufbau um die UHV-Glazelle, in der die eigentlichen Experimente stattfinden. Die Atome werden in der Magnetfalle durch erzwungene Evaporation bis zu einer typischen Phasenraumdichte $\mathcal{D} = 3 \cdot 10^{-2}$ vorgekühlt und dann in eine optische Dipolfalle umgeladen (siehe Abschnitte 3.2 und 3.4). Die optische Dipolfalle wird von zwei sich orthogonal kreuzenden, gegenüber der D_2 -Linie rotverstimmten Laserstrahlen, dem Wellenleiter (WG) und dem Haltestrahl (XDT), gebildet. In dieser Falle wird die kalte Atomwolke schließlich durch Absenken der Strahlleistungen bis zur Quantenentartung gekühlt. Nach Abschalten des Haltestrahls befindet sich das BEC in einer dynamisch eindimensionalen Situation und kann sich längs des Wellenleiters frei ausbreiten. Das periodische Potential wird durch eine optische Stehwelle aus zwei gegenläufigen Laserstrahlen erzeugt. Es wurde im Laufe der Diplomarbeit umgebaut und ist jetzt kollinear mit dem Wellenleiter, während es vorher einen Winkel $\alpha = 21^\circ$ mit diesem einschloss. Erst durch diese Modifikation wurde die Realisierung von Solito-

nen möglich (siehe Abschnitt 5.1.2). Die Frequenzen der beiden Strahlen können durch akusto-optische Modulatoren (AOMs), die von einem „arbitrary wave form generator“ über Rf-Elektronik gesteuert sind, phasenkontinuierlich und unabhängig voneinander präzise verstimmt werden. Für die Aufnahme der Bilder der atomaren Dichteverteilungen wird resonante Absorptionsabbildung verwendet (siehe Abschnitt 3.3). In Abbildung 3.3 nicht gezeigt sind die MOT-Strahlen, sowie die zur simultanen Erzeugung mehrerer Kondensate verwendete Optik (siehe Abb. 3.5).

3.2 Optische Potentiale

Der Wellenleiter, der Haltestrahl, das periodische Potential zur Kontrolle der Dispersion, sowie das periodische Potential zur simultanen Erzeugung mehrerer Kondensate werden im Experiment durch Laserstrahlen realisiert, deren Frequenz ω_L weit von einer Resonanz ω_0 im Spektrum der ^{87}Rb -Atome entfernt ist. In der für solche optische Felder anwendbaren elektrischen Dipolnäherung [64] koppeln die Atome über ihre Dipolmomente \mathbf{d} an den Operator $\hat{\mathbf{E}}$ des elektrischen Anteils des Lichtfeldes gemäß $\hat{H}_{\text{AL}} = -\mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{E}}$. Das Lichtfeld besteht aus einem Kontinuum von Vakuummoden und einer Mode, die das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ des Laser beschreibt. Die Kopplung an die Vakuummoden führt zu spontaner Emission, während die Kopplung an das Laserfeld den Strahlungsdruck und das konservative Dipolpotential erzeugt. Für die im Experiment realisierte Situation großer Verstimmung $\delta = \omega_L - \omega_0$ mit $|\delta| \gg \Omega$, $|\delta| \gg \Gamma$ sind spontane Emission und Strahlungsdruck vernachlässigbar und es ergibt sich für ein Zwei-Niveau-System das Dipolpotential:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{\hbar|\Omega(\mathbf{r})|^2}{4\delta}. \quad (3.7)$$

Dabei bezeichnen $\Omega = \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})/\hbar$ die Rabi-Frequenz für den betrachteten Übergang und Γ die natürliche Linienbreite des angeregten Zustandes. Das Betragsquadrat der Rabi-Frequenz hängt gemäß

$$|\Omega(\mathbf{r})|^2 = \frac{\Gamma^2 I(\mathbf{r})}{2I_{\text{sat}}} \quad (3.8)$$

von der Intensität $I(\mathbf{r})$ des Laserstrahls und der Sättigungsintensität I_{sat} des Übergangs ab. Bei einem Atom mit Hyperfeinstruktur wie ^{87}Rb müssen noch die entsprechenden Clebsch-Gordan-Koeffizienten berücksichtigt werden [65].

3.2.1 Wellenleiter (WG) und Haltestrahl (XDT)

Der Wellenleiter wird durch einen fokussierten, linear polarisierten Gaußschen Laserstrahl [66] mit der Wellenlänge $\lambda_D = 2\pi c/\omega_D$ und der Intensitätsverteilung

$$I(\mathbf{r}) = \frac{I_{\text{max}}}{1 + (x/x_R)^2} \exp\left[-\frac{2(y^2 + z^2)}{W(x)^2}\right], \quad W(x) = W_{\text{WG}} \sqrt{1 + (x/x_R)^2} \quad (3.9)$$

erzeugt. Dabei sind W_{WG} die Strahltaile, $x_R = \frac{\pi W_{\text{WG}}^2}{\lambda_D}$ die Rayleigh-Länge und $I_{\text{max}} = \frac{2P}{\pi W_{\text{WG}}^2}$ die maximale Intensität des Strahls mit der Leistung P . Mit den Verstimmungen $\delta_i = \omega_D - \omega_i$ des Lasers gegenüber den D_i -Linien ergibt sich schließlich das Potential

$$V_{\text{WG}}(\mathbf{r}) = \frac{V_{\text{max}}}{1 + (x/x_R)^2} \exp\left[-\frac{2(y^2 + z^2)}{W(x)^2}\right], \quad V_{\text{max}} = \frac{\hbar\Gamma^2 I_{\text{max}}}{8I_{\text{sat}}} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\delta_1} + \frac{2}{\delta_2}\right) \quad (3.10)$$

mit $I_{\text{sat}} = 1.58 \text{ mW/cm}^2$. Das Potential setzt sich dabei aus der Summe der zu D_1 - und D_2 -Linie gehörigen Einzelpotentiale zusammen. In V_{max} ergibt sich der Faktor $\frac{1}{3}$ vor der Klammer aus den Clebsch-Gordan-Koeffizienten der beteiligten Hyperfein-Übergänge und der Faktor 2 innerhalb der Klammer berücksichtigt ihre Anzahl. Die Annahme gleicher Verstimmung δ_2 für die beiden in unserem Fall am D_2 -Übergang beteiligten oberen Niveaus $^2P_{3/2}, F=2$ und $^2P_{3/2}, F=3$ ist eine sehr gute Näherung, da diese Verstimmung sehr groß ist gegenüber dem Abstand von 267 MHz der beiden Niveaus (vgl. Abb. 3.2). Das Potential ist für $V_{\text{max}} < 0$ attraktiv und eine quadratische Entwicklung um den Fokus liefert die charakteristischen Fallenfrequenzen

$$\omega_{\perp} = \sqrt{\frac{4|V_{\text{max}}|}{mW_{\text{WG}}^2}}, \quad \omega_{\parallel} = \sqrt{\frac{2\lambda_{\text{D}}^2|V_{\text{max}}|}{m\pi^2W_{\text{WG}}^4}} = \frac{\lambda_{\text{D}}}{\sqrt{2\pi}W_{\text{WG}}}\omega_{\perp}. \quad (3.11)$$

Für typische experimentelle Parameter $\lambda_{\text{D}} = 1064 \text{ nm}$ und $W_{\text{WG}} \simeq 60 \mu\text{m}$ ist $\omega_{\perp} \simeq 250 \omega_{\parallel}$. Die Intensität des Laserstrahls kann also so eingestellt werden, dass die Atome transversal hinreichend stark eingeschlossen sind und longitudinal für Propagationszeiten $t \ll \omega_{\parallel}$ als frei beschrieben werden können. Typische Fallenfrequenzen liegen bei $\omega_{\perp} = 2\pi \cdot 100 \text{ Hz}$ und $\omega_{\parallel} = 2\pi \cdot 0.5 \text{ Hz}$.

Die Photonen-Streureate Γ_s im Intensitätsmaximum des Wellenleiters ist gegeben durch

$$\Gamma_s = \frac{\Gamma^3 I_{\text{max}}}{8I_{\text{sat}}} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\delta_1^2} + \frac{2}{\delta_2^2} \right). \quad (3.12)$$

Falls die Verweildauer der Atome im Wellenleiter wesentlich kürzer als Γ_s^{-1} ist, kann die Streuung der Photonen an den Atomen vernachlässigt werden. Typische Werte von Γ^{-1} für den Wellenleiter liegen bei mehreren Sekunden.

Die entsprechenden Formeln für den Haltestrahl ergeben sich durch Vertauschung von x und y . Der Waist W_{xdt} beträgt typischerweise ebenfalls $60 \mu\text{m}$, während die Fallenfrequenzen bei den verschiedenen Experimenten auf sehr unterschiedliche Werte eingestellt werden.

3.2.2 Periodisches Potential

Das periodische Potential wird durch eine mit dem Wellenleiter kolineare optische Stehwelle realisiert. Sie wird von zwei gegenläufigen Laserstrahlen mit Intensitäten $I_{a,b}$ und Frequenzen $\omega_{a,b}$ erzeugt. Für kleine Verstimmung $\Delta\omega = \omega_b - \omega_a \ll \omega_{a,b}$ ergibt sich durch Mittelung der Intensität über eine Periodendauer $2\pi/\omega_{a,b}$ ein zeitlich langsam veränderliches Interferenzmuster, dessen Intensität sich im Bereich der gemeinsamen Strahltaile durch

$$I(x, t) = I_a + I_b + 2\sqrt{I_a I_b} \left[1 + \cos\left(\frac{2\omega}{c}x - \Delta\omega t\right) \right] \quad (3.13)$$

beschreiben lässt. Dabei ist $\omega = (\omega_a + \omega_b)/2$. Das periodische Potential ist typischerweise nur um einige Nanometer von D_1 - und D_2 -Linie verstimmt, so dass Interferenzen mit dem Wellenleiter ($\lambda_{\text{WG}} = 1064 \text{ nm}$) keine Rolle spielen. Das resultierende Dipolpotential ergibt sich analog zum vorherigen Abschnitt zu

$$V_{\text{sw}}(x, t) = \frac{V_0}{2} \cos\left(\frac{2\omega}{c}x - \Delta\omega t\right) + V_1, \quad V_0 = \frac{\hbar\Gamma^2\sqrt{I_a I_b}}{2I_{\text{sat}}} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\delta_1} + \frac{2}{\delta_2} \right) \quad (3.14)$$

mit $\delta_i = \omega - \omega_i$. Im Idealfall gleicher Strahlintensitäten $I_a = I_b$ ist die Modulationstiefe V_0 maximal und der konstante Term lautet $V_1 = \frac{V_0}{2}$. Für $\Delta\omega = 0$ hat das periodische Potential dann genau die Form (2.9). Es kann mittels einer Verstimmung $\Delta\omega$ auf eine Geschwindigkeit $v_{\text{sw}} = -\frac{c\Delta\omega}{2\omega}$ beschleunigt werden. Dies ermöglicht die Präparation des Wellenpaketes im Quasiimpulsraum, wie bereits in Abschnitt 2.1.2 erläutert. Für $I_a \neq I_b$ berechnet sich V_1 zu $\frac{V_0}{4} \left(\frac{I_a}{\sqrt{I_a I_b}} + \frac{I_b}{\sqrt{I_a I_b}} \right)$.

Die maximale Photonen-Streurate für Atome in der optischen Stehwelle ist in jedem Fall gegeben durch

$$\Gamma_s = \frac{\Gamma^3(I_a + I_b + \sqrt{I_a I_b})}{8I_{\text{sat}}} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\delta_1^2} + \frac{2}{\delta_2^2} \right). \quad (3.15)$$

Im Fall $I_a = I_b$ liegen die Photonenstreuratensätze für die beim Dispersionsmanagement verwendeten schwachen optischen Potentiale typischerweise unter 1 Hz. Bei gutem Überlapp der Stehwellenstrahlen stellt spontane Emission aufgrund des periodischen Potentials daher auf der Zeitskala unserer Experimente (einige 10 ms) keine Störung dar.

Eichung der Potentialstärke

Experimentelle Eichungen der Modulationstiefe des periodischen Potentials können unabhängig voneinander durch Bragg-Beugung [67], Landau-Zener-Tunneln [68] oder Beugung im Kapitza-Dirac-Regime [69] erhalten werden. Als Beispiel soll hier die Bragg-Beugungs-Methode erläutert werden.

Zur Eichung mittels Bragg-Beugung nutzt man die Intensitätsabhängigkeit der Bandlücke ΔE zwischen dem untersten und dem ersten angeregten Band in der Dispersionsrelation. Dazu wird das periodische Potential im Gegensatz zum normalen Präparationsprozess direkt mit der Gitterrückstoß-Geschwindigkeit v_{rec} angeschaltet. Der Anfangszustand des im Laborsystem ruhenden Wellenpaketes mit der Einhüllenden $A(x, t = 0)$ lautet im bewegten Bezugssystem der Stehwelle dann also $\Psi(x, 0) = A(x, 0) \cdot e^{-ik_{\text{rec}}x}$. Dies ist nach Anschalten des periodischen Potentials kein Eigenzustand des Systems mehr. Die Eigenzustände mit Quasiimpuls $-k_{\text{rec}}$ in den untersten zwei Bändern sind durch die Blochfunktionen $\Phi_{1,-k_{\text{rec}}}$ und $\Phi_{2,-k_{\text{rec}}}$ gegeben:

$$\Phi_{1,-k_{\text{rec}}}(x, t) \approx \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{+ik_{\text{rec}}x} + e^{-ik_{\text{rec}}x}) e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} \quad (3.16)$$

$$\Phi_{2,-k_{\text{rec}}}(x, t) \approx \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{+ik_{\text{rec}}x} - e^{-ik_{\text{rec}}x}) e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}. \quad (3.17)$$

Die Näherung gilt dabei für kleine Stehwellenintensitäten. Der Anfangszustand lautet in dieser Basis also

$$\Psi(x, 0) = A(x, 0) \cdot e^{-ik_{\text{rec}}x} = A(x, 0) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} [\Phi_{1,-k_{\text{rec}}}(x, 0) - \Phi_{2,-k_{\text{rec}}}(x, 0)]. \quad (3.18)$$

Da die Zustände Φ_1 und Φ_2 Eigenzustände sind, besteht ihre Zeitentwicklung nur in der Akkumulation eines Phasenfaktors $e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}$ bzw. $e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}$. Aufgrund der Differenz zwischen den beiden Eigenenergien ist $\Psi(x, 0)$ als Superposition aus diesen Zuständen jedoch kein Eigenzustand, sondern entwickelt sich gemäß:

$$\Psi(x, t) \approx A(x, 0) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} \left[\Phi_{1,-k_{\text{rec}}}(x, 0) - \Phi_{2,-k_{\text{rec}}}(x, 0) e^{-\frac{i}{\hbar}\Delta E t} \right] \quad (3.19)$$

$$\approx A(x, 0) \cdot \frac{1}{2} e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} \left[e^{ik_{\text{rec}}x} (1 - e^{-\frac{i}{\hbar}\Delta E t}) + e^{-ik_{\text{rec}}x} (1 + e^{-\frac{i}{\hbar}\Delta E t}) \right]. \quad (3.20)$$

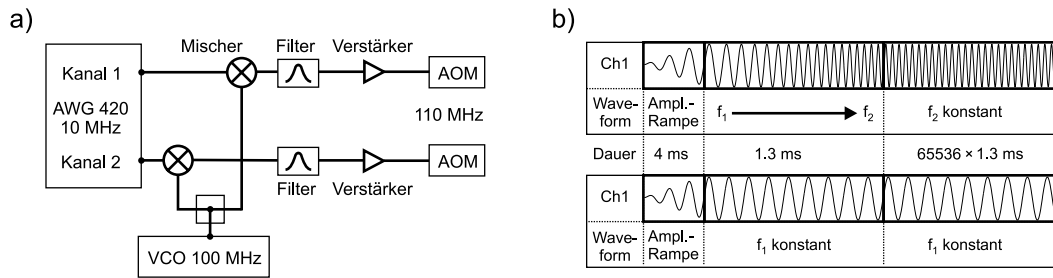


Abbildung 3.4: Experimentelle Kontrolle über Amplitude und Phase des periodischen Potentials. a) Verwendete Rf-Elektronik (siehe Text). b) Schematische Darstellung einer Sequenz zur adiabatischen Präparation der Wellenpakete im Quasiimpulsraum.

Hierbei wurde angenommen, dass die Energielücke $\Delta E(k)$ über den Bereich der Quasiimpuls-Verteilung des Wellenpaketes näherungsweise den konstanten Wert ΔE hat. Solange das periodische Potential angeschaltet ist, oszilliert der Zustand also mit der Frequenz $\Omega = \Delta E/\hbar$ zwischen den freien Impulseigenzuständen bei $-k_{\text{rec}}$ und jenen bei k_{rec} im Bezugssystem der Stehwelle hin- und her. Bei abruptem Ausschalten der Stehwelle nach einer Dauer t_1 wird der Zustand $\Psi(x, t_1)$ auf die freien Impulszustände projiziert. In einer darauf folgenden freien Expansion trennen sich die zu den verschiedenen Impulskomponenten gehörigen Anteile des Wellenpaketes räumlich auf, so dass ihre relative Besetzung im Ortsraum detektiert werden kann. Durch Variation von t_1 kann daher die Oszillationsfrequenz Ω experimentell bestimmt werden. Die Bandlücke ΔE zwischen den beiden untersten Bändern und damit auch Ω sind eindeutige Funktionen der Modulationstiefe V_0 des periodischen Potentials, so dass sich diese hieraus bestimmen lässt.

Experimentelle Kontrolle über Amplitude und Phase

Zur Präparation der Atome im periodischen Potential bei beliebigem Quasiimpuls ist eine genaue experimentelle Kontrolle der Phase und Amplitude der Stehwelle notwendig. Dies ist mit Hilfe der AOMs in den beiden Laserstrahlen, die die Stehwelle bilden, möglich.

Die AOMs werden durch die in Abb. 3.4 a dargestellte Rf-Elektronik angesteuert. Ein Voltage Controlled Oscillator (VCO) erzeugt ein sinusförmiges Signal bei einer Frequenz von 100 MHz. Das Signal wird in zwei Kanäle für die beiden AOMs aufgespalten. In jedem Kanal wird das 100-MHz-Signal mit dem jeweiligen Ausgangssignal eines zweikanaligen Arbitrary Waveform Generator (Tektronix AWG 420) mit Frequenzen in der Nähe von 10 MHz gemischt. Aus den beiden entstehenden Mischungssignalen wird durch einen Bandpass-Filter jeweils die 110-MHz-Komponente des Signals extrahiert. Diese Signale werden schließlich auf eine Leistung von maximal je 1 W verstärkt und treiben die beiden AOMs.

Die Kontrolle der Amplitude und der Phase der beiden Kanäle erfolgt über das Ausgangssignal des AWG. Dieser ist in der Lage, beliebige Wellenformen, also digitale Listen von Spannungswerten in einem Speicher, mit einer vorgegebenen Samplingfrequenz abzuspielen. Im Gegensatz zu einem gewöhnlichen Funktionsgenerator können mit einem AWG beliebige Ausgabefunktionen realisiert werden. Dies ermöglicht die phasenkontinuierliche Verstimmung der beiden Stehwellen-Laserstrahlen gegeneinander und damit

die phasenkontinuierliche Beschleunigung des periodischen Potentials, wie sie für die Präparation der Wellenpakete bei einem bestimmten Quasiimpuls benötigt wird (vgl. Abschnitt 2.1.2).

Eine solche Präparations-Sequenz ist schematisch in Abb. 3.4 b dargestellt: Zunächst wird in beiden Kanälen ein sinusförmiges Signal der Frequenz f_1 mit einer linearen Amplitudenrampe angeschaltet. Dadurch werden die Atome adiabatisch im Zentrum der Brillouinzone präpariert. Im nächsten Schritt wird die Frequenz des ersten Kanals linear von f_1 auf f_2 erhöht und das Wellenpaket damit im Quasiimpulsraum verschoben. Schließlich bleibt die Verstimmung der beiden Stehwellenstrahlen bis zum Ende des Experimentes konstant, so dass sich das periodische Potential mit gleichbleibender Geschwindigkeit weiterbewegt.

3.2.3 Aktive Stabilisierung der Potentialtiefen

Die Intensitäten von Wellenleiter, Haltestrahl und periodischem Potential sind sehr kritische experimentelle Parameter, bei denen Fluktuationen so gut wie möglich vermieden werden müssen. Aus diesem Grund wurden die Intensitäten über je einen Regelkreis aktiv stabilisiert. Jeder Regelkreis besteht aus einer Monitor-Fotodiode, einem AOM und einem Proportional-Integral-Schaltkreis. Der PI-Schaltkreis steuert die Intensität des jeweiligen Laserstrahls mit Hilfe des AOMs jeweils so, dass die Spannung der Monitor-Fotodiode mit einer vom Computer vorgegebenen Spannung übereinstimmt. Durch diese Stabilisierung ist es möglich, die Strahlintensität auf der Fotodiode und damit in der Glaszelle sehr exakt reproduzierbar einzustellen, unabhängig von Drifts der Strahlintensität vor dem AOM. Da die Laserstrahlen durch Glasfasern in den abgedunkelten Bereich des Experimentes geleitet werden, können schon kleine mechanisch-thermische Drifts der Strahlen vor der Einkopplung in die Glasfasern zu extrem großen Intensitätsdrifts am Ausgang der Glasfasern führen. Solche Drifts der Intensitäten und damit der Falltiefen stellten zu Beginn meiner Diplomarbeit insbesondere für die Kondensation in der optischen Dipolfalle noch ein großes Problem dar.

3.2.4 Weitere optische Potentiale

Neben den oben beschriebenen Lichtfeldern stehen in der Glaszelle zwei weitere optische Potentiale zur Verfügung (siehe Abb. 3.5). Sie dienen in Experimenten, die im Rahmen dieser Arbeit vorgestellt werden (siehe Kapitel 5.4), zur simultanen Erzeugung von zwei Kondensaten mit einem kleinen, vorgegebenen Abstand (typischerweise 20-100 μm) und zu deren Manipulation. Der Aufbau kann jedoch ohne größere Modifikationen auch zur Erzeugung zweidimensionaler Gitter [70] und damit für Experimente zur Eindimensionalität und möglicherweise sogar für die Realisierung eines Tonks-Gases [71, 72, 73] eingesetzt werden.

Die Potentiale werden durch zwei senkrecht zueinander linear polarisierte Laserstrahlen der Wellenlänge $\lambda_{\text{sw},2} = 779.917 \text{ nm}$ erzeugt. Der erste Strahl bildet mit der Vertikalen einen Winkel von 8° und wird durch einen Spiegel in sich selbst zurückreflektiert, so dass ein periodisches Potential entsteht. Der Winkel mit dem Wellenleiter kann zwischen 88° und 92° variiert werden. Die Taille des Strahls im Zentrum der Glaszelle beträgt $391 \times 480 \mu\text{m}^2$. Der zweite Strahl verläuft in der y-z-Ebene und steht senkrecht auf dem ersten Strahl. Er wurde in den bisher durchgeführten Experimenten noch nicht ver-

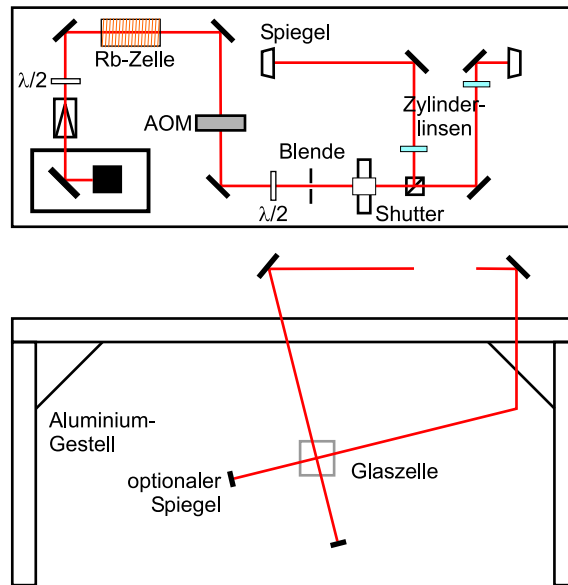


Abbildung 3.5: Optisches Gitter zur Erzeugung der Doppelkondensate. Die Abbildung zeigt schematisch den verwendeten Aufbau in Aufsicht (oben) und in Frontalansicht (unten). Eine geheizte Rb-Spektroskopiezelle dient zur spektralen Unterdrückung resonanter Anteile im Licht des Diodenlasers. Mit Zylinderlinsen wird das Licht auf eine Strahltaile von $391 \times 480 \mu\text{m}^2$ (senkrechter Strahl) fokussiert.

wendet, kann aber zur Erzeugung eines repulsiven Potentials für die Untersuchung von Solitonkollisionen eingesetzt werden (siehe Abschnitt 5.4.3). Mit Hilfe eines optionalen Retroreflektionsspiegels kann für zukünftige Experimente (s.o.) auch hier ein periodisches Potential realisiert werden.

Die Optik zur Erzeugung dieser Potentiale befindet sich auf einem $70 \times 25 \text{ cm}^2$ großen optischen Breadboard, das auf einem am optischen Tisch befestigten Gestell 20 cm über der Glazelle ruht (siehe Abb. 3.5). Das Licht für die Potentiale wird von einem gitterstabilisierten Diodenlaser mit einer maximalen Ausgangsleistung von 80 mW erzeugt. Mittels einer heizbaren Rb-Spektroskopiezelle können resonante Anteile im Laserstrahl unterdrückt werden. Dies ermöglicht eine Reduktion der resonanten Photonenstreurate der Atome und verhindert damit ein Aufheizen des Kondensats. In einer zukünftigen Version des Experimentes wird voraussichtlich Licht aus einem Titan-Saphir-Laser zur Verfügung stehen. Der Diodenlaser kann dann durch einen Glasfaser-Auskoppler ersetzt werden und eine spektrale Reinigung des Lichts mittels der Spektroskopiezelle ist aufgrund der Schmalbandigkeit des Laserlichts nicht mehr nötig. Mit Hilfe eines AOMs kann die Intensität der Laserstrahlen vom Computer gesteuert werden. Ein Shutter erlaubt das komplette Abschalten der Strahlen. Das Gestell des Aufbaus besteht aus Aluminium, um Störungen der Experimente durch Magnetisierung zu vermeiden. Es wurde mechanisch sehr stabil gebaut und kann für eine verbesserte Dämpfung der Eigenschwingungen zusätzlich mit Sand bzw. einem Sand-Öl-Gemisch befüllt werden.

3.3 Abbildungssystem

Das Abbildungssystem spielt bei Experimenten mit kalten Atomen eine zentrale Rolle. Aus den aufgenommenen Bildern werden sämtliche Informationen über die Atomwolke (Temperatur, Atomzahl, Dichteverteilung) extrahiert. Es gibt mehrere verschiedene Abbildungsmethoden, die jeweils unterschiedliche Stärken und Schwächen haben [40]. Für die in unseren Experimenten auftretenden sehr kleinen Atomzahlen eignet sich resonante Absorptionsabbildung am besten.

3.3.1 Absorptionsabbildung kalter Atome

Das verwendete Abbildungssystem ist in Abb. 3.3 dargestellt. Es besteht aus einem kollimierten Gaußschen Laserstrahl (Strahltaile $W_0 = 1.76$ mm, Intensitätsverteilung I_0), der die Atome mit resonantem σ^+ -Licht ($F = 2 \rightarrow F' = 3$ -Übergang der D_2 -Linie) beleuchtet, und einer wissenschaftlichen CCD-Kamera (Princeton Instruments NTE/CCD-512TK), auf die der Schatten der Atome abgebildet wird. Die Abbildung auf den 12.4×12.4 mm² großen CCD-Chip erfolgt im Gegensatz zu früher [35] jetzt mit nur noch einer Linse. Durch diesen Umbau konnte die Bildqualität entschieden verbessert werden.

Beim Durchgang des Strahls durch die Atomwolke mit der Dichteverteilung $n(x, y, z)$ wird die Intensität I gemäß

$$\frac{\partial I(x, y, z)}{\partial y} = -\sigma \cdot I(x, y, z) \cdot n(x, y, z) \quad (3.21)$$

durch Streuung abgeschwächt. Der Streuquerschnitt σ der Atome hängt im Allgemeinen von der lokalen Intensität $I = I(x, y, z)$ ab [65]:

$$\sigma = \frac{\hbar\omega\Gamma}{2I_{\text{sat}}(1 + I/I_{\text{sat}} + 4\delta^2/\Gamma^2)}. \quad (3.22)$$

Mit $\delta = \omega - \omega_0$ ist dabei die Verstimmung der Frequenz ω des Abbildungsstrahls von der atomaren Resonanz ω_0 bezeichnet. Im Grenzfall $I_0/I_{\text{sat}} \ll 1 + 4\delta^2/\Gamma^2$ ist σ von I und damit von der Position in der Atomwolke unabhängig. Für die Intensitätsverteilung $I(x, z)$ nach Durchgang durch die Atomwolke gilt dann

$$I(x, z) = I_0(x, z)e^{-\sigma\tilde{n}(x, z)}, \quad (3.23)$$

wobei $\tilde{n} = \int n(x, y, z) dy$ die Säulendichte der Atome ist.

In der Praxis werden drei Intensitätsverteilungen mit der Kamera aufgenommen: $I_p(x, z)$ bei angeschaltetem Abbildungsstrahl mit Atomen, $I_r(x, z)$ bei angeschaltetem Abbildungsstrahl ohne Atome und $I_b(x, z)$ bei abgeschaltetem Abbildungsstrahl ohne Atome. Daraus ergibt sich dann die Säulendichte

$$\tilde{n}(x, z) = \frac{1}{\sigma} \text{OD} = -\frac{1}{\sigma} \ln \frac{I}{I_0} = -\frac{1}{\sigma} \ln \left[\frac{I_p(x, z) - I_b(x, z)}{I_r(x, z) - I_b(x, z)} \right]. \quad (3.24)$$

Die Intensität des Abbildungsstrahls wird im Experiment typischerweise so eingestellt, dass die optische Dichte $\text{OD} \simeq 1$ –1.5 ist und die Annahme $\sigma \simeq$ konstant somit gerechtfertigt ist. Die Gesamtatomzahl N in der Atomwolke ergibt sich durch Integration über

x und z bzw. durch Summation über die Counts der CCD-Pixel bei Berücksichtigung des Vergrößerungsfaktors, der Pixelgröße und der Intensitätseichung.

Nach dem oben erwähnten Umbau der Abbildungsoptik wurden die Intensität (Aufnahme eines Bildes mit der Kamera und direkte Messung der dazugehörigen Leistung des Abbildungsstrahls) und die Vergrößerung (parabolischer Fit an die Positionen freifallender Atome) neu geeicht und der Fokus der Abbildung wieder justiert. Es sei noch angemerkt, dass die Abbildung in unserem Aufbau nicht exakt senkrecht zur Richtung des Wellenleiters erfolgt. Die daraus resultierende Verzerrung der Größen muss bei der Interpretation der Absorptionbilder daher natürlich berücksichtigt werden.

3.3.2 Messung der Phasenraumdichte

Für den Quanten-Phasenübergang zum Bose-Einstein-Kondensat ist die Phasenraumdichte $\mathcal{D} = n\lambda_{\text{dB}}^3$ die entscheidende Größe. Für $\mathcal{D} \ll \mathcal{D}_c$ besitzen thermische Ensembles in harmonischen Fallen gaußförmige Orts- und Impulsverteilungen. Dies nutzen die beiden im Folgenden beschriebenen Methoden zur Bestimmung der Phasenraumdichten atomarer Wolken in diesem Limit aus.

Time-of-flight-Methode

Bei der Time-of-flight-Methode werden durch Absorptionsabbildung die Säulendichte-Verteilung $\tilde{n}(x, z, t = 0)$ in der Falle und die Säulendichte-Verteilung $\tilde{n}(x, z, t = t_{\text{exp}})$ nach Abschalten der Falle und einer freien Expansionszeit t_{exp} bestimmt. Die Dichteverteilungen werden jeweils mit einer Gaußfunktion

$$\tilde{n}_{th}(x, z) = \tilde{n}_0 \exp \left[-\frac{2x^2}{\sigma_x^2} - \frac{2z^2}{\sigma_z^2} \right] \quad (3.25)$$

gefittet. Aus den Breiten $\sigma_{x,z}(t_{\text{exp}})$ und $\sigma_{x,z}(0)$ ergibt sich dann die Temperatur der thermischen Wolke:

$$T = \frac{m}{3k_B}(v_x^2 + 2v_z^2), \quad v_i^2 = \frac{\sigma_i^2(t_{\text{exp}}) - \sigma_i^2(0)}{4t_{\text{exp}}^2}. \quad (3.26)$$

Da diese Methode in der gekreuzten Dipolfalle verwendet werden soll, wo der transversale Einschluss vorwiegend durch den Wellenleiter bewirkt wird, wurde hierbei von einer Rotationssymmetrie um die x-Achse ausgegangen. Dabei wird ein kleiner Fehler in Kauf genommen, der jedoch nur durch gleichzeitige Beobachtung der Atome aus einer zweiten Richtung vermieden werden könnte. Aus der Temperatur und der maximalen Dichte in der Falle berechnet sich die maximale Phasenraumdichte der Wolke in der Falle zu

$$\mathcal{D} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\tilde{n}_0}{\sigma_z(0)} \cdot \lambda_{\text{dB}}^3(T). \quad (3.27)$$

Direkte Methode

Bei Kenntnis der Fallenparameter kann die Phasenraumdichte auch direkt aus der Dichteverteilung $\tilde{n}(x, z)$ in der Falle berechnet werden. Diese wird ebenfalls gemäß (3.25)

mit einer Gaußfunktion gefittet. Mit den Fallenfrequenzen $\omega_x = \omega_y$ und ω_z ergibt sich hieraus die Temperatur

$$T = \frac{m}{12k_B}(2\omega_x^2\sigma_x^2 + \omega_z^2\sigma_z^2) = \frac{\mu_B B'^2}{24k_B B_0}(2\sigma_x^2 + 8\sigma_z^2), \quad (3.28)$$

wobei die zweite Gleichung für die Magnetfalle gilt. Die Phasenraumdichte im Zentrum der Wolke ist dann

$$\mathcal{D} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\tilde{n}_0}{\sigma_x} \cdot \lambda_{\text{dB}}^3(T). \quad (3.29)$$

Bei diesen Gleichungen wurde von einer Rotationsymmetrie um die z-Achse ausgegangen, da die direkte Methode für Messungen der Phasenraumdichte in der Magnetfalle verwendet werden soll.

3.4 Bose-Einstein-Kondensation

Das Bose-Einstein-Kondensat dient uns in den Dispersionsmanagement-Experimenten als Quelle makroskopisch beobachtbarer, kohärenter Materiewellen. Für die Soliton-Experimente ist darüberhinaus die signifikante interatomare Wechselwirkung in dem Kondensat eine notwendige Voraussetzung. Die Erzeugung des BECs erfolgt mit Hilfe verschiedener Laserkühlverfahren und durch Evaporationskühlung in der Magnetfalle und in der optischen Dipolfalle.

3.4.1 Prinzip der Evaporationskühlung

Die konsequente Anwendung von Evaporationskühlung auf Atomwolken, die mit Laserkühlverfahren vorgekühlt wurden, brachte bei den ersten Experimenten zur Bose-Einstein-Kondensation den Durchbruch [9, 10]. Evaporationskühlung basiert auf der bevorzugten Entfernung der energiereichsten Atome aus einer Falle und der darauffolgenden Rethermalisierung durch elastische („gute“) Stöße. Dadurch wird die mittlere Energie pro Atom verringert, d.h. das Gas gekühlt. Als Abschneideenergie E_t bezeichnet man die Energie, oberhalb der die Atome aus der Wolke entfernt werden. Wird E_t während des Evaporationsprozesses konstant gehalten, spricht man von „plain evaporation“, bei kontinuierlicher Verringerung von E_t hingegen von „forced evaporation“. Bei dem zweiten Verfahren ist jedoch darauf zu achten, dass die Verringerung von E_t langsam genug erfolgt, um eine ausreichende Rethermalisierung der Atome zu gewährleisten, und schnell genug, um die Verluste aufgrund der endlichen Lebensdauer der Atome in der Falle gering zu halten. Diese Verluste entstehen im UHV vor allem durch inelastische („schlechte“) Stöße der Atome in der Falle. In sehr vielen Experimenten zur Bose-Einstein-Kondensation wird ^{87}Rb eingesetzt, da es u.a. ein besonders günstiges Verhältnis von „guten“ zu „schlechten“ Stößen besitzt. Überblicke über Evaporationskühlung sind in [74, 75] gegeben.

3.4.2 Vorkühlung und Magnetfalle

Zu Beginn eines jeden Experimentlaufes wird die MOT mit einem kontinuierlichen Atomstrahl aus dem Funnel für typischerweise 15–30s geladen. Die MOT wird dann komprimiert und die Temperatur der Atome durch Polarisationsgradientenkühlung weiter verringert. Details und experimentelle Parameter hierzu sind in [76, 35] dokumentiert.

Laden der Magnetfalle

Durch resonante σ^+ -Lichtpulse (Übergang $F=2 \rightarrow F'=3$) werden die Atome nach der Polarisationsgradientenkühlung in den Zustand $|F=2, m_F=2\rangle$ gepumpt, der in der Magnetfalle (MT) gefangen werden soll. Die später in die Magnetfalle umgeladene Atomzahl hängt von der Gesamtenergie des Pumpimpulses ab. Für reproduzierbare Ausgangsbedingungen für den weiteren Ablauf des Experimentes sind jedoch konstante Atomzahlen in der MT notwendig. Aus diesem Grund wurde eine Stabilisierung der Gesamtenergie des Pumpimpulses mit Hilfe einer elektronischen Schaltung implementiert. Diese integriert die auf einer Monitor-Fotodiode auftreffende optische Leistung auf und schaltet den Pumpimpuls bei Erreichen einer vorgegebenen Gesamtenergie ab.

Schließlich wird die Magnetfalle unter Beachtung von „mode matching“ [40] angeschaltet ($B' = 72 \text{ G/cm}$, $B_0 = 23 \text{ G}$).

Evaporation in der Magnetfalle

In einer harmonischen Falle befinden sich energiereichere Atome mit größerer Wahrscheinlichkeit am Rand der Falle als energieärmere Atome. Verdampfungskühlung kann daher experimentell umgesetzt werden, indem Atome am Rand der Falle entfernt werden. In der TOP-Falle stehen dazu „circle of death“ (COD)-Evaporation und Radiofrequenz (Rf)-Evaporation als Verfahren zur Verfügung. Bis einschließlich zu den Experimenten zum Dispersionsmanagement wurden bei uns beide Verfahren eingesetzt. Es zeigte sich jedoch, dass auf die Rf-Evaporation zugunsten eines schnelleren Experimentablaufes verzichtet werden kann. Daher soll hier nur die COD-Evaporation beschrieben werden.

Die COD-Evaporation wird in unserem Experiment als „forced evaporation“ betrieben. Der Radius $r_D = B_0/B'$ des „circle of death“ wird durch Reduktion des Biasfeldes B_0 kontinuierlich verringert. Auf dem COD führen Majorana-Übergänge (siehe Abschnitt „Magnetfalle“, S. 26) in nicht gefangene m_F -Zustände dabei zu einer bevorzugten Entfernung der energiereichsten Atome aus der Falle. Die Reduktion des Biasfeldes bewirkt gleichzeitig eine Erhöhung der Fallenfrequenzen und damit der Dichte und der Stoßrate.

3.4.3 Optische Dipolfalle und Kondensation

Im Gegensatz zu früheren Experimenten [35] fand die eigentliche Kondensation bei allen in dieser Arbeit vorgestellten Experimenten nicht mehr in der Magnetfalle, sondern in der optischen Dipolfalle statt.

Transfer in die optische Dipolfalle

Die Atomwolke wird dazu bei einer typischen Phasenraumdichte $\mathcal{D} \simeq 3 \cdot 10^{-2}$ von der Magnetfalle in die gekreuzte optische Dipolfalle umgeladen, die Wellenleiter und Haltestrahl zusammen bilden. Das Umladen findet in zwei Phasen statt: In der ersten Phase wird die Dipolfalle mit einer linearen Intensitätsrampe innerhalb von typischerweise 500 ms angeschaltet. In der zweiten Phase wird dann die Magnetfalle innerhalb von 300 ms abgeschaltet.

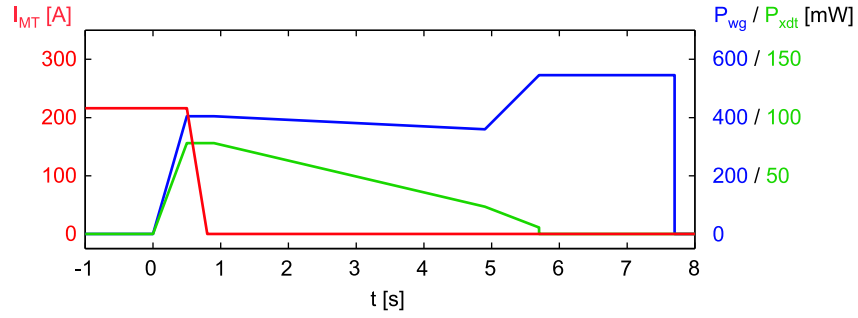


Abbildung 3.6: Umlade- und Kondensations-Sequenz: Gezeigt ist der Verlauf des Magnetfallenstroms (rot) und der Leistungen in den Strahlen der optischen Dipolfalle (blau: Wellenleiter, grün: Haltestrahl). Thermische Atome werden bei einer typischen Phasenraumdicke $\mathcal{D} \simeq 3 \cdot 10^{-2}$ von der Magnetfalle in die optische Dipolfalle umgeladen. Dort wird der Quanten-Phasenübergang zum BEC durch kontinuierliche Reduktion der Potentialtiefe („forced evaporation“) erzielt. Nach Abschluss der Kondensation werden die Einzelpotentiale auf die für die eigentlichen Experimente jeweils benötigten Werte gerampt.

Abbildung 3.6 zeigt einen typischen Verlauf des Magnetfallenstroms und der Intensitäten der Fallenstrahlen. Der Einfluß des Gravitationspotentials auf das Magnetfallenpotential wurde bereits in Abschnitt 3.1.1 kurz besprochen. Die rechnerisch erwartete Fallenfrequenz ν_z und Falltiefe ΔV_{WG} des optischen Wellenleiterpotentials unter Einwirkung der Schwerkraft sind in Abb. 3.7 in Abhängigkeit von der Strahlintensität dargestellt. Dabei wurde die gemessene Strahltaile $W_{WG} = 60(5) \mu\text{m}$ zugrunde gelegt und die Abschwächung des Strahls durch Reflexionsverluste beim Eintritt in die Glaszelle berücksichtigt. Die gepunkteten grünen Linien zeigen zum Vergleich die erwarteten Verläufe bei Vernachlässigung der Gravitation. Experimentell wurden Fallenfrequenzen (Sterne) durch Anregung transversaler Dipolschwingungen kleiner Amplitude von Kondensaten im Wellenleiter bestimmt. Die Messwerte können bis auf 2 Hz genau angegeben werden, liegen aber systematisch um ein Vielfaches dieser Unsicherheit unterhalb der theoretischen Erwartung. Der genaue Grund für diese Diskrepanz konnte bisher noch nicht ermittelt werden, da weder die Messungenauigkeit bei der Bestimmung der Strahltaile noch die Unsicherheit von $< 2 \text{ mm}$ in der longitudinalen Position des Fokusses eine solche Diskrepanz erklären könnten. Als weitere Möglichkeit kommt noch eine fehlerhafte Eichung des Powermeters in Betracht. Dies konnte jedoch leider nicht mehr überprüft werden. Zur Auswertung der Experimente wurden daher die jeweils experimentell bestimmten Fallenfrequenzen verwendet. Die theoretisch erwartete effektive Gesamt-Potentialtiefe für den Einschluss in vertikaler Richtung ist bei gutem Überlapp von Wellenleiter und Haltestrahl aus der Summe $\Delta V = \Delta V_{WG} + \Delta V_{XDT}$ der Tiefen der beiden Einzelpotentiale gegeben. Die Falltiefe längs des Wellenleiters ist hingegen im wesentlichen durch die Intensität des Haltestrahls alleine bestimmt.

Die Positionen der Magnetfalle und der aus Wellenleiter und Haltestrahl gebildeten Dipolfalle wurden überlappt und nach Erreichen der Kondensation auf maximale Atomzahl im Kondensat hin optimiert. Die Ausdehnung der Atomwolke in der Magnetfalle direkt vor dem Umladen beträgt typischerweise $\sigma_x = 80 \mu\text{m}$ und $\sigma_z = 29 \mu\text{m}$. Bei dem eingestellten Magnetfeld ($B' = 195 \text{ G/cm}$, $B_0 = 22 \text{ G}$) entspricht dies einer Temperatur $T = 660 \text{ nK}$. Aus der gemessenen Atomzahl $N = 9.6 \cdot 10^5$ ergibt sich damit eine Pha-

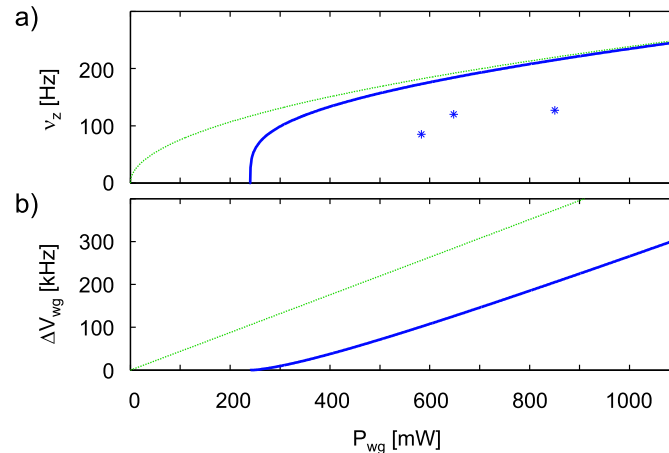


Abbildung 3.7: Einfluß des Gravitationspotentials auf den Wellenleiter mit Strahltaile $W_{\text{wg}} = 60 \mu\text{m}$. In Blau dargestellt sind die effektive Frequenz (a) und die Falltiefe (b) in vertikaler Richtung in Abhängigkeit von der optischen Leistung des Wellenleiter-Strahls. Die gepunkteten grünen Linien zeigen den Verlauf der Frequenz bzw. der Falltiefe ohne Gravitationsfeld. Die große Diskrepanz zwischen Theorie (blaue Linie) und Messungen (Sterne) macht bei den Experimenten eine direkte Eichung der Fallenfrequenzen durch Untersuchung der Schwingung eines Kondensates in der jeweiligen Falle notwendig.

senraumdicke $\mathcal{D} = 3 \cdot 10^{-2}$. Die mittels Time-of-Flight gemessene Phasenraumdicke 150 ms nach dem Abschalten der Magnetfalle beträgt typischerweise $\mathcal{D} = 2 \cdot 10^{-1}$, ist also ca. eine Größenordnung größer als vor dem Umladeprozess. Der Anstieg der Phasenraumdicke ist hierbei mit einer deutlichen Reduktion der Wolkengröße verbunden, während die Temperatur leicht ansteigt und die Atomzahl von typischerweise $9 \cdot 10^5$ auf typischerweise $3 \cdot 10^5$ reduziert wird.

Kondensation in der optischen Dipolfalle

Zur weiteren Erhöhung der Phasenraumdicke nach dem Umladen können COD- und Rf-Evaporation nicht verwendet werden, da im optischen Potential alle m_F -Zustände gefangen sind. Daher wird die weitere erzwungene Evaporation durch kontinuierliche Erniedrigung der Potentialtiefen der optischen Dipolfalle mittels einer Verringerung der Strahlleistungen realisiert. Einen typischen Verlauf der einzelnen Strahlleistungen zeigt Abb. 3.6. Experimentell hat sich gezeigt, dass Kondensation durch verschiedene Sequenzen erreichbar ist und nicht kritisch von den einzelnen Parametern abhängt. Sowohl bei Evaporation vorwiegend längs des Wellenleiters als auch bei Evaporation vorwiegend transversal zum Wellenleiter können sehr reproduzierbar Kondensate erzeugt werden. Nach Abschluß des Kondensationsprozesses werden die Strahlleistungen wieder auf Werte erhöht, die den für das jeweilige Experiment benötigten Fallenfrequenzen entsprechen.

Bis zur aktiven elektronischen Stabilisierung der Dipolstrahlleistungen (siehe Abschnitt 3.2.3) mussten die Amplituden der AOM-Steuersignale während des Experimentierens häufiger nachgestellt werden. Hauptursache dafür war eine trotz aller experimenteller Vorkehrungen schwankende Einkopplungseffizienz der Dipolfallen-Laserstrahlen in die Glasfasern. Das Problem wurde durch die aktive Stabilisierung behoben, so dass die

Kondensation nun äußerst reproduzierbar ist. Dies ermöglicht die routinemäßige Produktion von Kondensaten mit $2 \cdot 10^3$ – $1 \cdot 10^5$ Atomen und relativen Atomzahlfluktuationen, die bei sehr kleinen Kondensaten im Bereich von 20% und bei großen Kondensaten darunter liegen.

Signaturen der Bose-Einstein-Kondensation

Der Quanten-Phasenübergang zum Bose-Einstein-Kondensat geht mit einer Reihe charakteristischer Veränderungen einher. Ein wesentlicher Punkt dabei ist, dass sich bei der Kondensation in einer harmonischen Falle nicht nur die Impulsverteilung, sondern auch die Ortsverteilung stark ändert. Dies stellt einen wesentlichen Unterschied zur Bose-Einstein-Kondensation freier Teilchen dar und ermöglicht einen wesentlich einfacheren experimentellen Nachweis der Kondensation.

Für den Nachweis der makroskopischen Besetzung des Fallengrundzustands werden Time-of-flight-Bilder nach einer typischen Fallzeit von 15 ms aufgenommen. Dabei wird die Abschneideenergie E_t über die Tiefe V_{end} des optischen Potentials am Ende der Evaporationsrampe (siehe Abb. 3.6) langsam verringert. Die Kondensation zeigt sich dann durch einen plötzlichen Anstieg der optischen Dichte bei einem Wert V_{end}^0 . Für $V_{\text{end}} < V_{\text{end}}^0$ entstehen Kondensate mit einem abnehmenden thermischen Untergrund. Sie zeichnen sich durch eine bimodale Geschwindigkeitsverteilung und eine anisotrope Expansion aus. Für eine ausführlichere Diskussion dieser Methoden sei z.B. auf [40] verwiesen.

Kapitel 3 Experimentelles System

4 Dispersionsmanagement für Materiewellen

Das Zerfließen von Materiewellenpaketen aufgrund der Vakuum-Dispersionsrelation ist eines der herausragendsten Quantenphänomene und wird in fast jedem Quantenmechanik-Lehrbuch behandelt [57, 77]. Mit Hilfe von periodischen Potentials kann die Dispersionsrelation und damit die Dynamik des Wellenpaketes gezielt verändert werden. Dieser Ansatz entspricht dem Dispersionsmanagement für Lichtpulse in räumlich periodischen Brechungsindex-Strukturen [22, 23].

Erste Experimente in dieser Richtung wurden schon im Kontext von Blochoszillationen mit thermischen Atomen [78] und Kondensaten [34] unternommen. Die Modifikation der Schwingungsfrequenz der Dipolschwingungsmode eines Kondensates aufgrund der veränderten Dispersionsrelation in Anwesenheit eines periodischen Potentials wurde in einer Reihe anderer Experimente detailliert untersucht [79, 80]. Im Gegensatz zu diesen Experimenten, bei denen die Bewegung des Schwerpunktes studiert wurde, wird in diesem Kapitel die Entwicklung der Ortsverteilung der Atomwolke in einer quasi-eindimensionalen Situation untersucht. Die im Folgenden vorgestellten Experimente zeigen, dass die Dispersion und damit die Wellenpaket-Dynamik experimentell kontrolliert werden kann. Dies ist ein neues Werkzeug, das es erlaubt, das Wechselspiel von Dispersion und Atom-Atom-Wechselwirkung zu studieren. Erst hiermit wurde die Realisierung von atomaren Gap-Solitonen, die im folgenden Kapitel besprochen wird, möglich.

In den Abschnitten 2.1.1 und 2.1.2 wurden die theoretischen Grundlagen zu einem Testexperiment für Dispersionsmanagement von Materiewellen erläutert. Ausgangspunkt war ein Wellenpaket wechselwirkungsfreier Atome in einem eindimensionalen Wellenleiter. Das Wellenpaket sollte sich dabei transversal im Grundzustand befinden und die Näherung konstanter effektiver Masse erforderte für die Impulsbreite längs des Wellenleiters $\kappa_x \ll k_{\text{rec}}$. Um während experimentell verlässlich realisierbarer Propagationsdauern eine signifikante Verbreiterung des Wellenpaketes beobachten zu können, darf die Anfangsgröße $\sigma_x(0)$ nicht zu groß eingestellt werden. Für ein hinreichend gutes Signal-Rausch-Verhältnis in den Absorptionsbildern sollte zudem die Anfangsdichte (d.h. bei gegebener Größe der Atomwolke also die Anfangsatomzahl) nicht zu klein sein. Für typische experimentelle Werte ($N = 3 \cdot 10^3$ Atome, $\omega_{\perp} = 2\pi \cdot 85$ Hz, $\kappa_x = 0.2 k_{\text{rec}}$, $\sigma_x(0) = 30 \mu\text{m}$) ergibt sich dann rechnerisch eine Phasenraumdichte $\mathcal{D} = 937 \gg 2.61 = \mathcal{D}_c$. Unter der Annahme der Eindimensionalität ist ein solches Wellenpaket also nur als Bose-Einstein-Kondensat realisierbar. Die Wechselwirkung der Atome ist in diesem Fall nicht vernachlässigbar, sondern muss bei der Interpretation der experimentellen Ergebnisse berücksichtigt werden.

In Bereichen normaler Dispersion kann für dominierende Wechselwirkung und für kurze Propagationszeiten eine analytische Näherungsformel für die Breite $\sigma_x(t)$ aus der nichtlinearen Optik übernommen werden. In Bereichen anomaler Dispersion zeigt

ein Bose-Einstein-Kondensat jedoch Kollaps-Dynamik. Numerische 2D-Rechnungen zeigen, dass dieser Kollaps für unsere experimentelle Situation innerhalb der ersten 3–6 ms abläuft. Dies führt zu einer Anregung höherer transversaler Zustände und damit zu einem schnellen Abbau der Dichte, so dass die weitere Dynamik in guter Näherung linear ist.

4.1 Theoretisches Modell für Propagation im Bereich anomaler Dispersion

In einem Experiment (siehe Veröffentlichung, nächster Abschnitt) wurde die Anwendbarkeit der Näherung konstanter effektiver Masse in Abhängigkeit von der Modulationstiefe des periodischen Potentials untersucht. Dazu wurden anfänglich gaußförmige Wellenpakete an der Bandkante präpariert und deren Propagation im Wellenleiter über eine Dauer von 60 ms beobachtet.

Das lineare Modell aus Abschnitt 2.3.2 soll für ein sowohl qualitatives als auch quantitatives Verständnis auf diese Daten angewendet werden. Der anfängliche Kollaps des Wellenpaketes kann jedoch nicht durch eine lineare Theorie beschrieben werden. Deshalb wird als Anfangswellenpaket $\Psi_0(x)$ für die Simulation eine Gaußfunktion verwendet, die an die gemessene Dichteverteilung nach 20 ms Propagation gefittet wird. Die gefittete $1/e^2$ -Breite der Dichteverteilung sei mit σ_0 bezeichnet. Da dieses Wellenpaket aber nicht unschärfebegrenzt ist, wird im Ortsraum eine quadratische Phase hinzugefügt. Diese quadratische Phase ist so gewählt, dass die Fouriertransformierte des Wellenpaketes mit der gemessenen Breite κ_{mes} der in erster Näherung gaußförmigen (Quasi-) Impulsverteilung konsistent ist:

$$\Psi_0(x) = \left(\frac{2}{\pi\sigma_0^2} \right)^{1/4} u_{1,k_0}(x) \cdot \exp \left[-\frac{(x-x_0)^2}{\sigma_0^2} + ik_0(x-x_0) + i\frac{\alpha}{2}(x-x_0)^2 \right], \quad (4.1)$$

wobei die Krümmung α der quadratischen Phase gegeben ist durch

$$\alpha = -\frac{1}{\sigma_0^2} \sqrt{\kappa_{mes}^2 \sigma_0^2 - 4}. \quad (4.2)$$

Das Wellenpaket wird gemäß Gleichung (2.47) numerisch propagiert. Zum Vergleich wird für $E_1(k)$ einmal die volle Dispersionsrelation verwendet und einmal die effektive-Masse-Näherung $E_1(k) \approx \frac{\hbar(k-k_0)^2}{2m_{eff}}$. Die experimentellen Daten und die zu den numerischen Ergebnissen gehörenden Einhüllenden $A(x,t)$ sind in Abbildung 2(d-f) der Veröffentlichung, folgender Abschnitt dargestellt.

4.2 Veröffentlichung „Dispersion Management for Atomic Matter Waves“

In der Veröffentlichung „Dispersion Management for Atomic Matter Waves“ wird die Propagation eines Materiewellenpaketes in einem periodischen Potential untersucht. Die Experimente finden in einem eindimensionalen Wellenleiter statt und die Wellenpakete sind durch ^{87}Rb -Bose-Einstein-Kondensate realisiert. Die Untersuchungen konzentrieren sich dabei auf drei Aspekte:

4.2 Veröffentlichung „Dispersion Management for Atomic Matter Waves“

1. Ein erstes Experiment (siehe Fig. 1) stellt die experimentelle Umsetzung des in Abschnitt 2.1.1 theoretisch erläuterten Testexperiments für Dispersionsmanagement dar. Das Wellenpaket wird zunächst im Zentrum der Brillouinzone bei positiver effektiver Masse präpariert und expandiert im Ortsraum. Nach einer gewissen Propagationszeit wird es durch hinreichend langsame Beschleunigung des periodischen Potentials im Quasiimpulsraum adiabatisch an die Bandkante verschoben. Aufgrund der dort negativen effektiven Masse kehrt sich die Dispersionsdynamik um und das Wellenpaket komprimiert bis nahezu auf seine Anfangsgröße.
2. In einer zweiten Experimentreihe (siehe Fig. 2) wird die Anwendbarkeit der effektive-Masse-Näherung untersucht. Dazu wird die Propagation von Wellenpaketen an der Bandkante für verschiedene Modulationstiefen des periodischen Potentials beobachtet. Die veränderte Dispersionrelation führt im Laufe der Propagation zu einer Verzerrung der Wellenpaketform. Auf diese experimentellen Daten wird das im vorigen Abschnitt beschriebene lineare theoretische Modell angewendet.
3. Eine dritte Experimentreihe (siehe Fig. 3) befaßt sich schließlich mit einer systematischen Studie der maximalen und minimalen Gruppengeschwindigkeiten im untersten Energieband.

Dispersion Management for Atomic Matter Waves

B. Eiermann,¹ P. Treutlein,^{1,2} Th. Anker,¹ M. Albiez,¹ M. Taglieber,¹ K.-P. Marzlin,¹ and M. K. Oberthaler¹¹Fachbereich Physik, Universität Konstanz, Fach M696, 78457 Konstanz, Germany²Sektion Physik, Ludwig-Maximilians-Universität, Schellingstrasse 4, 80799 München, Germany

(Received 14 March 2003; published 8 August 2003)

We demonstrate the control of the dispersion of matter wave packets utilizing periodic potentials. This is analogous to the technique of dispersion management known in photon optics. Matter wave packets are realized by Bose-Einstein condensates of ⁸⁷Rb in an optical dipole potential acting as a one-dimensional waveguide. A weak optical lattice is used to control the dispersion relation of the matter waves during the propagation of the wave packets. The dynamics are observed in position space and interpreted using the concept of effective mass. By switching from positive to negative effective mass, the dynamics can be reversed. The breakdown of the approximation of constant, as well as experimental signatures of an infinite effective mass are studied.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.91.060402

PACS numbers: 03.75.Be, 03.75.Lm, 32.80.Pj

The broadening of particle wave packets due to the free space dispersion is one of the most prominent quantum phenomena cited in almost every textbook of quantum mechanics. The realization of Bose-Einstein condensates of dilute gases allows for the direct observation of wave packet dynamics in real space on a macroscopic scale [1]. Using periodic potentials it becomes feasible to experimentally study to what extent the matter wave dispersion relation can be engineered. This approach is similar to dispersion management for light pulses in spatially periodic refractive index structures [2].

First experiments in this direction have already been undertaken in the context of Bloch oscillations of thermal atoms [3] and condensates [4]. The modification of the dipole mode oscillation frequency of a condensate due to the changed dispersion relation in the presence of a periodic potential has been studied in detail [5,6]. In contrast to these experiments where the center of mass motion was studied, we are investigating the evolution of the spatial distribution of the atomic cloud in a quasi-one-dimensional situation. Our experiments show that the dispersion and thus the wave packet dynamics can be experimentally controlled. This is a new tool which also allows one to study the interplay between dispersion and atom-atom interaction and to realize predicted non-spreading wave packets such as gap solitons [7] and self-trapped states [8].

For atomic matter waves inside a one-dimensional optical waveguide, we have achieved dispersion management by applying a weak periodic potential with adjustable velocity. Figure 1 shows the results of an experiment in which the propagation of an atomic wave packet is studied in the normal [Fig. 1(b)] and anomalous [Fig. 1(c)] dispersion regime corresponding to positive and negative effective mass, respectively. A broadening of the wave packet is observed in both cases. The faster spreading in the case of anomalous dispersion is a consequence of the smaller absolute value of the negative effective mass. However, if we switch from one regime to

the other during the propagation by changing the velocity of the periodic potential, the effects of normal and anomalous dispersion cancel. The wave packet, which has initially broadened under the influence of normal dispersion, reverses its expansion and compresses until it regains its initial shape [Fig. 1(d)]. This is a direct proof of the realization of negative effective mass.

The wave packets have been realized with a ⁸⁷Rb Bose-Einstein condensate. The atoms are collected in a magneto-optical trap and subsequently loaded into a

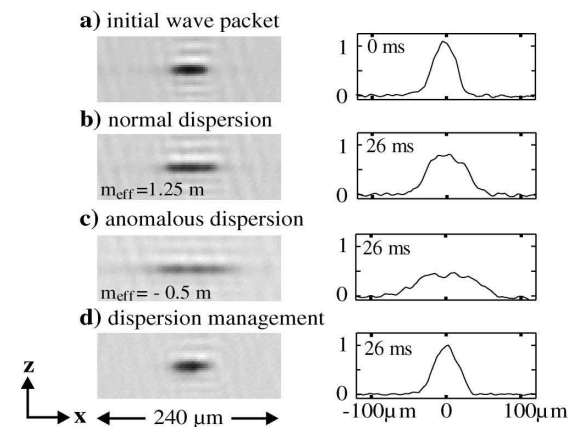


FIG. 1. Controlling the dispersion of an atomic wave packet in a waveguide using a periodic potential. Shown are absorption images of the wave packet averaged over four realizations (left) and the corresponding density distributions $n(x, t)$ along the waveguide (right). (a) Initial wave packet. (b),(c) Images taken after an overall propagation time of $t = 26$ ms for different dispersion regimes with different effective masses as indicated. (d) Wave packet subjected to dispersion management: an initial stage of expansion for $t = 17$ ms with normal dispersion is followed by propagation with anomalous dispersion for $t = 9$ ms. The broadening in the normal dispersion regime has been reversed by anomalous dispersion.

magnetic time-orbiting potential trap. By evaporative cooling we produce a cold atomic cloud which is then transferred into an optical dipole trap realized by two focused Nd:YAG laser beams with $60 \mu\text{m}$ waist crossing at the center of the magnetic trap. Further evaporative cooling is achieved by lowering the optical potential leading to pure Bose-Einstein condensates with up to 3×10^4 atoms in the $|F = 2, m_F = +2\rangle$ state. By switching off one dipole trap beam the atomic matter wave is released into a trap acting as a one-dimensional waveguide with radial trapping frequency $\omega_{\perp} = 2\pi \times 80 \text{ Hz}$ and longitudinal trapping frequency $\omega_{\parallel} = 2\pi \times 1.5 \text{ Hz}$.

The periodic potential is realized by a far off-resonant standing light wave with a single beam peak intensity of up to 5 W/cm^2 . The chosen detuning of 2 nm to the blue off the D2 line leads to a spontaneous emission rate below 1 Hz . The frequency and phase of the individual laser beams are controlled by acousto-optic modulators driven by a two channel arbitrary waveform generator allowing for full control of the velocity and amplitude of the periodic potential. The absolute value of the potential depth was calibrated independently by analyzing results on Bragg scattering [9] and Landau Zener tunneling [4,10].

The wave packet evolution inside the combined potential of the waveguide and the lattice is studied by taking absorption images of the atomic density distribution after a variable time delay. The density profiles along the waveguide, $n(x, t)$, are obtained by integrating the absorption images over the transverse dimension z .

The concept of effective mass m_{eff} [11] allows one to describe the dynamics of matter wave packets inside a periodic potential in a simple way via a modified dispersion relation. The periodic potential in our experiments is well described by

$$V(x) = \frac{V_0}{2} \cos(Gx)$$

with a modulation depth V_0 on the order of the grating recoil energy $E_G = \hbar^2 G^2 / 8m$, with $G = 2\pi/d$ where $d = 417 \text{ nm}$ represents the spatial period. The energy spectrum of atoms inside the periodic potential exhibits a band structure $E_n(q)$ which is a periodic function of quasimomentum q with periodicity G corresponding to the width of the first Brillouin zone [Fig. 2(a)]. In our experiment, we prepare condensates in the lowest energy band ($n = 0$) with a quasimomentum distribution $w(q)$ centered at $q = q_c$ with an rms width $\Delta q \ll G$ [12].

It has been shown by Steel *et al.* [13] that in this case the condensate wave function in a quasi-one-dimensional situation can be described by $\Psi(x, t) = A(x, t) \phi_{q_c}(x) \times \exp[-iE_0(q_c)t/\hbar]$, where ϕ_{q_c} represents the Bloch function in the lowest energy band corresponding to the central quasimomentum. The evolution of the envelope function $A(x, t)$, normalized to the total number of atoms N_0 , is described by

$$i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_g \frac{\partial}{\partial x} \right) A = - \frac{\hbar^2}{2m_{\text{eff}}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} A + \tilde{g}|A|^2 A. \quad (1)$$

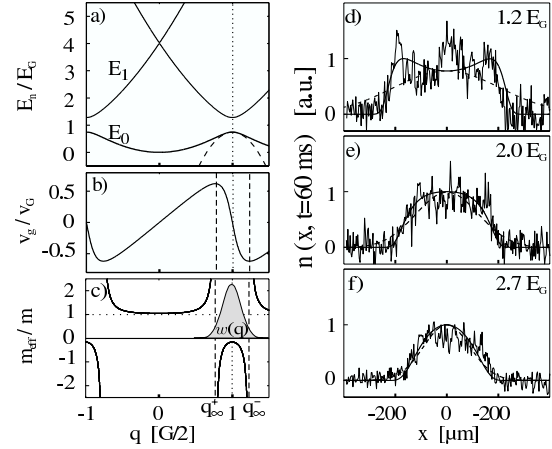


FIG. 2. (a) Band structure in the first Brillouin zone for atoms in an optical lattice with $V_0 = 1.2 E_G$ (solid), parabolic approximation to the lowest energy band at $q = G/2$ (dashed), corresponding group velocity (b), and effective mass (c) in the lowest energy band. The vertical dashed lines at $q = q_c$ and $q = q_{\infty}$ indicate where $|m_{\text{eff}}| = \infty$. (d)–(f) Spatial densities of the wave packet after $t = 60 \text{ ms}$ of propagation with $q_c = G/2$ for different V_0 . The position x along the waveguide is measured in the moving frame of the optical lattice. The solid lines represent the theoretical predictions using linear propagation with the exact band structure and the quasimomentum distribution given in graph (c). The dashed lines in graphs (d)–(f) represent the prediction of the constant effective mass approximation.

The strength of the atom-atom interaction is given by $\tilde{g} = \alpha_{nl} 2\hbar\omega_{\perp} a$, with the s -wave scattering length a , and a renormalization factor $\alpha_{nl} = (1/d) \int_0^d dx |\phi_{q_c}|^4$. Besides the modification of the nonlinear term the periodic potential leads to a group velocity of the envelope $A(x, t)$ determined by the energy band via $v_g(q_c) = \hbar^{-1} [\partial E_0(q) / \partial q]_{q_c}$ [Fig. 2(b)]. In addition, the kinetic energy term describing the dispersion of the wave packet is modified by the effective mass [Fig. 2(c)]

$$m_{\text{eff}}(q_c) = \hbar^2 \left[\frac{\partial^2 E_0(q)}{\partial q^2} \Big|_{q_c} \right]^{-1}.$$

Since this approximation of constant effective mass corresponds to a parabolic approximation of the energy band, it is valid only for sufficiently small Δq .

The general solution of Eq. (1) is a difficult task, but simple analytic expressions can be found in the special cases of negligible and dominating atom-atom interaction. Omitting the last term in Eq. (1) it is straightforward to see that $|m_{\text{eff}}|$ controls the magnitude of the dispersion term and thus the time scale of the wave packet broadening. A change in sign of m_{eff} corresponds to time reversal of the dynamics in a frame moving with velocity v_g . In the regime where the atom-atom interaction is dominating, e.g., during the initial expansion of a condensate, the evolution of the envelope function can be

found in standard nonlinear optics textbooks [2] and in the form of scaling solutions in the context of Bose-Einstein condensates [14]. Note that in this regime the kinetic energy term is still relevant and thus a change of the sign of the effective mass will reverse the dynamics.

In the following we will analyze the obtained experimental results in more detail. The initial wave packet shown in Fig. 1(a) contains 2×10^4 atoms and is characterized by $\Delta x_0 = 14.8(6) \mu\text{m}$ (Δx is the rms width of a Gaussian fit). Before releasing the atomic cloud into the one-dimensional waveguide, a weak periodic potential along the waveguide is adiabatically ramped up to $V_0 = 2.8(2) E_G$ within 6 ms. This turns the initial Gaussian momentum distribution of the atoms into a Gaussian distribution of quasimomenta $w(q)$ centered at $q_c = 0$ with a corresponding effective mass $m_{\text{eff}} = 1.25 m$. The density distribution shown in Fig. 1(b) is a result of propagation within the stationary periodic potential for $t = 26$ ms and exhibits a spread of $\delta x := \sqrt{\Delta x(t)^2 - \Delta x_0^2} = 18.4(12) \mu\text{m}$ in contrast to $\delta x_f = 20.2(14) \mu\text{m}$ for expansion without periodic potential. The resulting ratio $\delta x_f / \delta x = 1.10(15)$ indicates that the evolution is dominated by the nonlinearity, in which case one expects $\delta x_f / \delta x \approx \sqrt{m_{\text{eff}} / m} = 1.11$ in the short-time limit [15]. In the case of linear propagation one expects $\delta x_f / \delta x = m_{\text{eff}} / m = 1.25$.

The dynamics in the anomalous dispersion regime [Fig. 1(c)] are investigated by initially accelerating the periodic potential within 3 ms to a velocity $v = v_G := \hbar G / 2m$, thus preparing the atomic wave packet at the edge of the Brillouin zone ($q_c = G/2$), where $m_{\text{eff}} = -0.5 m$. The velocity is kept constant during the subsequent expansion. In the regime of negative mass a condensate exhibits collapse dynamics. Two-dimensional calculations for our experimental situation reveal that this collapse happens within the initial 3–6 ms of propagation. Subsequently this leads to an excitation of transverse states and thus to a fast reduction of the density and the nonlinearity. An indication of the population of transverse states is the observed increase of the transverse spatial extension of the wave packets by almost a factor of 2. The optical resolution of our setup does not allow for a quantitative analysis of the transverse broadening. Because of the fast reduction of the nonlinearity the subsequent expansion should be well described by linear theory predicting a ratio $\delta x_f / \delta x = 0.5$ which is close to the observed value $0.46(5)$ [$\delta x = 38.5(15) \mu\text{m}$ after 23 ms].

In the case of dispersion management Fig. 1(d) the wave packet was first subjected to normal dispersion for 17 ms at $q_c = 0$. The time of subsequent propagation with anomalous dispersion at $q_c = G/2$ was adjusted to achieve the minimal wave packet size of $\Delta x = 15.4(2) \mu\text{m}$. The minimum was achieved for times ranging from 7 to 9 ms which is in rough agreement with the

expected time resulting from effective mass considerations $\sqrt{0.5/1.25} \times 17 \text{ ms} = 10.7 \text{ ms}$.

Since the assumption of a constant effective mass used so far is only an approximation, it is important to check its applicability in experiments. Therefore we investigate the dynamics of wave packets prepared at the Brillouin zone edge for different potential depths. The observed density profiles after 60 ms of propagation are shown in Figs. 2(d)–2(f). While both the initial wave packet shape $n(x, 0)$ and the quasimomentum distribution $w(q)$ are measured to be approximately Gaussian, the wave packet changes its shape during evolution. We attribute this distortion to the invalidity of the constant effective mass approximation, which assumes that the populated quasimomenta experience the same negative curvature of $E_0(q)$. Since the range of quasimomenta fulfilling this criterion becomes smaller with decreasing modulation depth, a more pronounced distortion of the wave packet shape for weak potentials is expected [see Fig. 2(d)].

This explanation is confirmed more quantitatively by comparing the observed wave packets with the results of a linear theory. Since the initial collapse of the condensate cannot be described by a linear theory, we take a Gaussian function fitted to the density distribution measured at 20 ms as the initial wave packet for the numerical propagation. Because of the fact that this is not a minimum uncertainty wave packet we add a quadratic phase in real space such that the Fourier transform of the wave packet is consistent with the measured momentum distribution. In first approximation this takes into account the initial expansion including the repulsive atom-atom interaction. For the subsequent propagation of 40 ms in quasimomentum space we use the full expression for $E_0(q)$ which is obtained numerically. In Fig. 2(d)–2(f) we compare the data with the linear theory described above (solid line) and with the constant effective mass approximation (dashed line). Clearly the constant effective mass approximation cannot explain the observed distortion and it strongly overestimates the expansion velocity for weak potentials. Additionally, for small potential modulation depths new features appear in the central part of the wave packet which cannot be explained using the linear theory. We are currently investigating these features in more detail.

The observed distortion is mainly a consequence of another very interesting feature of the band structure: the existence of $|m_{\text{eff}}| = \infty$ for certain quasimomenta $q = q_{\infty}^{\pm}$ [see Fig. 2(c)]. A diverging mass implies that the group velocity is extremal and the dispersion vanishes as can be seen from Eq. (1). As a consequence an atomic ensemble whose quasimomentum distribution is overlapping $q = q_{\infty}^{\pm}$ will develop steep edges as can be seen in Fig. 2(d) and in Fig. 3. These edges propagate with the maximum group velocity of the lowest band.

The systematic investigation of the velocities of the edges is shown in Fig. 3 for different values of V_0 . In order to get a significant overlap of $w(q)$ with $q = q_{\infty}^{\pm}$, we

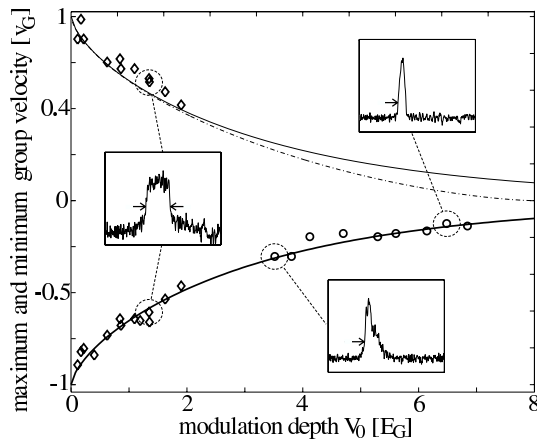


FIG. 3. Group velocities of steep edges emerging from an initial wave packet with significant overlap with q_{∞}^{\pm} in quasimomentum space. The measured velocities of the indicated positions (arrows in insets) agree very well with the expected maximum and minimum velocity in the lowest band (solid line) corresponding to the infinite masses. The dashed line represents the prediction of the weak potential approximation [11]. For potentials smaller than $2 E_G$ (diamonds) data are obtained by preparing the initial wave packet at $q = G/2$ leading to two steep edges (see inset). For higher potentials (circles) the wave packet is prepared at $q = G/4$ to ensure population of the quasimomentum corresponding to infinite mass.

prepare atomic ensembles with $\Delta q = 0.17 G/2$ at $q_c = G/2$ realized by Bose-Einstein condensates of 2×10^4 atoms with a spatial extension of $\Delta x = 15 \mu\text{m}$. The velocities of the edges are derived from two images taken at 20 and 60 ms, respectively. In each image the position of the edge is evaluated at the levels indicated by the arrows in the insets of Fig. 3 (50% and 25% of the maximum density). Since the momentum spread is too small to populate the infinite mass points for potentials deeper than $2 E_G$ the atomic ensemble was then prepared at $q_c = G/4$. The resulting wave packet shapes are asymmetric exhibiting a steep edge on one side which becomes less pronounced for potentials deeper than $5 E_G$. The obtained experimental results in Fig. 3 are in excellent agreement with the numerically calculated band structure predictions. In contrast to the good agreement of the maximum velocity for all potential depths we find that for $V_0 > 5 E_G$ the group velocity of the center of mass is only 10% of the expected velocity. This could be an indication of entering the tight binding regime where the nonlinear effect of self-trapping, i.e., stopping and nonspreading wave packets, has been predicted [8]. We are currently investigating the transport properties in this regime in more detail.

In conclusion, we have demonstrated experimentally that the dispersion of atomic matter waves in a waveguide can be controlled using a weak periodic potential. Matter wave packets with positive, negative, and infinite effective

masses are studied in the regime of weak and intermediate potential heights. The preparation of matter waves with engineered dispersion ($m_{\text{eff}} < 0$) is an important prerequisite for the experimental investigation of atomic gap solitons and other effects arising from the coherent interplay of nonlinearity and dispersion in periodic potentials.

We wish to thank J. Mlynek for his generous support, A. Sizmann and B. Brezger for many stimulating discussions, and J. Bellanca and K. Forberich for their help in building up the experiment. This work was supported by Deutsche Forschungsgemeinschaft, Emmy Noether Program, and by the European Union, Contract No. HPRN-CT-2000-00125.

Note added.—Only recently, we became aware of an experimental work [16] which is closely related to the work presented in this Letter.

- [1] *Bose-Einstein Condensation in Atomic Gases*, edited by M. Inguscio, S. Stringari, and C. Wieman (IOS Press, Amsterdam, 1999).
- [2] G. P. Agrawal, *Applications of Nonlinear Fiber Optics* (Academic Press, San Diego, 2001); *Nonlinear Fiber Optics* (Academic Press, San Diego, 1995).
- [3] M. Ben Dahan, E. Peik, J. Reichel, Y. Castin, and C. Salomon, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4508 (1996).
- [4] B. P. Anderson and M. A. Kasevich, *Science* **282**, 1686 (1998); O. Morsch, J. Müller, M. Cristiani, D. Ciampini, and E. Arimondo, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 140402 (2001).
- [5] S. Burger, F.S. Cataliotti, C. Fort, F. Minardi, M. Inguscio, M. L. Chiofalo, and M. P. Tosi, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 4447 (2001).
- [6] M. Krämer, L. Pitaevskii, and S. Stringari, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 180404 (2002).
- [7] P. Meystre, *Atom Optics* (Springer-Verlag, New York, 2001), p. 205, and references therein.
- [8] A. Trombettoni and A. Smerzi, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 2353 (2001).
- [9] M. Kozuma, L. Deng, E.W. Hagley, J. Wen, R. Lutwak, K. Helmerson, S.L. Rolston, and W.D. Phillips, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 871 (1999).
- [10] C.F. Bharucha, K.W. Madison, P.R. Morrow, S.R. Wilkinson, Bala Sundaram, and M.G. Raizen, *Phys. Rev. A* **55**, R857 (1997).
- [11] N. Ashcroft and N. Mermin, *Solid State Physics* (Saunders, Philadelphia, 1976).
- [12] J. Hecker-Denschlag, J.E. Simsarian, H. Häffner, C. McKenzie, A. Browaeys, D. Cho, K. Helmerson, S.L. Rolston, and W.D. Phillips, *J. Phys. B* **35**, 3095 (2002), and references therein.
- [13] M. Steel and W. Zhang, cond-mat/9810284.
- [14] Y. Castin, and R. Dum, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 5315 (1996); Yu. Kagan, E.L. Surkov, and G.V. Shlyapnikov, *Phys. Rev. A* **54**, R1753 (1996).
- [15] M.J. Potasek, G.P. Agrawal, and S.C. Pinault, *J. Opt. Soc. Am. B* **3**, 205 (1986).
- [16] L. Fallani, F.S. Cataliotti, J. Catani, C. Fort, M. Modugno, M. Zawada, and M. Inguscio, cond-mat/0303626.

Kapitel 4 Dispersionsmanagement für Materiewellen

5 Atomares Gap-Soliton

Nicht zerfließende lokalisierte Wellenpakete, helle Solitonen, sind ein besonders eindrucksvolles Beispiel für nichtlineare Wellendynamik. Sie treten in so unterschiedlichen Feldern wie der Physik, der Biologie, der Ozeanographie und der modernen Telekommunikation auf. Fundamentale Solitonen können sich nur dann bilden, wenn nichtlineare und lineare Dynamik einander kompensieren (siehe Abschnitt 2.2.2).

Für Materiewellen wurden helle Solitonen für attraktive Wechselwirkung [24, 25] und dunkle Solitonen für repulsive Wechselwirkung [26, 27] bereits demonstriert. In einem periodischen Potential liegt aufgrund der veränderten Dispersionsrelation jedoch eine andere Situation vor und die Bildung von Gap-Solitonen [81] und diskreten Solitonen [54] wurde theoretisch vorhergesagt. Optische Gap-Solitonen in selbstfokussierenden Medien wurden unter Verwendung von Strukturen mit periodisch moduliertem Brechungsindex bereits realisiert [53]. Die Dynamik eines Bose-Einstein-Kondensats mit repulsiver Atom-Atom-Wechselwirkung entspricht hingegen der Lichtausbreitung in einem selbstdefokussierenden Medium. In diesem Kapitel wird nun die erste experimentelle Demonstration von hellen atomaren Gap-Solitonen für repulsive Wechselwirkung vorgestellt.

Im ersten Abschnitt werden die Voraussetzungen zur Erzeugung eines solchen atomaren Gap-Solitons und die damit verbundenen experimentellen Schwierigkeiten, sowie deren Lösung diskutiert. Zwei Punkte waren dabei besonders entscheidend: Erstens die Eliminierung transversaler Schwingungen des Wellenpaketes im Wellenleiter durch einen grundlegenden Umbau der optischen Potentiale und zweitens die Erzeugung reiner Kondensate mit sehr kleiner Atomzahl mittels Bragg-Beugung. Im darauffolgenden Abschnitt werden die Eigenschaften des beobachteten Gap-Solitons systematisch untersucht. Dabei zeigt sich eine hervorragende Übereinstimmung mit den theoretischen Erwartungen. Nach einem kurzen Abschnitt über Solitonen höherer Ordnungen wird schließlich ein Vorschlag zur Untersuchung von Soliton-Kollisionen vorgestellt. Im Rahmen dieser Diplomarbeit wurden die hierfür benötigten optischen Potentiale, sowie das eingesetzte Diodenlasersystem aufgebaut und für erste Vorexperimente genutzt.

5.1 Experimentelle Realisierung

Die Realisierung heller Solitonen bei repulsiver Atom-Atom-Wechselwirkung, wie sie in dem verwendeten ^{87}Rb -Bose-Einstein-Kondensat auftritt, ist nur bei anomaler Materiewellen-Dispersion möglich. Diese wird in unserem Experiment durch die in Abschnitt 2.1 theoretisch erläuterte und in Kapitel 4 experimentell untersuchte Technik des Dispersionsmanagements für Materiewellen mittels schwacher periodischer Potentiale realisiert.

5.1.1 Voraussetzungen

In Kapitel 2 wurde die Strategie zur Erzeugung atomarer Gap-Solitonen in einem schwachen periodischen Potential von einem theoretischen Standpunkt her erläutert. Aus praktischer Sicht stellt der vorgestellte Ansatz folgende essentielle Anforderungen an das Experiment:

1. Das Wellenpaket muß adiabatisch im Quasiimpulsraum an den Rand der Brillouinzone präpariert werden. Dass dies möglich ist, wurde schon in den Experimenten zum Dispersionsmanagement in Kapitel 4 gezeigt.
2. Die Breite des Wellenpaketes im Quasiimpulsraum κ muß wesentlich kleiner sein als die Breite der Brillouinzone $G = 2k_{\text{rec}}$. Nur dann ist die Beschreibung durch eine konstante effektive Masse eine gute Näherung. Diese Bedingung impliziert eine räumliche Ausdehnung σ_0 des Wellenpaketes über viele Perioden d des periodischen Potentials. Mit einer typischen Anfangs-Wellenpaketgröße $\sigma_0 = 14 \mu\text{m}$ ist diese Bedingung im Experiment gut erfüllt.
3. Das Wellenpaket darf keine signifikante Beschleunigung längs des Wellenleiters durch ein longitudinales Potential erfahren. Für ein Wellenpaket an der Bandkante übersetzt sich die Forderung $|k(t) - k_0| \ll G$ in die Bedingung $t \ll \omega_{\parallel}^{-1}$. Bei einer typischen longitudinalen Fallenfrequenz $\omega_{\parallel} = 2\pi \cdot 0.5 \text{ Hz}$ beschränkt dies die Beobachtungszeit auf einige zehn Millisekunden.
4. Die transversalen Freiheitsgrade des Wellenpaketes müssen für Solitonen der gesuchten einfachen Form 2.39 ausgefroren sein, so dass die Dynamik auf die Dimension längs des Wellenleiters beschränkt ist. Es sei angemerkt, dass die Existenz nicht-zerfließender Wellenpakete auch in zweidimensionalen periodischen Potentialen vorhergesagt wurde [82], diese unterscheiden sich jedoch qualitativ von den in dieser Arbeit untersuchten eindimensionalen Gap-Solitonen. Dynamische Eindimensionalität in einem eindimensionalen Wellenleiter erfordert gemäß (2.32) eine hinreichend niedrige lineare Dichte des Wellenpaketes. Für typische experimentelle Parameter ist dann auch die Bedingung (2.36) für die Beschränkung der Dynamik auf das unterste Energieband erfüllt.
5. Für die Bildung eines fundamentalen Solitons müssen nach der Solitonbedingung (2.41) reproduzierbar Kondensate mit wenigen hundert Atomen erzeugt werden können. Zur Erfüllung der Solitonbedingung wären zwar auch größere Atomzahlen bei kleineren Anfangsbreiten möglich, jedoch würde dies zu höheren linearen Dichten und damit zu einer Verletzung der Bedingung für Eindimensionalität führen.

Diese Bedingungen schränken den prinzipiell realisierbaren Parameterbereich ein und begrenzen die mögliche Beobachtungsdauer. Gleichzeitig stellen sie hohe Ansprüche an die experimentelle Umsetzung. Auf die Entwicklung eines Schemas zu Kondensation in der gekreuzten Dipolfalle und auf die aktive Stabilisierung der Fallenpotentiale wurde schon in Kapitel 3 eingegangen. Weitere wichtige Maßnahmen und Techniken werden in den folgenden Abschnitten besprochen.

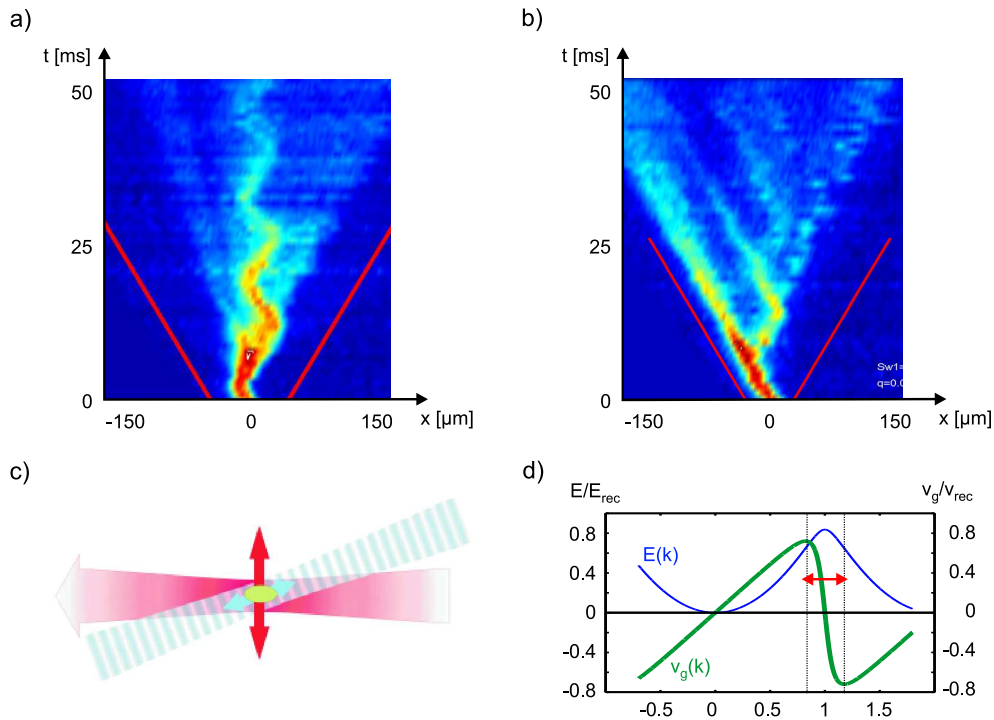


Abbildung 5.1: Auswirkungen transversaler Schwingungen im Wellenleiter auf die Dynamik längs des Wellenleiters. a),b) Zeitreihen, die aus Schnitten längs des Wellenleiters durch 52 Einzelaufnahmen zusammengesetzt und im Bezugssystem des periodischen Potentials dargestellt sind. Durch transversale Anregungen entsteht eine nahezu harmonische Schwingung im Quasiimpulsraum, die zu der abgebildeten charakteristischen Sägezahn-Bewegung des Wellenpaketes führt. Die Dispersion ist dabei aufgrund einer im zeitlichen Mittel betragslich sehr großen effektiven Masse stark unterdrückt. Die eingetragenen roten Linien entsprechen den extremalen Gruppengeschwindigkeiten im untersten Band. Für a) wurde eine Präparation $0 \rightarrow 1.5 k_{\text{rec}} \rightarrow k_{\text{rec}}$ verwendet, für b) die übliche Präparation $0 \rightarrow k_{\text{rec}}$. c) Aufgrund des Winkels $\alpha = 21^\circ$ zwischen Wellenleiter und optischer Stehwelle wird beim Präparationsprozess eine transversale Schwingung angeregt. Diese Schwingung im Ortsraum verursacht ihrerseits die Schwingung im Quasiimpulsraum. d) Energie und Gruppengeschwindigkeit in Abhängigkeit des Quasiimpulses.

5.1.2 Transversale Schwingungen

Schon bei den ersten Versuchen zur Realisierung eines atomaren Gap-Solitons zeigten sich auch für lange Propagationszeiten lokalisierte Peaks in der Dichteverteilung. Allerdings stimmten die Positionen dieser Peaks nicht mit der Erwartung aus der Theorie für Solitonen überein, aufgrund der sie bezüglich der optischen Stehwelle ruhen sollten. Bei einer detaillierteren Untersuchung der Dynamik zeigte sich, dass die genaue Form der auftretenden Strukturen vom Verlauf der jeweils verwendeten Präparationssequenz abhängig ist und nicht nur von der Position im Quasiimpulsraum am Ende der Präparation. Allen beobachteten Dynamiken ist jedoch gemeinsam, dass ein oder mehrere Peaks in der Dichteverteilung entstehen, deren Dispersion stark unterdrückt ist und die im Ortsraum Sägezahn-Bewegungen mit Gruppengeschwindigkeiten nahe der extremalen Gruppengeschwindigkeiten im untersten Band durchführen.

Als Beispiel ist in Abb. 5.1 a ein besonders einfacher zeitlicher Verlauf abgebildet. Dieser entsteht auf sehr reproduzierbare Weise bei einer Präparationssequenz, bei der das Wellenpaket im Quasiimpulsraum adiabatisch zunächst auf $1.5 k_{\text{rec}}$ präpariert und dann ohne Zeitunterbrechung wieder an den Brillouinzone-Rand bei k_{rec} zurückverschoben wird. Bei den zeitlichen Verläufen für die übliche direkte Präparation an die Bandkante treten zusätzlich zu der Sägezahn-Struktur noch Aufspaltungen des Wellenpaketes auf (siehe Abb. 5.1 b). Tiefere Ursache für den Sägezahn-Verlauf ist eine transversale Schwingung des Wellenpaketes im Wellenleiter, die während der Präparation angeregt wird. Die Aufspaltung entsteht hingegen durch Mitwirkung nichtlinearer Effekte.

Abb. 5.1 c zeigt den Wellenleiter und das durch die optische Stehwelle gebildete periodische Potential. Zum damaligen Zeitpunkt waren der Wellenleiter und die Stehwelle nicht kollinear, sondern schlossen aus Platzgründen einen Winkel $\alpha = 21^\circ$ ein. Dieser Winkel ist für die Anregung der transversalen Schwingung während des Präparationsprozesses und damit für die oben beschriebenen Phänomene verantwortlich. Die Zusammenhänge werden im Folgenden näher erläutert.

Für die Präparation des Wellenpaketes bei einem bestimmten Quasiimpuls wird das periodische Potential adiabatisch auf die entsprechende Geschwindigkeit beschleunigt (siehe Abschnitt 2.1.2). Selbstverständlich muss dabei die aufgrund des Winkels α veränderte Periodizität $d_{\text{sw}}^{(\text{WG})} = \frac{d_{\text{sw}}}{\cos \alpha} = \frac{\lambda_{\text{sw}}/2}{\cos \alpha}$ längs des Wellenleiters berücksichtigt werden. Die Verstimmung der beiden Stehwellenstrahlen wird während der Präparation also adiabatisch von $\Delta\omega = 0$ auf $\Delta\omega = \frac{4\hbar k_{\perp}^2}{2m} \cos^2 \alpha$ erhöht. Für die weitere Propagationszeit bleibt die Verstimmung konstant auf diesem Wert.

Die exakte Dynamik des Systems während und nach der Präparation ist durch das Zusammenwirken des periodischen Potentials und des transversalen Wellenleiterpotentials bestimmt. Die vollständigen Bewegungsgleichungen sind nicht exakt analytisch lösbar, sondern können nur in einer 2D-Simulation numerisch integriert werden. Qualitativ kann die Dynamik aber folgendermaßen verstanden werden: Längs der Stehwelle erfahren die Atome die entsprechende veränderte Dispersionsrelation mit einer Bandstruktur, wohingegen senkrecht dazu die quadratische Dispersionsrelation freier Teilchen gilt. Während des Präparationsprozesses erhält das Wellenpaket im Laborsystem eine Geschwindigkeit längs der Stehwelle und wird aufgrund des Winkels α daher transversal zum Wellenleiter ausgelenkt. Bei der weiteren Propagation führt das Wellenpaket dann im *Ortsraum* in senkrechter Richtung zum Wellenleiter eine in erster Näherung harmonische Schwingung mit der Frequenz ω_{\perp} des transversalen Wellenleiterpotentials aus. Aufgrund des Winkels α zwischen Wellenleiter und Stehwelle haben die entsprechenden Beschleunigungskräfte $F(t) = -m\omega_{\perp}^2 y(t)$ eine Komponente $F_{\text{sw}}(t) = F(t) \sin \alpha$ entlang der optischen Stehwelle. Diese Kräfte verursachen eine in erster Näherung harmonische Schwingung des Wellenpaketes im *Quasiimpulsraum*.

Bei entsprechender Amplitude hält sich das Wellenpaket bei der harmonischen Schwingung im Quasiimpulsraum jeweils lange bei den Umkehrpunkten auf und überstreift die dazwischenliegenden Quasiimpulse sehr schnell. In den Bereichen um die Punkte k_{∞}^{\pm} divergierender effektiver Massen im Quasiimpulsraum ändert sich die Gruppengeschwindigkeit nur recht langsam mit k , während sie sich im dazwischenliegenden Bereich um k_{rec} sehr schnell ändert (siehe Abb. 5.1 d). Liegen die Umkehrpunkte der Schwingung in den Bereichen um k_{∞}^{\pm} , so entsteht im Bezugssystem des periodischen Potentials längs des Wellenleiters gerade die beobachtete Sägezahn-Bewegung. Die Dispersion ist dabei

wegen der im zeitlichen Mittel betragslich sehr großen effektiven Masse stark unterdrückt.

Bei nichtverschwindender interatomarer Wechselwirkung können aufgrund der nichtlinearen Dynamik Aufspaltungen im Quasiimpulsraum auftreten [22] und entsprechende Aufspaltungen im Ortsraum bewirken. In Verbindung mit der oben beschriebenen Schwingung im Quasiimpulsraum können damit Strukturen wie in Abb. 5.1 b entstehen. Dies konnte trotz der Zweidimensionalität der Effekte zumindest qualitativ sogar schon durch 1D-Simulationen verifiziert werden.

Die beschriebenen transversalen Schwerpunkts-Schwingungen und die daraus resultierenden Probleme wurden durch einen grundlegenden Umbau der Optik um die Glaszelle behoben. Dieser Umbau erlaubte es, den Wellenleiter und die optische Stehwelle nun kollinear durch die Glaszelle zu führen. Für alle im Folgenden beschriebenen Experimente wurde dieser neue Aufbau verwendet.

5.1.3 Longitudinale Beschleunigungen

Neben Schwingungen im Quasiimpulsraum durch transversale Anregungen müssen auch Verschiebungen im Quasiimpulsraum durch die Gravitationskraft vermieden werden. Aus diesem Grund wird die Richtung des Wellenleiters während der Experimente so stabilisiert, dass sie stets senkrecht zum Gradienten des Gravitationspotentials steht. Die bei dieser Ausrichtung notwendige Genauigkeit hängt von der Stärke des periodischen Potentials ab, da sich der Bereich nahezu konstanter effektiver Masse mit steigender Modulationstiefe V_0 vergrößert. Für die typische Potentialstärke $V_0 = 0.7 E_{\text{rec}}$ ist m_{eff} am Brillouinonenrand lediglich über einen Bereich von $\pm 0.05 k_{\text{rec}}$ bis auf 50 % konstant. Um sicherzustellen, dass das Wellenpaket innerhalb einer typischen Propagationsdauer von 50 ms nicht aus diesem Bereich des Quasiimpulsraums hinausbeschleunigt wird, muss der Winkel zwischen Wellenleiter und Gravitationsgradient auf $30 \mu\text{rad}$ genau eingestellt und stabilisiert werden.

Praktisch kann die Richtung des Wellenleiters am einfachsten durch leichtes Kippen des gesamten optischen Tisches verändert werden. Der Verkippungswinkel wird dabei mit Hilfe einer Quadranten-Fotodiode überwacht, die an der Labordecke montiert ist und auf die ein bezüglich des optischen Tisches fixer Laserstrahl trifft. Die erstmalige korrekte Ausrichtung des Wellenleiters zum Gravitationspotential ist mit Hilfe der Propagation eines Wellenpaketes im Wellenleiter ohne periodisches Potential möglich. Die vertikale Richtung des Wellenleiters wird dabei so justiert, dass die Positionen der Wellenpaket-Schwerpunkte zu Beginn der Propagation und nach einer langen Propagationszeit (typischerweise 100 ms) übereinstimmen. Auch während der Experimente wurde mittels dieser Methode die korrekte Anzeige der Quadrantenfotodioden-Methode in regelmäßigen Abständen überprüft.

5.1.4 Eindimensionalität

Eine der wichtigsten Anforderung bei der Konstruktion unserer BEC-Apparatur war die Möglichkeit, mit ihrer Hilfe eindimensionale quantenmechanische Phänomene untersuchen zu können. Ein Kondensat wird dabei als eindimensional (oder genauer: quasi-eindimensional) bezeichnet, wenn die durch die interatomaren Wechselwirkungen verursachte nichtlineare Energie E_{NL} gegenüber der Anregungsenergie $\hbar\omega_{\perp}$ des harmonischen Potentials in transversaler Richtung vernachlässigbar ist. Dies legt gemäß (2.32) eine

obere Grenze für die lineare Dichte n_{1d} fest. Unterhalb dieser Dichte trägt im wesentlichen nur noch der Oszillator-Grundzustand zum transversalen Zustand des Kondensats bei, so dass die transversalen Freiheitsgrade ausgefroren sind. In diesem Abschnitt soll ein Experiment vorgestellt werden, bei dem sich der Übergang von einer dreidimensionalen Situation zu einer eindimensionalen Situation in einem charakteristischen Anstieg des Aspektverhältnisses des Kondensats nach freier ballistischer Expansion aus der Dipolfalle zeigt. Vor einer Vorstellung der experimentellen Ergebnisse wird im Folgenden die zu ihrem Verständnis notwendige Theorie kurz rekapituliert. Dabei wird zunächst auf das Kondensat in der Dipolfalle eingegangen und dann dessen freie Expansion nach Abschalten der Falle betrachtet.

Die lineare Dichte im Zentrum eines Kondensats in der Dipolfalle ergibt sich in Abhängigkeit von der Atomzahl und von den Fallenfrequenzen in 1D-Thomas-Fermi-Näherung zu

$$n_{1d,\max} = \left(\frac{3}{8}\right)^{2/3} \left(\frac{m\omega_{\parallel}^2}{a\hbar\omega_{\perp}}\right)^{1/3} N^{2/3}. \quad (5.1)$$

Bei gegebenen Fallenparametern lässt sich die Bedingung (2.32) an die lineare Dichte daher in eine Bedingung an die Atomzahl im Kondensat umformulieren:

$$N < N_{1d} = \frac{2}{3a} \left(\frac{2\hbar\omega_{\perp}}{m\omega_{\parallel}^2}\right)^{1/2}. \quad (5.2)$$

Bei größeren Atomzahlen wird neben dem axialen Zustand auch der transversale Zustand durch die Nichtlinearität verbreitert.

Im Limit sehr großer Atomzahlen eignet sich die 3D-Thomas-Fermi-Näherung (siehe Abschnitt „Berechnung des Grundzustandes“, S.14) zur Beschreibung des Kondensat-Grundzustands. Das Kondensat hat in dieser Näherung eine quadratische Dichteverteilung mit TF-Radien $R_{\text{TF},i}(0) \propto N^{1/5}/\omega_i(0)$. Die freie Expansion nach Abschalten der Falle kann im hier beschriebenen Grenzfall starker Nichtlinearität durch einen selbstkonsistenten Skalierungsansatz [83, 84] beschrieben werden. Dieser Ansatz stellt eine Verallgemeinerung der 3D-Thomas-Fermi-Näherung auf harmonische Potentiale mit zeitabhängigen Fallenfrequenzen dar. Das Kondensat expandiert selbstähnlich, wobei die Radien sich gemäß

$$R_{\text{TF},i}(t) = \lambda_i(t) R_{\text{TF},i}(0) \quad (5.3)$$

entwickeln. Die Dynamik ist also vollständig in den Skalierungsfaktoren $\lambda_i(t)$ enthalten. Die Zeitentwicklung der Skalierungsfaktoren ist durch folgendes Differentialgleichungssystem bestimmt:

$$\ddot{\lambda}_i = \frac{\omega_i^2(0)}{\lambda_i \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} - \omega_i^2(t) \lambda_i \quad (i = x, y, z). \quad (5.4)$$

Das Aspektverhältnis nach einer Fallzeit t

$$\frac{R_{\text{TF},z}(t)}{R_{\text{TF},x}(t)} = \frac{\lambda_z(t)}{\lambda_x(t)} \frac{R_{\text{TF},z}(0)}{R_{\text{TF},x}(0)} = \frac{\lambda_z(t)}{\lambda_x(t)} \frac{\omega_{\parallel}(0)}{\omega_{\perp}(0)} \quad (5.5)$$

ist in diesem Limit daher von der Atomzahl N unabhängig.

Der Übergang von einer 3D-Situation zu einer 1D-Situation durch Reduktion der Atomzahl geht dagegen mit einem Anstieg des Aspektverhältnisses einher: Bei großer

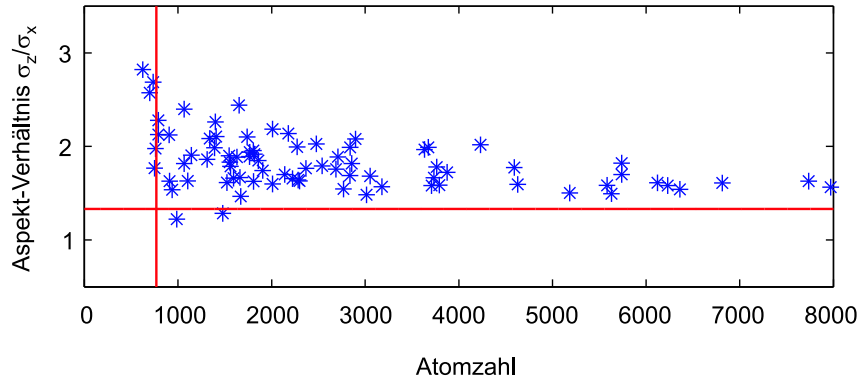


Abbildung 5.2: Übergang zur Eindimensionalität. Gezeigt ist das Aspekt-Verhältnis σ_z/σ_x nach einer freien Fallzeit von 15 ms aus einer Falle mit Fallenfrequenzen $\omega_\perp = 2\pi \cdot 97(3)$ Hz und $\omega_\parallel = 2\pi \cdot 22.5(5)$ Hz. Die charakteristischen Breiten σ_z und σ_x am Ende der Fallzeit sinken mit abnehmender Atomzahl aufgrund der nachlassenden interatomaren Abstoßung und der daraus resultierenden absinkenden Expansionsgeschwindigkeiten. Unterhalb einer bestimmten Atomzahl $N_{1d} = 771(21)$ (vertikaler roter Balken), die einer maximalen linearen Dichte $n_{1d} = \frac{1}{2a} = 87$ Atome/ μm entspricht, erreicht das Kondensat transversal den Grundzustand des harmonischen Oszillators. Die transversale Anfangsbreite und Expansionsgeschwindigkeit bleiben daher auch bei weiterer Reduktion der Atomzahl konstant, während die longitudinale Expansionsgeschwindigkeit zunächst weiter abnimmt. Dies zeigt sich experimentell in einem Anstieg des Aspekt-Verhältnisses. Der horizontale rote Balken markiert das in verallgemeinerter 3D-Thomas-Fermi-Näherung [83, 84] erwartete Aspekt-Verhältnis für große Atomzahlen.

Nichtlinearität ist die radiale Expansionsgeschwindigkeit durch die repulsive Wechselwirkung zwischen den Atomen dominiert. Beim Übergang zur Eindimensionalität beginnt hingegen die Impulsbreite $\Delta p = \hbar/\Delta z$ aufgrund der endlichen Ausdehnung Δz des transversalen Grundzustandes die entscheidende Rolle zu spielen. Die anfängliche transversale Ausdehnung des Kondensats und die radiale Expansionsgeschwindigkeit sind dann von N unabhängig, so dass auch für $\sigma_z(t)$ keine Atomzahlabhängigkeit erwartet wird. Die Ausdehnung längs des Wellenleiters und die axiale Expansionsgeschwindigkeit sinken hingegen mit abnehmender Atomzahl, so dass das Aspektverhältnis nach einer Fallzeit t entsprechend ansteigen sollte.

Abbildung 5.2 zeigt das Ergebnis einer solchen Expansionsmessung. In Rot dargestellt sind das nach (5.5) erwartete Aspektverhältnis für sehr große Atomzahlen und die nach (5.2) erwartete Atomzahl für den Übergang zur Eindimensionalität. Experimentell werden für diese Messung möglichst reine Kondensate mit 600–8000 Atomen durch Kondensation in der gekreuzten Dipolfalle erzeugt. Die Dipolfalle wird abrupt ausgeschaltet und das Kondensat nach 15 ms freier ballistischer Expansion abgebildet. Die $1/e^2$ -Breiten $\sigma_z(t)$ und $\sigma_x(t)$ der Dichteverteilungen werden aus Konsistenzgründen bei allen Wolken mit einer Gaußfunktion (3.25) gefittet. Die hieraus bestimmte Atomzahl $N = \frac{\pi}{2} \tilde{n}_0 \sigma_x \sigma_z$ wird verglichen mit derjenigen Atomzahl, die sich aus der direkten Summation der Pixelcounts im relevanten Bildausschnitt ergibt. Für die weitere Auswertung werden nur diejenigen Daten verwendet, bei denen die mit diesen beiden Methoden bestimmten Atomzahlen innerhalb von 10% Toleranz übereinstimmen. Durch diese Selektion, bei der weniger als 30% der Daten aussortiert werden, wird sichergestellt, dass

nur verlässliche Messungen in die Auswertung eingehen. Nach Berücksichtigung des optischen Auflösungsvermögens der Abbildung ergeben sich die in Abb. 5.2 dargestellten, korrigierten Aspektverhältnisse $\sigma_z(t)/\sigma_x(t)$. Die Ergebnisse sind in guter Übereinstimmung mit der Theorie und zeigen, dass bei diesen Experimenten der Übergang zum 1D-Regime erreicht wurde. Die starke Streuung der Messwerte bei kleinen Atomzahlen ist noch nicht im Detail verstanden. Sie könnte ihren Ursprung allerdings in der Anregung kollektiver Schwingungen des Kondensats haben. Es bleibt anzumerken, dass mit Hilfe eines Bragg-Pulses äußerst reproduzierbar auch Kondensate mit sehr viel kleineren Atomzahlen erzeugt werden können. Dies ermöglichte die Durchführung der weiter unten beschriebenen Solitonexperimente bei wesentlich geringerer linearer Dichte im tief eindimensionalen Regime.

5.1.5 Bragg-Puls

Der in Kapitel 3 beschriebene Aufbau erlaubt die reproduzierbare Erzeugung von Kondensaten mit ungefähr 3000 Atomen. Für solch hohe Atomzahlen ist mit unserem Aufbau die Bildung und Beobachtung heller Gap-Solitonen jedoch nicht möglich. Ein fundamentales Soliton mit 3000 Atomen müßte gemäß (2.41) sehr schmal sein, so dass im Zentrum des Solitons eine hohe lineare Dichte $n_{1d} = N/2x_0 \propto N^2$ entstünde und die Bedingung (2.32) der Eindimensionalität verletzt würde. Als Zahlenbeispiel ergibt sich für ein fundamentales Soliton mit 3000 Atomen und eine typische transversale Fallenfrequenz $\omega_{\perp} = 2\pi \cdot 85 \text{ Hz}$ eine lineare Dichte $n_{1d,\text{max}} = 2831/\mu\text{m} \approx 33 \cdot \frac{1}{2a}$ im Zentrum des Solitons. Für ein Soliton der Ordnung \mathcal{N} wäre bei gleicher Atomzahl N die lineare Dichte im Anfangspaket zwar um einen Faktor $1/\mathcal{N}^2$ niedriger, jedoch würden bei den periodischen Kompressionen des Solitons jeweils ebenfalls zu hohe lineare Dichten auftreten.

Aus diesem Grund wird noch vor Abschalten des Haltestrahls die Atomzahl im Anfangswellenpaket durch Bragg-Beugung reduziert [67]. Die Intensität und Dauer des Braggpulses werden so eingestellt, dass von den anfänglich 3000 Atomen nur 800(200) im Anfangswellenpaket verbleiben. Die Bragg-gebeugten Atome hingegen bewegen sich längs des Wellenleiters mit einer anfänglichen Gruppengeschwindigkeit von $2v_{\text{rec}}$ und verlassen innerhalb weniger Millisekunden den zentralen Bereich (Abb. 5.3 a). Im Vergleich zur Fallenfrequenz $\omega_{\parallel} \simeq 2\pi \cdot 15 \text{ Hz}$ in Richtung des Wellenleiters wird die Atomzahl im Anfangswellenpaket also schlagartig reduziert. Es entsteht daher ein Wellenpaket, dessen Breite durch die Breite eines entsprechenden Wellenpaketes mit 3000 Atomen festgelegt ist, das aber nur 800 Atome enthält. Das Wellenpaket befindet sich daher nicht in einem Gleichgewichtszustand, sondern erfährt bis zum Abschalten des Haltestrahls (typischerweise $200 \mu\text{s}$ nach dem Bragg-Puls) aufgrund der reduzierten Mean-Field-Energie nach innen gerichtete Kräfte. Diese führen zu einer anfänglichen Kompression des Wellenpaketes im Ortsraum, die dem dispersiven Zerfließen während des Präparationsprozesses entgegenwirkt. Abbildung 5.3 b zeigt bei typischen experimentellen Parametern in zwei verschiedenen Näherungen die Gleichgewichts-Dichteverteilungen für 3000 bzw. 800 Atome und die Ungleichgewichts-Dichteverteilung nach plötzlicher Reduktion der Atomzahl von 3000 auf 800 Atome.

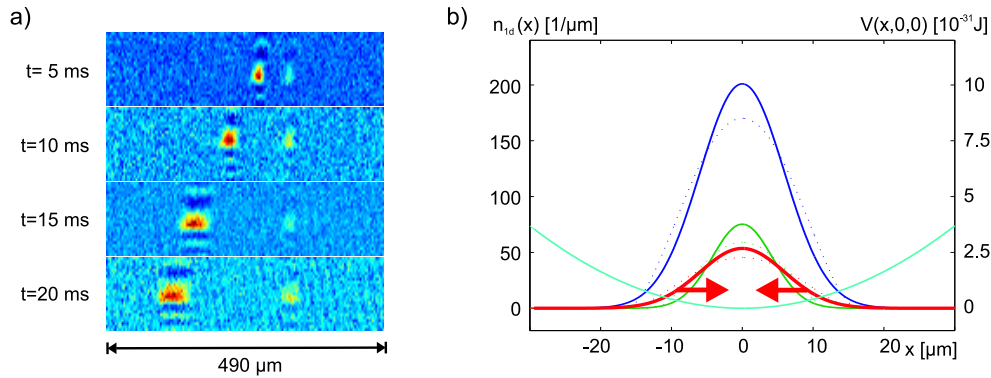


Abbildung 5.3: Realisierung kleiner Kondensate mittels eines Bragg-Pulses. a) Freie Expansion des Bragg-gebeugten und des ungebeugten Teils des Wellenpaketes im Wellenleiter. Die ober- und unterhalb der Kondensate sichtbaren Linien sind Abbildungsartefakte durch Beugung des Abbildungslichts an den Kondensaten. b) Berechnete Verteilungen der linearen Dichte bei typischen Fallenparametern $\omega_{\perp} = 2\pi \cdot 85 \text{ Hz}$ und $\omega_{\parallel} = 2\pi \cdot 12 \text{ Hz}$ für 3000 Atome (blau) und 800 Atome (grün). In rot ist die Dichteverteilung eines Wellenpaketes gezeigt, dessen Atomzahl abrupt von 3000 auf 800 Atome reduziert wurde. Aufgrund der verringerten Mean-Field-Energie führt dies zu nach innen gerichteten Kräften im Wellenpaket. Die durchgezogenen Linien repräsentieren die Näherung mittels effektiver Fallenfrequenzen, während die gepunkteten Linien die Dichteverteilungen in 3D-Thomas-Fermi-Näherung zeigen.

5.1.6 Demonstration des fundamentalen Solitons

Die experimentelle Erzeugung eines fundamentalen atomaren Gap-Solitons gliedert sich in folgende drei Teilschritte:

1. Evaporationskühlung in der aus Wellenleiter und Haltestrahl gebildeten gekreuzten Dipolfalle zur Herstellung eines Kondensats mit typischerweise 3000 Atomen.
2. Reduktion der Atomzahl auf typischerweise 800 Atome durch Bragg-Beugung.
3. Abschalten des Haltestrahls und Beschleunigung des periodischen Potentials auf v_{rec} zur Präparation des Wellenpaketes an der Bandkante.

Nach einer variablen Propagationszeit im Wellenleiter wird dann jeweils ein Absorptionbild des Solitons aufgenommen. Abbildung 5.4 zeigt die aus den Absorptionbildern berechneten Dichteverteilungen des beobachteten Solitons für verschiedene Propagationszeiten. Zur Verbesserung des Signal-Rausch-Verhältnisses sind die Daten in dieser Abbildung für jeden Zeitpunkt über 5 Bilder gemittelt. Die Einzelbilder wurden dabei zur Korrektur kleiner externer Störungen zum Teil um einige Pixel gegeneinander verschoben. Nach 15 ms Propagationszeit sind neben dem zentralen Teil des Wellenpaketes noch die Bragg-gebeugten Atome zu sehen. Für längere Propagationszeiten befinden sie sich bereits außerhalb des abgebildeten Bereichs. Nach ungefähr 20 ms bildet sich das Soliton als schmaler Peak mit ca. 350 Atomen im Zentrum des Wellenpaketes aus. Diese Zeit entspricht 5 Solitonperioden und ist damit konsistent mit der typischen Zeitskala für Solitonformation von ungefähr 3 Solitonperioden in der nichtlinearen Optik [23]. Während des Soliton-Bildungsprozesses werden überschüssige Atome vom zentralen Wellenpaket

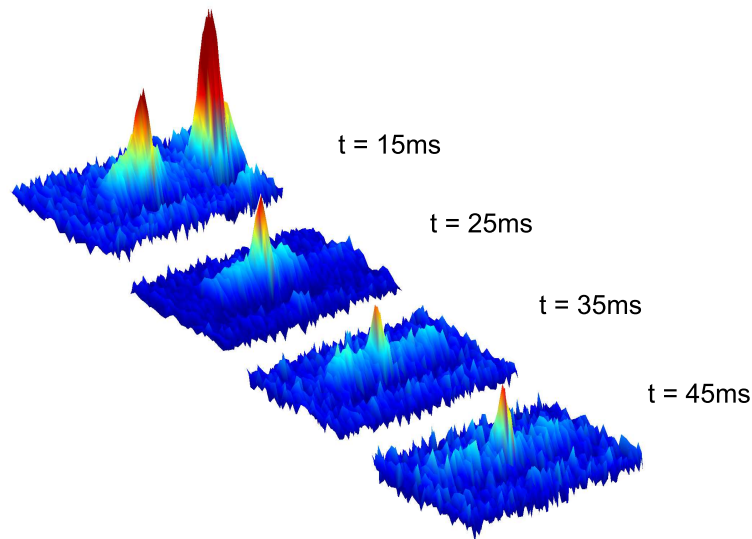


Abbildung 5.4: Erstes beobachtetes atomares Gap-Soliton.

abgestrahlt und bilden einen zerfließenden Hintergrund. Nach 45 ms Propagationsdauer ist die Dichte dieser abgestrahlten Atome unter das Detektionsniveau abgefallen und im Absorptionsbild ist nur noch das reine Soliton zu sehen. Es konnte für Zeiten bis zu 65 ms beobachtet werden. Aus der Zeitreihe ist gut zu erkennen, dass während der Propagation sowohl die Form als auch die Amplitude des Solitons erhalten bleiben.

5.2 Signaturen des fundamentalen Gap-Solitons

Atomare Gap-Solitonen zeichnen sich durch verschiedene Charakteristika aus, die experimentell untersucht werden können. In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse systematischer Checks für solitonisches Verhalten vorgestellt.

5.2.1 Gruppengeschwindigkeit und unterdrückte Dispersion

Die Erzeugung des Solitons an der Bandkante im Quasiimpulsraum impliziert, dass die Gruppengeschwindigkeit v_g verschwindet. Abbildung 5.5 a zeigt die Position des Solitons im Bezugssystem des periodischen Potentials in Abhängigkeit von der Propagationszeit. Jeder einzelne Punkt repräsentiert dabei das Ergebnis einer Realisierung. Die gepunkteten Linien markieren die Positionen, die der maximalen und der minimalen Gruppengeschwindigkeit im untersten Band entsprechen. Die Gruppengeschwindigkeit des beobachteten Solitons ist in sehr guter Übereinstimmung mit der Theorie klein gegenüber den extremalen Gruppengeschwindigkeiten.

Eine der wesentlichsten Eigenschaften eines Solitons ist die unterdrückte Dispersion. Mit unserem Aufbau ist es mit Hilfe des periodischen Potentials möglich, zwischen normaler und anomaler Dispersion und damit zwischen dispersivem und solitonischem Verhalten hin- und herzuwechseln. Die dramatischen Unterschiede in der Wellenpaketdynamik zeigt Abb. 5.5 b. Die offenen Kreise repräsentieren die Expansion eines kohärenten

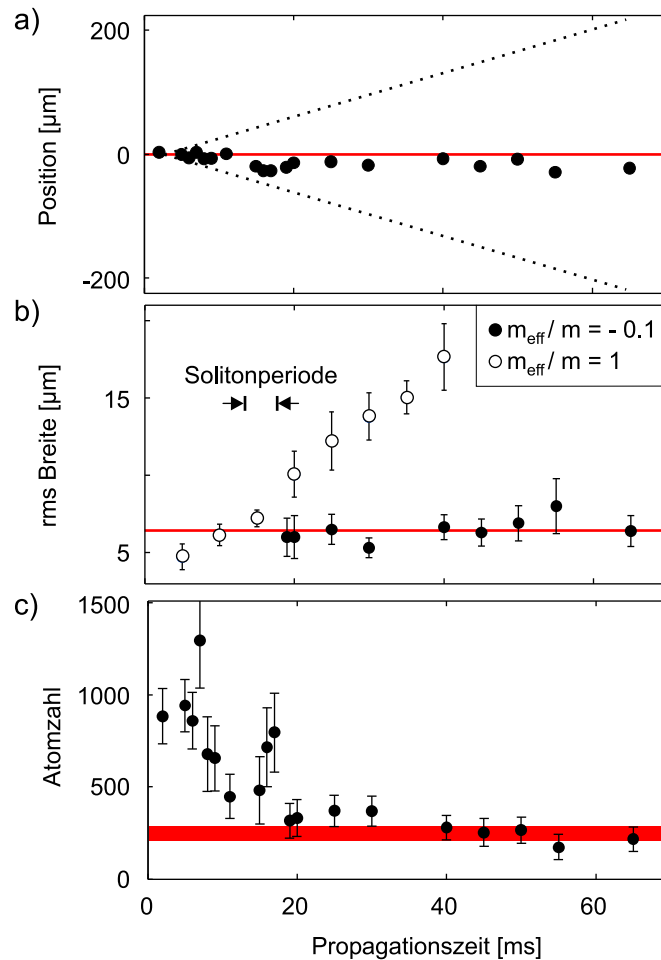


Abbildung 5.5: Charakteristische Merkmale des beobachteten atomaren Gap-Solitons. a) zeigt die Position des Solitons im Bezugssystem des periodischen Potentials und bestätigt, dass ein stehendes Gap-Soliton realisiert wurde. Die gepunkteten Linien markieren die Positionen, die der maximalen und der minimalen Gruppengeschwindigkeit im untersten Band entsprechen. b) Vergleich der Expansion im Regime positiver und negativer effektiver Masse für 200–300 Atome. Während das Soliton über einen Zeitraum von 50 ms (dies entspricht mehr als 10 Solitonperioden) überhaupt nicht zerfließt, expandiert das Wellenpaket im Regime normaler Massen signifikant. c) Atomzahl im zentralen Peak. Die anfängliche Atomzahl weist starke Schuss-zu-Schuss-Fluktuationen auf, die während des Soliton-Formationsprozesses reduziert werden. Der theoretisch erwartete Zusammenhang zwischen Atomzahl und Solitonbreite ist durch den roten Balken in Graph c) dargestellt, wobei der Mittelwert der gemessenen Breiten verwendet wurde, wie in Graph b) angedeutet. Alle beitragenden Parameter wurden dabei unabhängig gemessen.

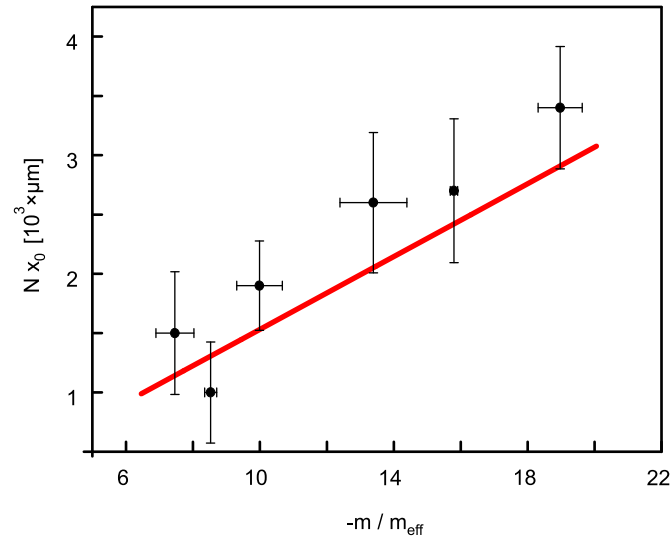


Abbildung 5.6: Skalierungseigenschaften eines atomaren Gap-Solitons. Die effektive Masse wurde experimentell durch Veränderung der Modulationstiefe des periodischen Potentials variiert. Die durch die Solitonbedingung (2.41) vorhergesagte Skalierung ist durch eine rote Linie dargestellt und in hervorragender Übereinstimmung mit den experimentellen Beobachtungen. Es sei betont, dass alle Parameter, die in die theoretische Vorhersage eingehen, unabhängig gemessen wurden.

Materiewellenpaketes mit 300 Atomen im Regime normaler Masse $m_{\text{eff}} = m$, während die Punkte die gemessenen Breiten des Wellenpaketes im Regime negativer effektiver Masse $m_{\text{eff}} = -0.1 m$ bezeichnen. In diesem Regime behält das Wellenpaket seine Breite für mehr als 10 Solitonperioden bei. Die Fehlerbalken der einzelnen Messwerte spiegeln die Fehler beim Fitten der Absorptionbilder mit Gaußfunktionen wider. Die mittlere Solitonbreite ergibt sich zu $x_0 = 6.5(10) \mu\text{m}$. Sie wurde aus dem Fit der optischen Dichteverteilung unter Berücksichtigung des optischen Auflösungsvermögens unserer Abbildung bestimmt.

Mit der transversalen Fallenfrequenz $\omega_{\perp} = 2\pi \cdot 85(2) \text{ Hz}$ berechnet sich die nach (2.41) erwartete Atomzahl im Soliton zu $N = 244(50)$ und ist in Abb. 5.5 c durch einen roten Balken dargestellt. Die Breite des Balkens repräsentiert die Unsicherheit in den Messwerten x_0 , ω_{\perp} und V_0 bzw. m_{eff} . Der beobachtete Zusammenhang zwischen Atomzahl und Solitonbreite ist in guter Übereinstimmung mit der theoretischen Vorhersage für ein helles Soliton. Die gemäß (2.41) gegenläufige Entwicklung von Atomzahl und Solitonbreite spiegelt sich auch in den Fluktuationen der Einzelmesswerte in Abb. 5.5 b,c wider.

5.2.2 Skalierungsverhalten

Als zusätzliche Kontrolle, dass es sich bei den erzeugten nicht-zerfließenden Wellenpaketen um Solitonen handelt, wurde eine weitere Messreihe durchgeführt. Dabei wurde mit Hilfe der Modulationstiefe des periodischen Potentials der Wert der effektiven Masse variiert und jeweils das Produkt Nx_0 aus Atomzahl und Solitonbreite bestimmt. Abbildung 5.6 zeigt den gesamten Bereich effektiver Massen, für die Solitonen beobachtet wurden.

Für kleinere Werte von $|m_{\text{eff}}|$, d.h. kleinere Modulationstiefen, erlaubt Landau-Zener-Tunneln keine saubere Präparation im Bereich negativer effektiver Masse. Für größere effektive Massen hingegen weicht das in unserem Experiment erreichbare Produkt Nx_0 für das Anfangswellenpaket zu stark von der Solitonbedingung (2.41) ab. Die experimentellen Ergebnisse sind in Abb. 5.6 dargestellt und bestätigen die theoretische Erwartung aus der Solitonbedingung.

Für jeden Datenpunkt in dem Graphen wurden je alle Einzel-Messpunkte innerhalb eines bestimmten Bereichs effektiver Massen (ca. 5 je Bereich) zusammengefaßt. Der Fehlerbalken in Abszissenrichtung gibt dabei die Standardabweichung der effektiven Massen der Messpunkte an, die zu dem jeweiligen Datenpunkt beitragen. Die Fehlerbalken in Ordinatenerichtung enthalten neben der analogen Standardabweichung aufgrund der Zusammenfassung mehrerer Messpunkte zu einem Datenpunkt auch die Unsicherheit bei der Bestimmung der Atomzahl und der Breite für jeden einzelnen Messpunkt.

Zusätzlich zu den in Abb. 5.6 dargestellten Ergebnissen zeigen unsere Daten, dass die Änderung des Skalierungsparameters Nx_0 durch eine Anpassung der Atomzahl dominiert wird, während die Solitonbreite nur eine schwache Abhängigkeit von der effektiven Masse aufweist.

An dieser Stelle sei noch einmal auf folgende, aus naiver Sicht überraschende Tatsache explizit hingewiesen: Im Kontext einer negativen effektiven Masse kann eine schnellere lineare Expansion durch eine stärkere *Abstoßung* der Atome ausgeglichen werden. Dies gilt bezüglich einer schnelleren linearen Expansion aufgrund einer kleineren effektiven Masse und aufgrund einer kleineren Anfangsbreite des Wellenpaketes gleichermaßen. Je kleiner ein fundamentales Soliton bei fester effektiver Masse ist, umso mehr Atome muß es enthalten, damit sich lineare und nichtlineare Effekte kompensieren können.

5.3 Solitonen höherer Ordnung

Die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Experimente haben sich auf die Untersuchung des fundamentalen Solitons konzentriert. Dieses zeichnet sich dadurch aus, dass sich die Effekte von Nichtlinearität und Dispersion bei der Dynamik exakt kompensieren. Bei einem Wellenpaket mit identischer Form der Dichteverteilung und gleicher Phase wie das fundamentale Soliton, jedoch größerer Atomzahl, überwiegt in der anfänglichen Dynamik hingegen die nichtlineare Energie. Dies führt zur Aufprägung einer quadratischen Phase im Ortsraum und damit zu einer Verbreiterung im Impulsraum. Aufgrund dieser Erhöhung der Impulsbreite trägt die Dispersion zunehmend zur Dynamik bei und wird schließlich zum dominanten Effekt. Bei anomaler Dispersion führt dies im Ortsraum zu einer Pulskompression, wodurch die Nichtlinearität wieder Oberhand gewinnt. Enthält das Anfangswellenpaket gerade \mathcal{N}^2 mal so viele Atome wie das entsprechende fundamentale Soliton, so kooperieren die beiden Effekte in einer Weise, die zu einer zeitlich periodischen Evolution führt (siehe Abb. 5.7 a für den Fall $\mathcal{N} = 2$ bzw. Abb. 2.6 c für $\mathcal{N} = 3$).

Durch Unterbrechung der Dynamik zum Zeitpunkt maximaler Kompression kann ein anfänglich unschärfebegrenztes Wellenpaket auf diese Weise komprimiert werden. Eine solche Kompression ist nur aufgrund des nichtlinearen Terms in der Bewegungsgleichung möglich. Im linearen Fall hingegen ist der Hamiltonoperator eines freien Teilchens diagonal, so dass die Impulsbreite erhalten bleibt. Die Unschärferelation verbietet dann die

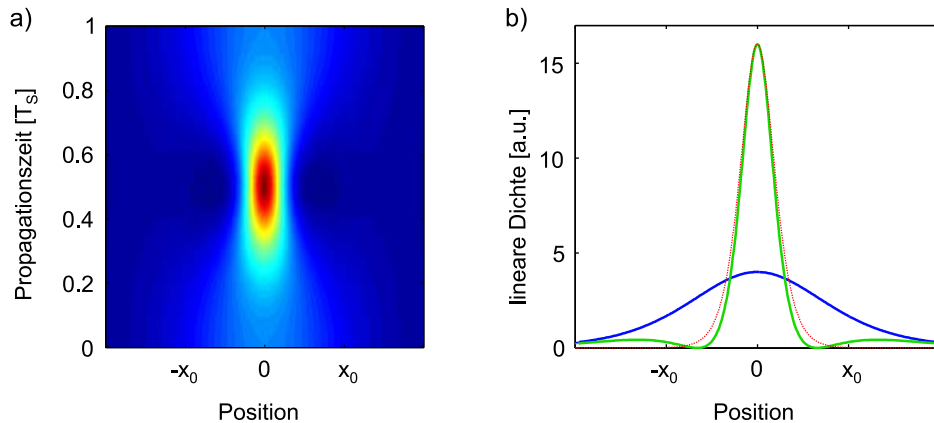


Abbildung 5.7: Soliton 2. Ordnung. a) Zeitreihe. Aufgetragen ist die lineare Dichte über der Position und der Zeit. Die nichtlineare Dynamik bewirkt eine periodische Oszillation der Breite des zentralen Peaks mit der Solitonperiode T_s . b) Gezeigt ist die lineare Dichte eines Solitons zweiter Ordnung mit N Atomen und einer Anfangsbreite x_0 für $t = 0$ (blau) und für den Moment der größten Kompression $t = T_s/2$ (grün). Die gepunktete rote Linie stellt zum Vergleich die lineare Dichte eines fundamentalen Solitons mit Atomzahl N und Breite $x_0/4$ dar.

Pulskompression eines anfänglich unschärfebegrenzten Wellenpaketes.

Im Experiment wurden bisher keine Solitonen höherer Ordnung beobachtet. Prinzipiell sollte dies jedoch möglich sein. Für ein Soliton der Ordnung \mathcal{N} besteht zwischen der Atomzahl N und der anfänglichen Solitongröße x_0 der Zusammenhang

$$Nx_0 = \mathcal{N}^2 \frac{\hbar}{m_{\text{eff}} \omega_{\perp} \alpha_{\text{NL}} a}, \quad (5.6)$$

wie in Abschnitt 2.2.2 erläutert wurde. Im dargestellten atomoptischen System müssen allerdings gleichzeitig auch die Voraussetzungen 1.–4. aus Abschnitt 5.1.1 erfüllt sein. Insbesondere die Bedingungen 2. (konstante effektive Masse) und 4. (Eindimensionalität) stellen dabei für Solitonen höherer Ordnung wegen der anfänglichen Impulsverbreiterung und der folgenden räumlichen Kompression eine Schwierigkeit dar. Die lineare Dichte im Zentrum eines Solitons der Ordnung $\mathcal{N} = 2$ beispielsweise erhöht sich bei der Kompression um den Faktor 4 gegenüber dem Anfangswellenpaket (siehe Abb. 5.7 und analytische Formel für ein Soliton 2. Ordnung in [22]). Damit die Bedingung der Eindimensionalität auch zum Zeitpunkt maximaler Kompression erfüllt ist, müssen daher Anfangswellenpakete mit extrem kleiner linearer Dichte verwendet werden. Aus diesem Grund sollte zur Erzeugung von Solitonen höherer Ordnung die Anpassung des Anfangswellenpaketes an die Solitonbedingung (5.6) im Vergleich zum fundamentalen Soliton nicht durch Erhöhung der Atomzahl, sondern durch Vergrößerung der Breite erfolgen. Die dabei auftretenden äußerst kleinen Dichten stellen dann allerdings extrem hohe Anforderungen an die numerische Apertur und optische Qualität der Abbildung, falls ein ausreichend gutes Signal-Rausch-Verhältnis erzielt werden soll. Noch entscheidender jedoch ist, dass die Solitonperiode T_s quadratisch mit der Anfangsbreite x_0 des Solitons skaliert. Wird statt eines fundamentalen Solitons ein Soliton 2. Ordnung durch Vervierfachung der Anfangsbreite und Beibehaltung der Atomzahl erzeugt, so ergibt sich daher eine erwartete typische Solitonperiode $T_s^{(2)} = 4^2 \cdot T_s^{(1)} = 64 \text{ ms}$. Dabei wurde von einer für unsere Experimente typischen Periode $T_s^{(1)} = 4 \text{ ms}$ des fundamentalen Solitons ausgegangen.

5.4 Vorschlag zur Untersuchung von Soliton-Kollisionen

Die Existenz von Solitonen beruht auf der Kompensation der Dispersion durch die dichteabhängige Wechselwirkung, die als Nichtlinearität in der Bewegungsgleichung auftritt. Dieselbe Wechselwirkung führt aber auch zu einer Kopplung zwischen räumlich überlappenden Wellenpaketen. Dies bewirkt, dass die Linearkombination zweier Lösungen der Gross-Pitaevskii-Gleichung im Allgemeinen keine Lösung dieser Bewegungsgleichung mehr darstellt. Das fundamentale Soliton nimmt in diesem Zusammenhang jedoch eine Sonderstellung ein: Zwei aufeinander zulaufende fundamentale Solitonen gleicher Amplitude und Phasenlage durchdringen einander, ohne dass dies eine Auswirkung auf deren Dichteverteilungen nach der Kollision hat. Bisher konnten solche Solitonkollisionen nur mit solitonischen Laserpulsen in der Glasfaser-Optik studiert werden. In diesem Abschnitt soll nun ein Vorschlag zur experimentellen Realisierung der Kollision zwischen atomaren Solitonen präsentiert werden. Die hierfür notwendigen Erweiterungen (siehe Abb. 3.5) der bestehenden Apparatur wurden bereits im Rahmen dieser Diplomarbeit aufgebaut und in ersten Vorexperimenten getestet.

5.4.1 Theorie

Die Wechselwirkung zwischen hellen Solitonen spielt bei der Telekommunikation mittels Lichtpulsen in Glasfasern eine wichtige Rolle, da hierdurch der Pulsabstand und damit die Übertragungsrate für störungsfreie Informationsübertragung begrenzt wird [22]. Sie stellt daher den Gegenstand verschiedener theoretischer Arbeiten dar, deren wichtigste Ergebnisse in diesem Abschnitt zusammengefasst werden sollen.

Die Wechselwirkung zwischen zwei Solitonen kann durch numerische Integration der nichtlinearen Schrödingergleichung studiert werden. Tiefere physikalische Einsicht erlaubt jedoch die Anwendung der inversen Streumethode auf das Problem [85]. Die Details dieser Methode sollen hier nicht diskutiert werden, jedoch gleicht sie von der Idee her der Lösung partieller Differentialgleichungen mittels der Fourier-Transformations-Methode. Studien, die mit dieser Methode durchgeführt wurden, zeigen, dass die Wechselwirkung nicht nur vom Abstand zwischen den beiden Solitonen, sondern auch sehr kritisch von der relativen Phase θ und der relativen Amplitude r abhängt.

Im Folgenden seien zwei Solitonen gleicher Amplitude ($r = 1$) betrachtet. Im Fall $\theta = 0$ entsteht dann eine attraktive Wechselwirkung zwischen den Solitonen, die zu der in Abb. 5.8 a dargestellten periodischen Dynamik führt. Die gezeigte Überlappung und Durchkreuzung gemeinsam propagierender Solitonen stellt den oben erwähnten Prozess dar, der eine Limitierung der Übertragungsrate in optischen Kommunikationssystemen bewirkt. Es zeigt sich jedoch, dass für $\theta \neq 0$ eine wesentlich höhere Übertragungsrate möglich wird. Dies liegt darin begründet, dass die Solitonwechselwirkung sich schon bei relativ kleinen Werten von θ von attraktiv nach repulsiv umkehrt. Abbildung 5.8 b zeigt als Beispiel die Dynamik eines Solitonen-Paares mit einer relativen Phase $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Die Soliton-Kollisionen aufgrund der in diesem Abschnitt beschriebenen Wechselwirkung zwischen zwei anfänglich deutlich separierten Solitonen finden auf einer Zeitskala statt, die äußerst lang ist gegenüber der Solitonperiode $T_s = \frac{\pi}{2}T_D$. Bei einer typischen Anfangsseparation von 10 Solitonenbreiten liegt die Oszillationsperiode für $\theta = 0$ und $r = 1$ im Bereich von $100 T_D \approx 64 T_s$ [86]. Ihre experimentelle Beobachtung erfordert somit die

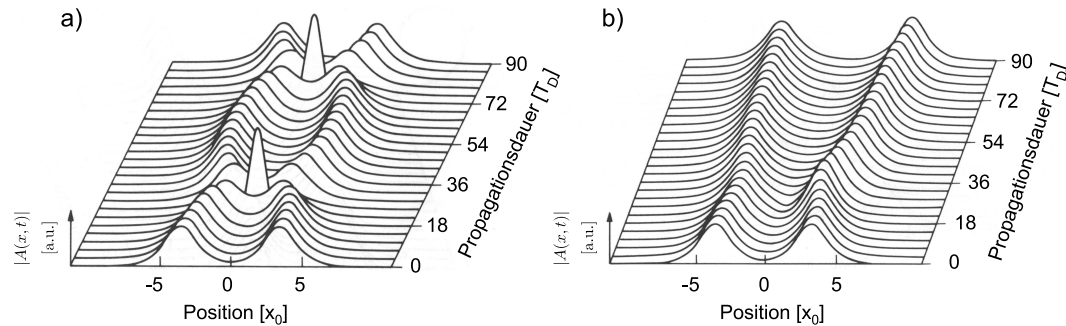


Abbildung 5.8: Wechselwirkung zwischen zwei überlappenden Solitonen aufgrund der Nicht-linearität. a) Bei einer relativen Phase $\theta = 0$ ziehen sich die beiden Solitonen an und es entsteht eine periodische Dynamik. b) Schon für relativ kleine Phasenverschiebungen (hier $\theta = \frac{\pi}{4}$) entsteht eine effektive Abstoßung.

Erzeugung von Solitonen, die über solch lange Zeitdauern stabil existieren, und ist daher für atomoptische Systeme sehr schwierig. Ein voraussichtlich leichter implementierbarer Ansatz zur Studie von Soliton-Kollisionen geht dagegen von Solitonen aus, die anfänglich durch ein externes Potential V_{acc} aufeinander zu beschleunigt wurden. Ein entsprechender Vorschlag zur experimentellen Umsetzung dieses Ansatzes mit unserer Apparatur wird im Abschnitt 5.4.3 vorgestellt und diskutiert.

5.4.2 Experimentelle Vorarbeiten

Eine notwendige Voraussetzung zur Untersuchung von Soliton-Kollisionen ist die reproduzierbare Erzeugung von zwei Solitonen. Unser Ansatz sieht hierfür analog zu der in Abschnitt 5.1 beschriebenen Erzeugung eines einzelnen Solitons folgende Schritte vor:

1. Simultane Erzeugung von zwei Kondensaten im Wellenleiter,
2. Reduktion der Atomzahl in den Kondensaten durch Bragg-Beugung,
3. Realisierung der Solitonen bei einer negativen effektiven Masse durch adiabatische Präparation der zwei Kondensate an die Bandkante in einem periodischen Potential.

Die Punkte 1. und 2. konnten bereits experimentell realisiert werden und sollen im Folgenden kurz erläutert werden.

Zur simultanen Erzeugung zweier Kondensate (im Folgenden als „Doppelkondensat“ bezeichnet) wird zusätzlich zur Dipolfalle ein periodisches Potential verwendet. Dieses wird realisiert durch den in Abb. 3.5 dargestellten Laserstrahl (im Folgenden „Stehwelle 2“), der die Glaszelle in nahezu vertikaler Richtung passiert und in sich zurückreflektiert wird. Aus einer Richtung parallel zur y -Achse betrachtet schließt die Strahlrichtung einen Winkel von ca. 89° mit der Richtung des Wellenleiters ein. In Verbindung mit der Dipolfalle entsteht dadurch längs des Wellenleiters effektiv ein Doppelmuldenpotential. Durch adiabatisches Hochrampen der Stehwelle 2 nach Erzeugung eines einzelnen Kondensats in der Dipolfalle kann dieses in zwei Dichtemaxima längs des Wellenleiters geteilt

5.4 Vorschlag zur Untersuchung von Soliton-Kollisionen

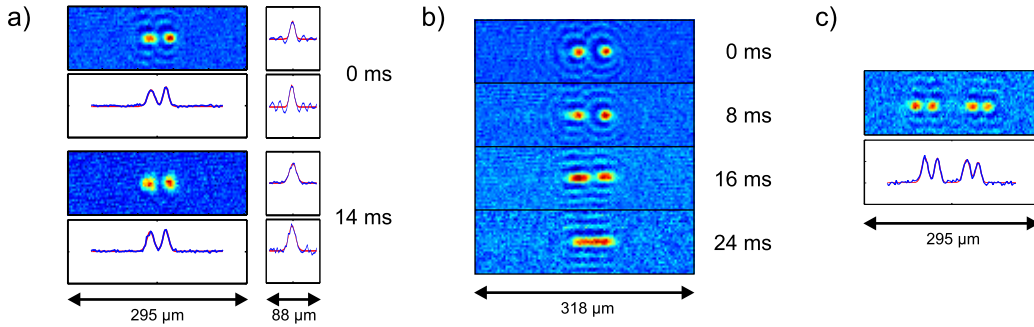


Abbildung 5.9: Doppelkondensate. a) Expansion im freien Fall nach Abschalten aller Fallenpotentiale. Gezeigt sind für $t = 0$ und $t = 14$ ms jeweils die Dichteverteilung und Schnitte in longitudinaler und transversaler Richtung durch die Kondensate. b) Expansion im Wellenleiter nach Abschalten des zur Erzeugung des Doppelkondensats verwendeten periodischen Potentials und des Haltestrahls. c) Kondensate im Wellenleiter 6 ms nach einem Bragg-Beugungs-Puls.

werden. Die relative Atomzahl in den beiden Dichtemaxima wird experimentell durch Justierung des Haltestrahls in der x-y-Ebene und damit Verschiebung der Anfangsposition des anfänglichen Einzelkondensats längs des Wellenleiters realisiert. Experimentell können damit sehr reproduzierbar Doppelkondensate mit typischerweise $N = 2 \times 1500$ Atomen hergestellt werden. Der Präparationsprozess dauert typischerweise einige 100 ms ab dem Einschalten der Stehwelle 2. Zur Unterdrückung der spontanen Emission muss daher auf einen präzisen Überlapp der Stehwellenstrahlen und eine gute spektrale Reinigung des Laserstrahls mittels der in Abb. 3.5 gezeigten geheizten Spektroskopiezelle geachtet werden.

Absorptionsbilder der ersten erzeugten Doppelkondensate sind in Abb. 5.9 dargestellt. Abbildung 5.9 a zeigt jeweils ein Doppelkondensat in der Dipolfalle und nach 14 ms freier ballistischer Expansion nach Abschalten aller Fallenpotentiale. Die Dichteverteilungen haben Gaußsche Form und lassen keinen thermischen Untergrund erkennen. Ein Fit der Schnitte durch die Dichteverteilungen mit einer Doppelgaußfunktion liefert in der Dipolfalle ($t_1 = 0$) die Breiten $\sigma_x = 15.9 \mu\text{m}$ (linkes Kondensat) bzw. $\sigma_x = 11.8 \mu\text{m}$ (rechtes Kondensat) und $\sigma_z = 8.2 \mu\text{m}$ bzw. $8.1 \mu\text{m}$. Nach $t_2 = 14$ ms freier ballistischer Expansion ergeben sich $\sigma_x = 15.6 \mu\text{m}$ bzw. $13.1 \mu\text{m}$ und $\sigma_z = 12.8 \mu\text{m}$ bzw. $12.3 \mu\text{m}$. Die aus diesen Daten und der optischen Dichte des Kondensats berechneten Atomzahlen liegen bei $N = 1.5(2) \cdot 10^3$. Aufgrund des optischen Auflösungsvermögens unserer Abbildung von $7.5(5) \mu\text{m}$ sind die tatsächlichen Größen allerdings kleiner. Insbesondere kann die Ausdehnung des Kondensats in der Dipolfalle in transversaler Richtung aufgrund der Unsicherheit in der Größe des Auflösungsvermögens nicht direkt aus dem entsprechenden Absorptionsbild bestimmt werden. Aus der Expansion in z-Richtung lässt sich unter Annahme einer Gaußschen Dichteverteilung und unter Vernachlässigung der interatomaren Wechselwirkungen jedoch eine untere Grenze für die Ausdehnung der Kondensate in z-Richtung in der Dipolfalle angeben. Es ergibt sich unter Berücksichtigung des optischen Auflösungsvermögens und mit (2.7) die Abschätzung $\sigma_z(0) \geq 2 \mu\text{m}$. Eine Einbeziehung der Effekte der Wechselwirkung würde hier nur zu einem größeren Wert führen. Die Abschätzung für $\sigma_z(0)$ muss mit der Ausdehnung $\sigma_{\perp} = \sqrt{2\hbar/m\omega_{\perp}} = 1.65 \mu\text{m}$ eines Wellenpaketes im transversalen Grundzustand des Wellenleiters mit einer typischen Fal-

lenfrequenz $\omega_{\perp} = 2\pi \cdot 85 \text{ Hz}$ verglichen werden. Die Differenz zwischen den beiden Werten kann der Verbreiterung der Dichteverteilung aufgrund der Atom-Atom-Wechselwirkungen zugeschrieben werden. Die so erzeugten Doppelkondensate sollten sich bei hinreichend kleiner linearer Dichte also durch die 1D-Gross-Pitaevskii-Gleichung beschreiben lassen und damit zur simultanen Erzeugung von zwei Solitonen („Doppelsoliton“) eignen. Abbildung 5.9 b zeigt zur Illustration die freie Expansion eines Doppelkondensats im Wellenleiter nach Abschalten der übrigen Fallenpotentiale. Es sei noch erwähnt, dass neben der oben erläuterten Sequenz zur Erzeugung von Doppelkondensaten auch mit einer anderen Sequenz experimentiert wurde, bei der die Stehwelle 2 schon während des Kondensationsprozesses eingeschaltet und damit in das Doppelmuldenpotential hineinkondensiert wurde.

Zur Reduktion der Atomzahlen kann auch beim Doppelkondensat Bragg-Beugung angewandt werden. Abbildung 5.9 c zeigt das Absorptionsbild eines Doppelkondensats 6 ms nach Anwendung eines Bragg-Pulses, mit dem ca. 50% der Atome aus dem Kondensat herausgebeugt wurden. Das zurückgebliebene Doppelkondensat befindet sich in der Abbildung links und enthält ca. $N = 2 \times 760(70)$ Atome. Es sollte daher analog zur Situation mit einem einzelnen Kondensat möglich sein, durch Anlegen eines periodischen Potentials und Beschleunigung der Wellenpakete an die Bandkante zwei Solitonen zu erzeugen.

5.4.3 Vorschlag zur experimentellen Umsetzung

Um zwei auf diese Weise erzeugte Solitonen innerhalb einer experimentell realisierbaren Beobachtungsdauer zur Kollision zu bringen, müssen sie aufeinander beschleunigt werden. Dies ist mit Hilfe eines in Wellenleiterrichtung *repulsiven* Potentials möglich, das durch den in Abb. 3.5 von rechts kommenden blau-verstimmten Laser erzeugt werden kann. Das Zentrum dieses Laserstrahls sollte dabei auf einen Punkt justiert sein, der sich auf der Wellenleiter-Achse zwischen den beiden Solitonen befindet (die genaue Idealposition dieses Punktes wird weiter unten diskutiert). Aufgrund der negativen effektiven Masse der Wellenpakete führt das repulsive Potential zu Gruppengeschwindigkeiten der Solitonen, die sie aufeinander zu laufen lassen. Bei der Beschleunigung der Solitonen, d.h. bei deren Verschiebung im Quasiimpulsraum, muss jedoch sichergestellt werden, dass sich der Wert der effektiven Masse nicht zu stark ändert. Dies begrenzt den erlaubten Bereich im Quasiimpulsraum und damit auch die Gruppengeschwindigkeiten, auf die die Solitonen beschleunigt werden dürfen. Bei der für unsere Solitonenexperimente typischen Modulationstiefe $V_0 = 0.7 E_{\text{rec}}$ ist m_{eff} innerhalb des Bereichs $[0.98 k_{\text{rec}}, 1.02 k_{\text{rec}}]$ bis auf weniger als 10% konstant ($m_{\text{eff}, k_{\text{rec}}} = -0.0956 m$ und $m_{\text{eff}, 0.98 k_{\text{rec}}} = -0.104 m$). Die Idee besteht nun darin, mittels des oben erwähnten Potentials V_{acc} , den zentralen Quasiimpuls des einen Solitons von $k_0^{(1)} = k_{\text{rec}}$ nach $k_0^{(1)} = 0.98 k_{\text{rec}}$ zu präparieren und den des zweiten Solitons entsprechend nach $k_0^{(2)} = 1.02 k_{\text{rec}}$. Im Folgenden sollen sinnvolle experimentelle Werte für die Frequenz ω_{acc} dieses Potentials und die Präparationsdauer T_{acc} , während der das Potential V_{acc} eingeschaltet ist, diskutiert werden.

Für ein im Bezugssystem des periodischen Potentials ruhendes repulsives harmonisches Beschleunigungspotential V_{acc} kann die Position des zentralen Quasiimpulses $k_0(t)$

5.4 Vorschlag zur Untersuchung von Soliton-Kollisionen

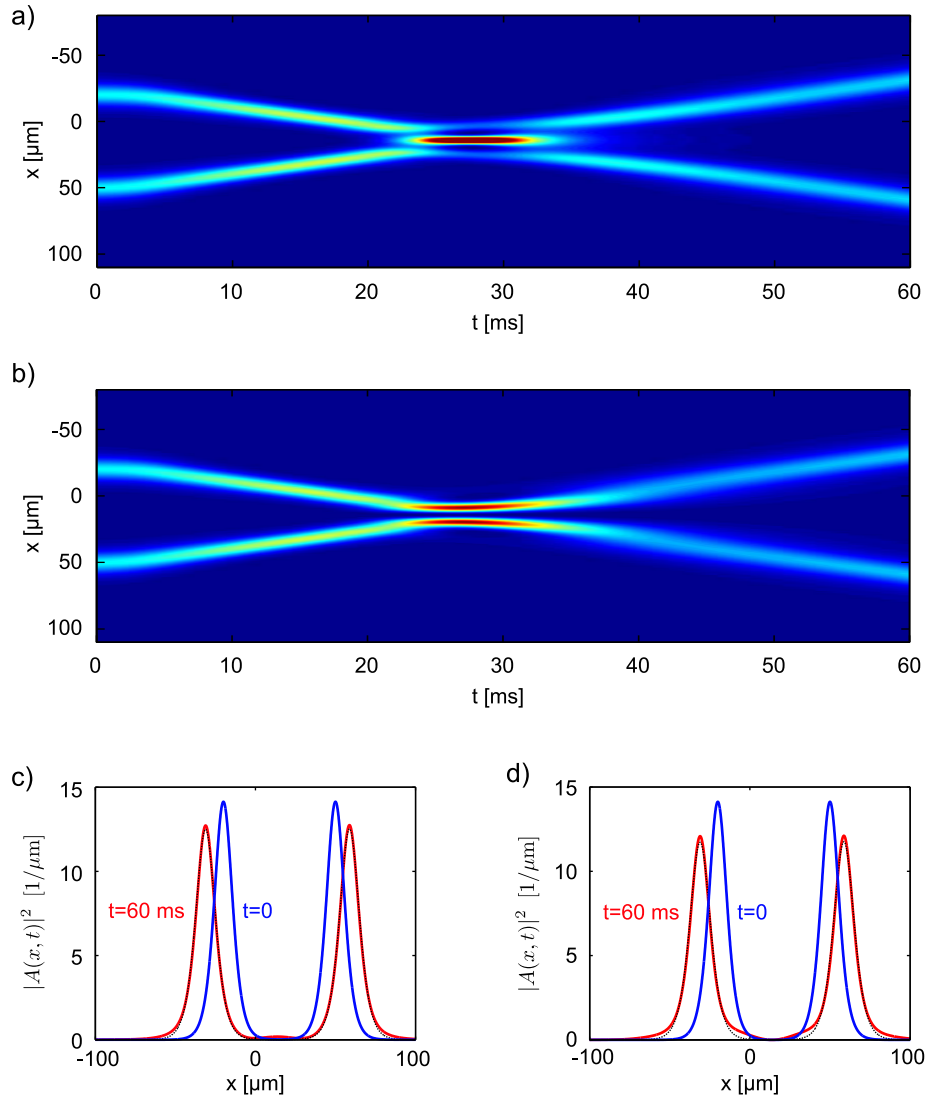


Abbildung 5.10: Simulation des vorgeschlagenen Verfahrens zur Untersuchung von Soliton-Kollisionen. a) Zwei Solitonen gleicher Phasenlage ($\theta = 0$) werden während der ersten 5 ms durch ein Potential V_{acc} im Quasiimpulsraum zu zentralen Quasiimpulsen $0.98 k_{\text{rec}}$ bzw. $1.02 k_{\text{rec}}$ beschleunigt. Die weitere Propagation erfolgt bei $V_{\text{acc}} = 0$ und führt zur Kollision der Solitonen. b) Identische Situation wie in a), aber mit einer relativen Phase $\theta = \pi$ zwischen den beiden beteiligten Solitonen. Im Kollisionsbereich ist die daraus resultierende gegenseitige Abstoßung der Solitonen gut zu erkennen. c) Schnitte durch die Dichteverteilung für den in Graph a) dargestellten Fall $\theta = 0$ zu den Zeiten $t = 0$ und $t = 60$ ms. Die Solitonen haben ihre sech-Form nach der Kollision nahezu wiedergewonnen. d) Entsprechende Schnitte durch die Dichteverteilung für den in b) dargestellten Fall $\theta = \pi$. Auch hier bleibt die sech-Form erhalten.

eines Solitons mittels folgender Gleichungen näherungsweise beschrieben werden:

$$\hbar \dot{k}_0(t) = m\omega_{\text{acc}}^2 x(t) \quad (5.7)$$

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v_g(t') dt' \quad (5.8)$$

$$v_g(t) = \frac{1}{\hbar} \left. \frac{dE_1}{dk} \right|_{k_0(t)}. \quad (5.9)$$

Dabei bezeichnet $x(t)$ den Schwerpunkt des Solitons im Bezugssystem des periodischen Potentials. Nichtlineare Effekte wurden bei dieser Beschreibung vernachlässigt. Dies ist zulässig, solange der Abstand zu anderen Wellenpaketen groß ist im Vergleich zu den jeweiligen Breiten. In dieser Näherung ergibt sich bei einer Fallenfrequenz $\omega_{\text{acc}} = 2\pi \cdot 4.5$ Hz, dass der zentrale Quasiimpuls eines Solitons mit Anfangsposition $x_1(0) = 35 \mu\text{m}$ innerhalb von $T_{\text{acc}} = 5$ ms von k_{rec} nach $1.02 k_{\text{rec}}$ verschoben wird. Der Quasiimpuls eines Solitons, das sich zu Beginn bei $x_2(0) = -35 \mu\text{m}$ befunden hat, wird entsprechend nach $0.98 k_{\text{rec}}$ verschoben.

Bei der von uns verwendeten Form des Dispersionsmanagements wird das periodische Potential zur Präparation eines Wellenpaketes am Rand der Brillouinzone allerdings auf eine Geschwindigkeit $-v_{\text{rec}}$ beschleunigt. Das zur Beschleunigung der Solitonen verwendete Potential V_{acc} ruht hingegen im Laborsystem. Daher muss in Gleichung (5.8) ein zusätzlicher Term $-v_{\text{rec}}t$ eingeführt werden, der diese Relativbewegung berücksichtigt. In diesem Fall werden zwei Solitonen mit einem typischen Anfangsabstand von $70 \mu\text{m}$ mittels des Potentials V_{acc} mit $\omega_{\text{acc}} = 2\pi \cdot 4.5$ Hz innerhalb von $T_{\text{acc}} = 5$ ms im Quasiimpulsraum von k_{rec} nach $0.98 k_{\text{rec}}$ bzw. $1.02 k_{\text{rec}}$ verschoben, wenn für ihre Anfangspositionen $x_1(0) = +50 \mu\text{m}$ bzw. $x_2(0) = -20 \mu\text{m}$ gewählt wird. Damit ist klar, wo der oben erwähnte Idealpunkt für das Zentrum der Stehwelle 2 liegt.

Abbildung 5.10 a zeigt das Ergebnis einer numerischen Simulation, bei der diese Präparationsmethode mit obigen Parametern auf zwei fundamentale Solitonen mit Anfangsbreiten $x_0 = 7.5 \mu\text{m}$ und entsprechender Atomzahl $N = 211$ angewendet wurde. Abgebildet ist die Dichteverteilung $|A(x, t)|^2$ der Einhüllenden im Bezugssystem des periodischen Potentials in Abhängigkeit von der Propagationszeit t . Die oben erläuterte Relativbewegung der Potentiale wurde bei der Simulation, die mittels der Split-Step-Technik umgesetzt wurde, berücksichtigt. Die beiden Solitonen in Abb. 5.10 a haben zu Beginn eine identische Phasenlage ($\theta = 0$). Wie erwartet durchdringen sich die beiden Solitonen und bleiben auch nach der Kollision lokalisiert. In Abb. 5.10 b ist das Ergebnis einer identischen Simulation gezeigt, bei der nun aber eine relative Phasenlage $\theta = \pi$ zwischen den Solitonen gewählt wurde. Experimentell kann eine solche zusätzliche Phase zum Beispiel durch einen π -Puls mit einem Laserstrahl, der nur eines der beiden Solitonen trifft, realisiert werden. Diese Technik des „phase engineering“ ist wohletabliert und wurde beispielsweise in [26] und [27] zur Erzeugung dunkler Solitonen angewandt. Die Simulation zeigt die erwartete Abstoßung der beiden kollidierenden Solitonen. Auch in diesem Fall bleiben die Solitonen nach der Kollision scharf lokalisiert. Graph c) zeigt Schnitte für $t_0 = 0$ (blaue Linie) und $t_1 = 60$ ms (rote Linie) durch die in a) dargestellte Zeitreihe. Ein Fit (feine schwarze Linie) mit der Funktion $A_1 \text{sech}^2(\frac{x}{x_1}) + A_2 \text{sech}^2(\frac{x}{x_2})$ an die lineare Dichte $n_{1d}(x, t_1) = |A(x, t_1)|^2$ zeigt, dass die Solitonen ihre sech-Form nach der Kollision nahezu wiedergewonnen haben. Aus den ermittelten Werten $A_1 = A_2 = 12.5 \mu\text{m}^{-1}$ und $x_1 = x_2 = 8.2 \mu\text{m}$ berechnet sich eine Atomzahl $N = 205$ pro Soliton. In Graph d) sind

5.4 *Vorschlag zur Untersuchung von Soliton-Kollisionen*

die analogen Daten für die in Graph b) gezeigte Zeitreihe dargestellt. Der Fit liefert hier $A_1 = A_2 = 11.8 \mu\text{m}^{-1}$ und $x_1 = x_2 = 8.5 \mu\text{m}$, woraus sich $N = 201$ ergibt. Die in den Solitonen fehlenden Atome wurden längs des Wellenleiters abgestrahlt und bilden einen zerfließenden Untergrund.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit gelang erstmalig die experimentelle Demonstration heller atomarer Gap-Solitonen. Dazu wurde die Technik des Dispersionsmanagements mittels eines periodischen optischen Potentials auf Bose-Einstein-Kondensate von ^{87}Rb in einem eindimensionalen atomaren Wellenleiter angewandt. Dies erlaubte die Realisierung einer negativen effektiven Masse und war Voraussetzung für die Erzeugung heller atomarer Solitonen in einem Kondensat mit repulsiver interatomarer Wechselwirkung. In systematischen Messungen konnten verschiedene für Solitonen erwartete charakteristische Eigenschaften nachgewiesen werden.

Zu Beginn meiner Diplomarbeit wurden die in [35] beschriebenen Experimente zum Dispersionsmanagement mit thermischen Atomwolken in periodischen Potentials für eine Veröffentlichung [36] weiter ausgearbeitet. Bei diesen Experimenten konnte ein zunächst zerfließendes Wellenpaket durch eine gezielte Manipulation der Dispersionsrelation während der Propagation zur Rekompensation bis quasi auf seine Anfangsbreite gebracht werden. Es wurde demonstriert, dass die Dispersion von Materiewellen in Stärke und Vorzeichen experimentell kontrolliert werden kann. Die Grenzen der lokalen Näherung der Dispersionsrelation durch eine konstante effektive Masse waren Gegenstand einer zweiten Reihe von Experimenten zum Dispersionsmanagement. Schließlich wurde der Einfluss der Punkte im Quasiimpulsraum, die extremaler Gruppengeschwindigkeit bzw. divergierender effektiver Masse entsprechen, auf die Wellenpaketdynamik im Detail untersucht.

Zur Erzeugung von Bose-Einstein-Kondensaten waren mit Lasermethoden vorgekühlte Atomwolken ursprünglich in einer magnetischen TOP-Falle durch Evaporationskühlung bis zum BEC-Phasenübergang abgekühlt worden. Unsere Experimente finden jedoch in dem Dipolpotential eines rotverstimmten horizontalen Laserstrahls statt, der den Materiewellenpaketen als Wellenleiter dient. In Experimenten vor Beginn meiner Diplomarbeit hatte sich gezeigt, dass beim Transfer der Kondensate von der Magnetfalle in den Wellenleiter unkontrollierbare Impulse auf die Atome übertragen wurden. Aus diesem Grund war zu einem anderen Schema übergegangen worden, das im Laufe des letzten Jahres durch zahlreiche Detailverbesserungen immer weiter verfeinert wurde. Bei diesem neuen Schema werden die Atome in der Magnetfalle nur bis zu einer typischen Phasenraumdichte $\mathcal{D} = 3 \cdot 10^{-2}$ abgekühlt und dann in eine optische Dipolfalle umgeladen. In dieser Dipolfalle, die von dem Wellenleiter und einem dazu senkrecht verlaufenden ebenfalls rotverstimmten Laser gebildet wird, findet durch Reduktion der Strahlleistungen weitere Verdampfungskühlung bis zum BEC-Phasenübergang statt. Dies ermöglichte eine wohldefinierte Präparation der für die Soliton-Experimente benötigten nichtlinearen Materiewellenpakete im Wellenleiter.

Der zeitliche und inhaltliche Schwerpunkt meiner Arbeit lag auf der Realisierung hel-

ler Gap-Solitonen. Ihre Entstehung beruht auf dem Zusammenspiel von Dispersion und Nichtlinearität aufgrund der Atom-Atom-Wechselwirkungen. Die Erzeugung heller Solitonen ist im Fall repulsiver Wechselwirkung nur bei anomaler Dispersion möglich. Dies entspricht einer negativen effektiven Masse und kann mit dem oben genannten Dispersionsmanagement mittels eines periodischen Potentials realisiert werden. In ausführlichen systematischen Messreihen zeigte sich jedoch, dass während der Präparation des Wellenpaketes im Quasiimpulsraum transversale Schwingungen im Wellenleiter angeregt wurden. Die Ursache für diesen Effekt, der die Erzeugung von Solitonen zunächst unmöglich machte, war ein Winkel von 21° zwischen Wellenleiter und periodischem Potential. Daher wurden in einer größeren Umbauaktion, die alle optischen Potentiale miteinschloss, Wellenleiter und periodisches Potential kolinear aufgebaut. Nach weiteren Verbesserungen der Apparatur, wie beispielsweise der elektronischen Stabilisierung der Lichtleistung und damit der Tiefen aller optischen Potentiale durch PI-Regelkreise, führte dies schließlich zur Erzeugung der angestrebten Solitonen. Sie konnten für Propagationszeiten bis zu 65 ms beobachtet werden. Dies entspricht mehr als 15 Solitonperioden T_s , wobei T_s eine charakteristische Zeitskala für die Phasenentwicklung eines Solitons ist. Es wurde gezeigt, dass die Dichteverteilung der realisierten Solitonen während der Beobachtungszeit in Form und Breite in guter Näherung konstant war. Auch die Atomzahl in den Solitonen war in sehr guter Übereinstimmung mit den theoretischen Erwartungen und änderte sich während der Propagation nur unwesentlich. Weiterhin konnte nachgewiesen werden, dass im periodischen Potential *stehende* Gap-Solitonen erzeugt wurden. Dies ist in dem verwendeten atomoptischen System möglich, da die Wellenpakete hier im Gegensatz zur Optik in Medien mit periodischem Brechungsindex direkt an die Bandkante präpariert werden können. Schließlich wurde das Skalierungsverhalten der Solitonen bei Variation der Dispersion durch Veränderung der Modulationstiefe des periodischen Potentials untersucht. Die experimentellen Ergebnisse dieser Messungen sind ebenfalls in sehr guter Übereinstimmung mit der theoretischen Erwartung.

In Ergänzung zu diesem Projekt wurde ein Diodenlasersystem aufgebaut. Es wurde in einem ebenfalls im Rahmen dieser Arbeit konzipierten und umgesetzten Aufbau verwendet, um zwei weitere optische Potentiale bereitzustellen. Eines dieser beiden Potentiale war periodisch und konnte zur simultanen Herstellung zweier Kondensate im Wellenleiter eingesetzt werden. Vorexperimente lassen erwarten, dass es mittels dieser Doppelkondensate und der vorhandenen Apparatur möglich sein sollte, erstmalig auf kontrollierte Weise zwei atomare Solitonen gleichzeitig zu erzeugen. In zukünftigen Experimenten können dann Kollisionen zwischen den beiden Solitonen untersucht werden. Hierzu wurde im Rahmen der Arbeit ein Vorschlag ausgearbeitet, der vorsieht, die Solitonen mittels des zweiten neu aufgebauten optischen Potentials aufeinander zuzubeschleunigen. Es wurden experimentell sinnvolle Parameter ermittelt und mit diesen der Vorschlag durch numerische Simulationen unterstützt.

Weitere Projekte, die sich mit der vorliegenden, sehr vielseitigen Apparatur und den bereitgestellten neuen optischen Potentialen ohne größere Modifikationen umsetzen lassen könnten, umfassen die experimentelle Realisierung einer Josephson-Junction und Experimente zur Eindimensionalität. Durch die Verwendung des makroskopischen effektiven Doppelmuldenpotentials in dem Wellenleiter in Verbindung mit dem auf makroskopischer Skala kohärenten Bose-Einstein-Kondensat könnte die Dynamik an einer Josephson-Junction dabei direkt im Ortsraum beobachtet werden. Durch Retroreflektion

auch des zweiten neuen Laserstrahls in sich selbst kann ein zweidimensionales optisches Gitter erzeugt werden, dessen longitudinale Achse parallel zum Wellenleiter verläuft. Damit sind Experimente im tief eindimensionalen Regime möglich und als Fernziel ist sogar die Realisierung eines Tonks-Gases denkbar.

Kapitel 6 Zusammenfassung und Ausblick

A Anhang

Spektroskopische Daten von ^{87}Rb

In der folgenden Tabelle sind einige wichtige Daten des ^{87}Rb -Isotopes zusammengestellt. Wenn nicht anders angegeben, gelten die Daten für den D_2 -Übergang.

Größe	Symbol	Wert
Natürliche Isotopenhäufigkeit		27.73%
Kernspin	I	3/2
Masse	m	$1.44 \cdot 10^{-25}$ kg
Vakuumwellenlänge D_1 -Übergang	λ_1	794.98 nm
Vakuumwellenlänge D_2 -Übergang	λ_2	780.24 nm
Wellenzahl	k_2	$8.05 \cdot 10^6$ m $^{-1}$
Photonen-Rückstoßgeschwindigkeit	$v_{r,2}$	5.89 mm/s
Photonen-Rückstoßenergie	$E_{r,2}$	$2.50 \cdot 10^{-30}$ J
Sättigungsintensität (σ^+ -polarisiertes Licht, Übergang $ F=2, m_F=2\rangle \rightarrow F'=3, m'_F=3\rangle$)	I_{sat}	1.58 mW/cm 2
Linienbreite	Γ	$2\pi \times 5.76$ MHz
s-Wellen-Streulänge	a	5.77 nm

Bemerkung: Die Sättigungsintensität I_{sat} ist für den betrachteten Übergang so definiert, dass sich ein Atom mit der Wahrscheinlichkeit 1/4 im angeregten Zustand befindet, wenn der Übergang mit $I = I_{\text{sat}}$ auf Resonanz getrieben wird.

Literaturverzeichnis

- [1] J.S. Russel. Report on the 14th meeting of the British Association for the Advancement of Science, 1845.
- [2] A. Einstein. Quantentheorie des einatomigen idealen Gases: Zweite Abhandlung. *Sitzungsber.Preuss.Akad.Wiss.*, 1925:3, 1925.
- [3] S. Bose. Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese. *Z. Phys.*, 26(6):178, 1924.
- [4] E.L. Raab, M. Prentiss, A. Cable, S. Chu, and D.E. Pritchard. Trapping of neutral sodium atoms with radiation pressure. *Physical Review Letters*, 59(23):2631–34, December 1987.
- [5] C.G. Townsend, N.H. Edwards, C.J. Cooper, K.P. Zetie, C.J. Foot, A.M. Steane, P. Szriftgiser, H. Perrin, and J. Dalibard. Phase-space density in the magneto-optical trap. *Physical Review A*, 52:1423, 1995.
- [6] A.L. Migdall, J.V. Prodan, W.D. Phillips, T.H. Bergeman, and H.J. Metcalf. First observation of magnetically trapped neutral atoms. *Physical Review Letters*, 54(24):2596–99, June 1985.
- [7] T. Bergeman, G. Erez, and H.J. Metcalf. Magnetostatic trapping field for neutral atoms. *Physical Review A*, 35(4):1535–46, February 1987.
- [8] H.F. Hess. Evaporative cooling of magnetically trapped and compressed spin-polarized hydrogen. *Physical Review B*, 34:3476, 1986.
- [9] M. Anderson, J. Ensher, M. Matthews, C. Wieman, and E. Cornell. Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor. *Science*, 269:198, 1995.
- [10] K. Davis, M.-O. Mewes, M. Andrews, N. van Druten, D.S. Durfee, D. Kurn, and W. Ketterle. Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms. *Physical Review Letters*, 75:3969, 1995.
- [11] C.C. Bradley, C.A. Sackett, and R.G. Hulet. Bose-Einstein condensation of lithium: Observation of limited condensate number. *Physical Review Letters*, 78(6):985–989, February 1997.
- [12] C.C. Bradley, C.A. Sackett, J.J. Tollet, and R.G. Hulet. Evidence of Bose-Einstein condensation in an atomic gas with attractive interactions. *Physical Review Letters*, 79:1170, 1997.

- [13] J.R. Ensher, D.S. Jin, M.R. Matthews, C.E. Wieman, and E.A. Cornell. Bose-Einstein condensation in a dilute gas: Measurement of energy and ground-state occupation. *Physical Review Letters*, 77:4984, 1996.
- [14] D.S. Jin, J.R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman, and E.A. Cornell. Collective excitations of a Bose-Einstein condensate in a dilute gas. *Physical Review Letters*, 77:420, 1996.
- [15] M.-O. Mewes, M.R. Andrews, N.J. van Druten, D.M. Kurn, D.S. Durfee, C.G. Townsend, and W. Ketterle. Collective excitations of a Bose-Einstein condensate in a magnetic trap. *Physical Review Letters*, 77:988, 1996.
- [16] M.R. Andrews, D.M. Kurn, H.-J. Miesner, D.S. Durfee, C.G. Townsend, S. Inouye, and W. Ketterle. Propagation of sound in a Bose-Einstein condensate. *Physical Review Letters*, 79:533, 1997.
- [17] M.R. Andrews, C.G. Townsend, H.-J. Miesner, D.S. Durfee, D.M. Kurn, and W. Ketterle. Observation of interference between two Bose-Einstein condensates. *Science*, 275:637, 1997.
- [18] B.P. Anderson and M.A. Kasevich. Macroscopic quantum interference from atomic tunnel arrays. *Science*, 282:1686, 1998.
- [19] M.-O. Mewes, Andrews M.R., D.M. Kurn, D.S. Durfee, C.G. Townsend, and W. Ketterle. Output coupler for Bose-Einstein condensed atoms. *Physical Review Letters*, 78(2):582–585, January 1997.
- [20] E.W. Hagley, L. Deng, M. Kozuma, J. Wen, K. Helmerson, S.L. Rolston, and W.D. Phillips. A well-collimated quasi-continuous atom laser. *Science*, 283:1706, 1999.
- [21] I. Bloch, T.W. Hänsch, and T. Esslinger. Atom laser with a cw output coupler. *Physical Review Letters*, 82(15):3008–11, April 1999.
- [22] G. Agrawal. *Nonlinear fiber optics*. Academic press, San Diego, 2nd edition, 1995.
- [23] G. Agrawal. *Applications of Nonlinear Fiber Optics*. Academic press, San Diego, 2nd edition, 2001.
- [24] L. Khaykovich, F. Schreck, F. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles, L.D. Carr, Y. Castin, and C. Salomon. Formation of a matter wave bright soliton. *Science*, 296:1290–93, May 2002.
- [25] K.E. Strecker, G.B. Partridge, A.G. Truscott, and R.G. Hulet. Formation and propagation of matter wave soliton trains. *Nature*, 417:150–153, May 2002.
- [26] S. Burger, K. Bongs, S. Dettmer, W. Ertmer, K. Sengstock, A. Sanpera, G.V. Shlyapnikov, and M. Lewenstein. Dark solitons in Bose-Einstein condensates. *Physical Review Letters*, 83(25):5198–5201, December 1999.
- [27] J. Denschlag, J.E. Simsarian, D.L. Feder, C.W. Clark, L.A. Collins, J. Cubizolles, L. Deng, E.W. Hagley, K. Helmerson, W.P. Reinhardt, S.L. Rolston, B.I. Schneider, and W.D. Phillips. Generating solitons by phase engineering of a Bose-Einstein condensate. *Science*, 287:97–100, January 2000.

- [28] E. Tiesinga, B.J. Verhaar, and H.T.C. Stoof. Threshold and resonance phenomena in ultracold groundstate collisions. *Physical Review A*, 47:4114, 1993.
- [29] S. Inouye, M.R. Andrews, J. Stenger, H.-J. Miesner, D.M. Stamper-Kurn, and W. Ketterle. Observation of Feshbach resonances in a Bose-Einstein condensate. *Nature*, 392:151, 1998.
- [30] E.A. Donley, N.R. Claussen, S.L. Cornish, J.L. Roberts, E.A. Cornell, and C.E. Wieman. Dynamics of collapsing and exploding Bose-Einstein condensates. *Journal of research of the National Institute of standards and Technology*, 412:295, 2001.
- [31] N.J. Ashcroft and N.D. Mermin. *Festkörperphysik*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag, München, 2001.
- [32] P.S. Jessen and I.H. Deutsch. Optical lattices. *Adv. At. Mol. Opt. Phys.*, 37:95, 1996.
- [33] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. Hänsch, and I. Bloch. Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms. *Nature*, 415:39–44, January 2002.
- [34] O. Morsch, J.H. Müller, M. Cristiani, D. Ciampini, and E. Arimondo. Bloch oscillations and mean-field effects of Bose-Einstein condensates in 1-d optical lattices. *Physical Review Letters*, 87(14):140402,1–4, 2001.
- [35] P. Treutlein. Dispersionsmanagement für Materiewellen. Diplomarbeit, Universität Konstanz, Oktober 2002.
- [36] B. Eiermann, P. Treutlein, Th. Anker, M. Albiez, M. Taglieber, K.-P. Marzlin, and M.K. Oberthaler. Dispersion management for atomic matter waves. *Physical Review Letters*, 91(6):060402, August 2003.
- [37] H. Ibach and H. Lüth. *Festkörperphysik*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 4th edition, 1995.
- [38] É. Mathieu. Mémoire sur le mouvement vibratoire d’une membrane de forme elliptique. *J. math. pure appl.*, 13:137–203, 1868.
- [39] M. Abramowitz and I.A. Stegun, editors. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, New York, 1972.
- [40] W. Ketterle, D.S. Durfee, and D.M. Stamper-Kurn. Making, probing and understanding Bose-Einstein condensates. In M. Inguscio, S. Stringari, and C. Wieman, editors, *Bose-Einstein Condensation in Atomic Gases*, Amsterdam: IOS Press, 1999. Società Italiana di Fisica.
- [41] F. Dalfovo and Pitaevskii L.P. Stringari S. Giorgini, S. Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases. *Review of modern Physics*, 71(3):463–512, April 1999.
- [42] E.P. Gross. Structure of a quantized vortex in boson systems. *Nuovo Cimento*, 20:454, 1961.

- [43] E.P. Gross. Hydrodynamics of a superfluid condensate. *J. Math. Phys.*, 4:195, 1963.
- [44] L.P. Pitaevskii. Vortex lines in an imperfect Bose gas. *Sov. Phys. JETP*, 13:451, 1961.
- [45] M. Edwards and K. Burnett. Numerical solution of the nonlinear Schrödinger equation for small samples of trapped neutral atoms. *Physical Review A*, 51(2):1382, February 1995.
- [46] F. Dalfovo and S. Stringari. Bosons in anisotropic traps: Ground state and vortices. *Physical Review A*, 53(4):2477, April 1996.
- [47] M. Edwards, R.J. Dodd, C.W. Clark, P.A. Ruprecht, and K. Burnett. Properties of a Bose-Einstein condensate in an anisotropic harmonic potential. *Physical Review A*, 53(4):R1950, April 1996.
- [48] G. Baym and C.J. Pethick. Ground state properties of magnetically trapped Bose-condensed rubidium gas. *Physical Review Letters*, 76(1):6–9, January 1996.
- [49] H.M.J.M. Boesten, C.C. Tsai, J.R. Gardner, D.J. Heinzen, and B.J. Verhaar. Observation of a shape resonance in the collision of two cold ^{87}Rb atoms. *Physical Review A*, 55:636, 1997.
- [50] M.J. Steel and W. Zhang. Bloch function description of a Bose-Einstein condensate in a finite optical lattice. *cond-mat/9810284*, 1998.
- [51] K.M. Hilligsøe. Bright atomic solitons in Bose-Einstein condensates. Master's thesis, University of Aarhus, Universität Konstanz, 2001.
- [52] A. Hasegawa. *Optical Solitons in Fibers*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1990.
- [53] B.J. Eggleton and R.E. Slusher. Bragg grating soliton. *Physical Review Letters*, 76(10):1627–30, March 1996.
- [54] J.W. Fleischer, M. Segev, N.K. Efremidis, and D.N. Christodoulides. Observation of two-dimensional discrete solitons in optically induced nonlinear photonic lattices. *Nature*, 422:147, 2003.
- [55] O. Zobay, S. Pötting, P. Meystre, and E.M. Wright. Creation of gap solitons in Bose-Einstein condensates. *Physical Review A*, 59(1):643, 1999.
- [56] M. Remoissenet, editor. *Waves Called Solitons*. Springer Verlag, Berlin, 1994.
- [57] F. Schwabl. *Quantenmechanik*. Springer, Berlin, 5th edition, 1998.
- [58] K. Dieckmann, R.J.C. Spreeuw, M. Weidemüller, and J.T.M Walraven. Two-dimensional magneto-optical trap as a source of slow atoms. *Physical Review A*, 58(5):3891–95, November 1998.
- [59] W.H. Wing. On neutral particle trapping in quasistatic electromagnetic fields. *Prog. Quantum. Elec.*, 8:181, 1984.

- [60] E. Majorana. *Nuovo Cimento*, 9:43, 1932.
- [61] J. Schwinger. *Physical Review Letters*, 51:648, 1937.
- [62] D.E. Pritchard. Cooling atoms in a magnetic trap for precision spectroscopy. *Physical Review Letters*, 51:1336, 1983.
- [63] J.R. Ensher. *The First Experiments with Bose-Einstein Condensation of ^{87}Rb* . PhD thesis, University of Colorado at Boulder, 1998.
- [64] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg. *Atom-Photon Interactions*. Wiley-Interscience, New York, 1992.
- [65] H.J. Metcalf and P. van der Straten. *Laser Cooling and Trapping*. Springer Verlag, 1999, 1999.
- [66] B.E.A. Saleh and M.C. Teich. *Fundamentals of Photonics*. Wiley, New York, 1991.
- [67] M. Kozuma, L. Deng, E.W. Hagley, J. Wen, R. Lutwak, K. Helmerson, S.L. Rolston, and W.D. Phillips. Coherent splitting of Bose-Einstein condensed atoms with optically induced bragg diffraction. *Physical Review Letters*, 82(5):871–75, February 1999.
- [68] O. Morsch, J.H. Müller, M. Cristiani, and E. Arimondo. Coherent acceleration and landau-zener tunneling of Bose-Einstein condensates in 1-d optical lattices. *cond-mat/0103466*, April 2001.
- [69] P.L. Gould, G.A. Ruff, and D.E. Pritchard. Diffraction of atoms by light: The near-resonant Kapitza-Dirac effect. *Physical Review Letters*, 56(8):827, 1986.
- [70] M. Greiner, I. Bloch, O. Mandel, T.W. Hänsch, and T. Esslinger. Exploring phase coherence in a 2D lattice of Bose-Einstein-Condensates. *Physical Review Letters*, 87(16):160405, 2001.
- [71] L. Tonks. The complete equation of state of one, two and three-dimensional gases of hard elastic spheres. *Phys. Rev.*, 50:955, 1936.
- [72] P. Pedri and L. Santos. Three-dimensional quasi-Tonks gas in a harmonic trap. *cond-mat/03041414*, 2003.
- [73] M. Olshanii. Atomic scattering in the presence of an external confinement and a gas of impenetrable bosons. *Physical Review Letters*, 81(5):938, 1998.
- [74] J.T.M. Walraven. Atomic hydrogen in magnetostatic traps. In G.L. Oppo, S.M. Barnett, E. Riis, and M. Wilkinson, editors, *Quantum Dynamics of Simple Systems*, 1996.
- [75] W. Ketterle and N.J. van Druten. In B. Bederson and H. Walther, editors, *Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics*, volume 37, page 181, San Diego, 1996. Academic Press.
- [76] K. Forberich. Aufbau einer Quelle für nichtlineare Atomoptik. Diplomarbeit, Universität Konstanz, Oktober 2001.

Literaturverzeichnis

- [77] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloe. *Quantenmechanik*. de Gruyter, Berlin, 1999.
- [78] M. Ben Dahan, E. Peik, J. Reichel, Y. Castin, and C. Salomon. Bloch oscillations of atoms in an optical potential. *Physical Review Letters*, 76(24):4508–11, June 1996.
- [79] S. Burger, F.S. Cataliotti, C. Fort, F. Minardi, and M. Inguscio. Superfluid and dissipative dynamics of a Bose-Einstein condensate in a periodic optical potential. *Physical Review Letters*, 86(20):4447–50, May 2001.
- [80] M. Krämer, L. Pitaevskii, and S. Stringari. *Physical Review Letters*, 88:180404, 2002.
- [81] W. Chen and D.L. Mills. Gap solitons and the nonlinear optical response of superlattices. *Physical Review Letters*, 58:160, 1987.
- [82] E. Ostrovskaya and Y. Kivshar. Matter-wave gap solitons in atomic bandgap structures. *cond-mat/0303190*, 2003.
- [83] Y. Castin and R. Dum. Bose-Einstein condensates in time dependent traps. *Physical Review Letters*, 77(27):5315–19, December 1996.
- [84] Y. Kagan, E.L. Surkov, and G.V. Shlyapnikov. Evolution of a Bose-condensed gas under variation of the confining potential. *Physical Review A*, 54(3):R1753–56, September 1996.
- [85] V.E. Zakharov and A.B. Shabat. Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional modulation of waves in nonlinear media. *Sov. Phys. JETP*, 34:62, 1972.
- [86] C. Desem and L. Chu. *Optical Solitons - Theory and Experiment*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all denjenigen bedanken, die mich bei meinem Studium und bei der Diplomarbeit unterstützt haben und die dazu beigetragen haben, dass die Jahre in Konstanz eine so schöne und erfüllte Zeit waren.

Markus Oberthaler danke ich dafür, dass er mir die Möglichkeit gegeben hat, an dem äußerst interessanten BEC-Experiment in einer sehr anregenden und freundschaftlichen Atmosphäre zu arbeiten. In wertvollen Diskussionen hat er mir viel beigebracht und seine Begeisterung für die Physik ist einfach ansteckend.

Desweiteren danke ich Herrn Prof. Leiderer und Frau Prof. Scheer dafür, dass sie sich freundlicherweise bereit erklärt haben, meine Diplomarbeit offiziell zu betreuen bzw. zu begutachten.

„Meinen“ Doktoranden Bernd Eiermann, Tom Anker und Michael Albiez bin ich dankbar für Ihre herzliche Kollegialität, die ausgesprochen gute Stimmung und Zusammenarbeit und ihr stets offenes Ohr für Fragen. Wir haben im Labor zusammen viel gelacht, geflucht und uns über gemeinsame Erfolge gefreut, und auch die diversen Aktivitäten außerhalb des Labors werden mir immer in sehr positiver Erinnerung bleiben.

Auch die anderen Gruppenmitglieder Martin Göbel, Alex Greiner, Anja Habenicht, Dirk Jürgens, Martin Störzer, Ralf Stützle und Alex Weber hatten wesentlichen Anteil an der großartigen Atmosphäre. Ganz herzlichen Dank dafür!

Unseren Labornachbarn Dennis Weise und Oliver Vogelsang danke ich dafür, dass sie mit uns ihr Wissen, ihren Laser und nicht zuletzt ihren exzellent ausgestatteten Werkzeugkasten geteilt haben. Ohne diese äußerst großzügige Hilfsbereitschaft wäre vieles in dieser Form nicht möglich gewesen.

Peter Marzlin und Jan Krüger bin ich dankbar für die Unterstützung bei theoretischen Fragen.

Für die Hilfe in technischen wie auch organisatorischen Dingen gilt mein Dank Stefan Eggert, Stefan Hahn und Ute Hentzen.

Der Studienstiftung des deutschen Volkes danke ich für die ideelle und materielle Unterstützung während meines Studiums und insbesondere meines Auslandsjahres.

Ohne Tini, meine Familie und meine Freunde wäre all das nicht möglich gewesen. Ihnen danke ich daher ganz besonders!