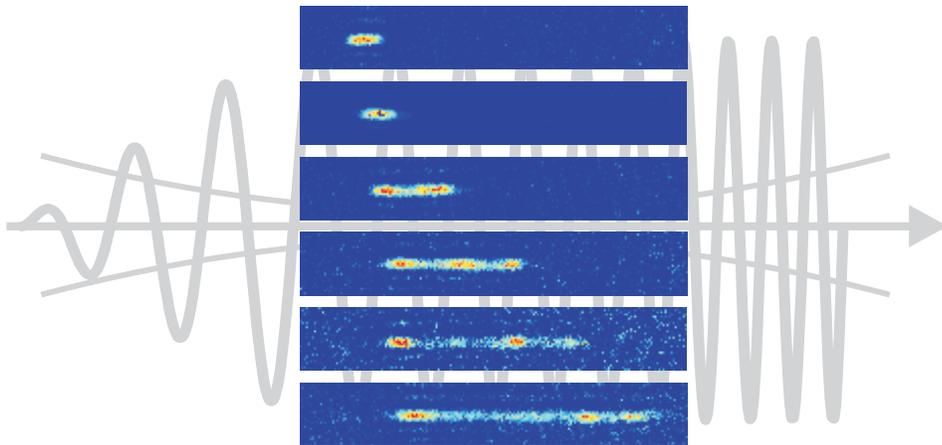


# Dispersionsmanagement für Materiewellen

Diplomarbeit

Philipp Treutlein



25. Oktober 2002

Universität Konstanz  
Fachbereich Physik  
Arbeitsgruppe Dr. Oberthaler  
Forschungszentrum für den wissenschaftlichen Nachwuchs

“One comes to regard the machine as having a personality — I had almost said a feminine personality — requiring humoring, coaxing, cajoling — even threatening! But finally one realizes that the personality is that of an alert and skilful player in an intricate but fascinating game — who will take immediate advantage of the mistakes of his opponent, who ‘springs’ the most disconcerting surprises, who never leaves any result to chance — but who nevertheless plays fair — in strict accordance with the rules of the game.

*Albert Abraham Michelson (1911)*

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>v</b>
<b>1 Theoretische Grundlagen</b>	<b>1</b>
1.1 Dispersion von Materiewellen . . . . .	1
1.1.1 Dispersion freier Teilchen . . . . .	2
1.1.2 Ein Parameter zur Kontrolle der Dispersion . . . . .	3
1.2 Materiewellen in periodischen Potentialen . . . . .	5
1.2.1 Bloch-Theorem und Bandstruktur . . . . .	5
1.2.2 Gruppengeschwindigkeit und effektive Masse . . . . .	7
1.2.3 Adiabatische Präparation im periodischen Potential . . . . .	9
1.3 Bose-Einstein Kondensation . . . . .	11
1.3.1 Die Gross-Pitaevskii Gleichung . . . . .	12
1.3.2 Das Kondensat in der Thomas-Fermi Näherung . . . . .	13
1.3.3 Das BEC im Wellenleiter . . . . .	14
1.4 Nichtlineare Effekte in periodischen Potentialen . . . . .	15
1.4.1 Effektive-Masse-Theorie für schwache Nichtlinearität . . . . .	16
1.4.2 Atomare Bragg-Gittersolitonen . . . . .	17
1.4.3 Pulskompression . . . . .	20
1.4.4 Starke Nichtlinearität und tiefe periodische Potentiale . . . . .	22
1.5 Numerische Methoden . . . . .	23
1.5.1 Bestimmung von Bandstruktur und Blochfunktionen . . . . .	23
1.5.2 Integration der 1D Gross-Pitaevskii Gleichung . . . . .	24
1.6 Optische Potentiale für Materiewellen . . . . .	28
1.6.1 Der Wellenleiter für Atome . . . . .	29
1.6.2 Das eindimensionale optische Gitter . . . . .	30
<b>2 Experimenteller Aufbau</b>	<b>33</b>
2.1 Die Maschine zur Erzeugung des BECs . . . . .	33
2.1.1 Die Vakuumapparatur . . . . .	34
2.1.2 Das Lasersystem . . . . .	34
2.1.3 Der atomare Funnel und die magneto-optische Falle . . . . .	36
2.1.4 Die magnetische TOP-Falle und das RF-Messer . . . . .	39
2.1.5 Steuerung des Experiments mit dem Computer . . . . .	43

2.2	Überblick über den Gesamtaufbau . . . . .	44
2.3	Überblick über den Aufbau um die Glaszelle . . . . .	44
2.4	Dipolpotentiale zur Manipulation der Atome . . . . .	47
2.4.1	Der atomare Wellenleiter . . . . .	47
2.4.2	Die zweite Dipolfalle . . . . .	49
2.4.3	Das periodische Potential . . . . .	50
2.4.4	RF-Elektronik zur Kontrolle des periodischen Potentials . . . . .	51
2.5	Das Abbildungssystem . . . . .	54
2.5.1	Absorptionsabbildung von kalten Atomen . . . . .	55
2.5.2	Justage und Eichung der Abbildung . . . . .	57
2.5.3	Time-of-flight Messungen . . . . .	59
<b>3</b>	<b>Der Weg zum Bose-Einstein Kondensat</b>	<b>63</b>
3.1	Laden der Magnetfalle . . . . .	63
3.2	Verdampfungskühlung in der Magnetfalle . . . . .	65
3.2.1	Verdampfungskühlung im Experiment . . . . .	68
3.3	Signaturen der Bose-Einstein Kondensation . . . . .	69
3.3.1	Plötzlicher Anstieg der optischen Dichte . . . . .	70
3.3.2	Bimodale Geschwindigkeitsverteilung . . . . .	71
3.3.3	Anisotrope Expansion . . . . .	73
3.4	Das Kondensat im Wellenleiter . . . . .	73
3.4.1	Expansion des BECs im Wellenleiter . . . . .	75
<b>4</b>	<b>Dispersionsmanagement für Materiewellen</b>	<b>79</b>
4.1	Präparation der Atome . . . . .	79
4.1.1	Aufbau für Wellenleiter und periodisches Potential . . . . .	80
4.1.2	Dynamik der Atome im Wellenleiter . . . . .	80
4.1.3	Präparation im periodischen Potential . . . . .	81
4.2	Bloch-Oszillationen . . . . .	82
4.3	Materiewellen mit anomaler Dispersion . . . . .	84
4.4	Ein theoretisches Modell . . . . .	87
4.5	Direkter Nachweis der negativen effektiven Masse . . . . .	89
4.6	Was ist neu an diesen Experimenten? . . . . .	91
<b>5</b>	<b>Atomare Gittersolitonen</b>	<b>93</b>
5.1	Erste Experimente zu Gittersolitonen . . . . .	93
5.1.1	Präparation der Atome . . . . .	94
5.1.2	Ein Wellenpaket, das nicht zerfließt . . . . .	95
5.1.3	Diskussion und numerische Simulation . . . . .	98
5.2	Dispersionsmanagement mit reinem Kondensat . . . . .	100
5.2.1	Präparation der Atome . . . . .	100
5.2.2	Neue Ergebnisse zu atomaren Gittersolitonen . . . . .	102

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	iii
Zusammenfassung und Ausblick	I
Anhang: Spektroskopische Daten von $^{87}\text{Rb}$	V
Literaturverzeichnis	VI
Danksagung	XV



# Einleitung

Die Materiewellenoptik mit ultrakalten Atomen hat sich in den letzten Jahren zu einem der dynamischsten Forschungsgebiete der Physik entwickelt. Atominterferometrie mit lasergekühlten Atomen, nichtlineare Atomoptik mit Bose-Einstein Kondensaten und die Beobachtung des Mott-Isolator-Übergangs von Atomen in optischen Gittern sind nur einige der aktuellsten Themen, die weit über die Atomphysik hinaus Beachtung gefunden haben [Nat02]. Diese spannenden Entwicklungen bilden den Rahmen für die Experimente zum „Dispersionsmanagement für Materiewellen“, die in dieser Diplomarbeit vorgestellt werden.

Die Dispersion von Wellen ist ein universelles Phänomen, das in vielen physikalischen Systemen auftritt — immer dann, wenn die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen keine Konstante ist, sondern von der Wellenlänge abhängt. Dispersion führt u.a. dazu, daß Wellenpakete, die aus einer Überlagerung vieler harmonischer Einzelwellen mit unterschiedlichen Wellenlängen bestehen, mit der Zeit auseinanderfließen. Dies läßt sich an Wasserwellen auf dem Meer ebenso wie an Schallwellen in einem Festkörper oder Laserpulsen in einer Glasfaser beobachten. Die Idee, die Dispersion einer experimentellen Kontrolle zu unterwerfen, bezeichnet man als „Dispersionsmanagement“.

Viele Wellenphänomene zeigen neben Dispersion auch nichtlineares Verhalten. Das bedeutet, daß die Wellen miteinander wechselwirken, und zwar um so stärker, je größer die Amplitude der Wellen ist. Einer der faszinierendsten nichtlinearen Effekte ist das Auftreten von Solitonen — lokalisierten Wellenpaketen, die frei propagieren können, ohne zu zerfließen. Solitonen beruhen auf dem Zusammenspiel von Nichtlinearität und Dispersion, deren Effekte sich kompensieren können und so zur Ausbildung einer pulsformigen Welle mit zeitlich konstantem Profil und teilchenartigen Eigenschaften führen. Solitonen wurden erstmals 1834 von J.S. Russel in einem flachen Wasserkanal beobachtet [Rus44] und haben seither in vielen Bereichen der Naturwissenschaft eine Rolle gespielt, von der Reizleitung in Nervenzellen bis hin zur Theorie der Elementarteilchen [Rem94, Fil00, Lam80, BC80]. Besonders große wissenschaftliche und technische Bedeutung haben Effekte von Dispersion und Nichtlinearität in der nichtlinearen Faseroptik erlangt, die seit den 1980er Jahren zu einem eigenständigen Gebiet innerhalb der nichtlinearen Optik geworden ist [Agr95]. Die Kompression

von Laserpulsen auf wenige Femtosekunden Dauer und der Einsatz von Solitonen in der optischen Kommunikationstechnik sind hierfür bekannte Beispiele [FBBS87, MSG80, MLH<sup>+</sup>92].

Eine der wichtigsten Erkenntnisse der Quantenmechanik ist, daß auch Materieteilchen Wellencharakter zeigen [Bro24]. Während die ersten experimentellen Nachweise von Materiewellen mit Hilfe von Elektronen erbracht wurden [Dav28], stehen seit der Entwicklung der Laserkühltechniken für neutrale Atome in den 1980er Jahren (Überblick in [AR97, Mv99]) atomare Materiewellen im Mittelpunkt des Interesses [Mey01]. Im Gegensatz zu Licht zeigen Materiewellen selbst im Vakuum Dispersion: Ein räumlich lokalisiertes Wellenpaket der Breite  $\Delta x$  hat nach der Heisenbergschen Unschärferelation eine Impulsunschärfe von  $\Delta p \sim \hbar/\Delta x$ . Die endliche Breite der Impulsverteilung führt zum räumlichen Zerfließen des Wellenpakets.

Ebenso wie die Erfindung des Lasers in den 1960er Jahren die Entwicklung der nichtlinearen Optik ermöglicht hat, steht mit der experimentellen Realisierung von atomaren Bose-Einstein Kondensaten (BEC) im Jahr 1995 [AEM<sup>+</sup>95, DMA<sup>+</sup>95, BSTH95] nun auch eine Quelle nichtlinearer Materiewellen zur Verfügung. Die Nichtlinearität wird dabei durch die elastischen Stöße der Atome im Kondensat hervorgerufen und kann — je nach verwendeter atomarer Spezies — repulsiv oder attraktiv sein. Wird das BEC in einem eindimensionalen atomaren Wellenleiter eingeschlossen, so zeigt die Dynamik der Materiewellen eine enge Analogie zur Propagation von Laserpulsen in optischen Fasern — beide Systeme werden durch eine nichtlineare Schrödingergleichung beschrieben. Diese Analogie hat in den letzten Jahren eine Reihe von Experimenten in der nichtlinearen Atomoptik inspiriert, wovon besonders die Erzeugung von dunklen und hellen Solitonen hervorgehoben werden soll [BBD<sup>+</sup>99, DSF<sup>+</sup>00, SPTH02, KSF<sup>+</sup>02].

Eine der Besonderheiten von Laserpulsen in optischen Fasern ist, daß sich durch die Wahl geeigneter Materialien für die Herstellung der Faser sowie geeigneter Intensitäten und Wellenlängen des Lichts sowohl die Dispersion als auch die Nichtlinearität der Laserpulse sehr gut experimentell kontrollieren lassen. So können Medien mit normaler oder anomaler Dispersion ebenso wie mit attraktiver oder repulsiver Nichtlinearität hergestellt werden. Für die Kontrolle der Dispersion ist in diesem Zusammenhang der Begriff „Dispersionsmanagement“ geprägt worden [ST97]. Während die Nichtlinearität eines Bose-Einstein Kondensats mit Hilfe von Feshbach-Resonanzen kontrolliert und sogar von repulsiv auf attraktiv umgestellt werden kann [IAS<sup>+</sup>98, DCC<sup>+</sup>01], stellt sich die Frage, ob Dispersionsmanagement auch für Materiewellen möglich ist.

Eine Möglichkeit, die Dispersion von Materiewellen zu verändern, ist die Verwendung eines schwachen periodischen Potentials. Aus der Festkörperphysik ist bekannt, daß Elektronen in periodischen Potentialen eine veränderte Dispersionsrelation aufweisen, wenn ihr Quasiimpuls am Rand der Brillouinzone liegt [AM01]. Dem kann durch die Einführung einer „effektiven Masse“ in den dynamischen

Gleichungen Rechnung getragen werden, die sowohl positive als auch negative Werte annehmen kann. Die Dynamik von atomaren Materiewellen in optisch erzeugten periodischen Potentialen ist in den letzten zehn Jahren Gegenstand zahlreicher experimenteller und theoretischer Arbeiten gewesen [JD96], wobei derzeit vor allem nichtlineare und quantenstatistische Effekte untersucht werden [MMC<sup>+</sup>01, GME<sup>+</sup>02]. Ein großer Vorteil gegenüber analogen Systemen in der Festkörperphysik besteht dabei darin, daß sich die optischen Potentiale für Atome sehr genau experimentell kontrollieren lassen.

In der hier vorliegenden Arbeit soll das Prinzip des Dispersionsmanagements mit einem periodischen Potential für atomare Materiewellen demonstriert und in Experimenten zur nichtlinearen Atomoptik angewandt werden.

- Mit der Erzeugung eines Bose-Einstein Kondensats von  $^{87}\text{Rb}$ -Atomen wurde eine Quelle nichtlinearer Materiewellen fertiggestellt. Dabei konnte auf umfangreiche experimentelle Vorarbeiten aufgebaut werden; der Stand des Experiments zu Beginn meiner Diplomarbeit ist in [For01] dokumentiert. Eine optische Dipolfalle wurde als Wellenleiter für das Kondensat aufgebaut. Auf diese Weise konnte für die Materiewellen ein zur nichtlinearen Faseroptik analoges System realisiert werden.
- Entlang des Wellenleiters wurde ein periodisches Dipolpotential angelegt. In diesem „optischen Gitter“ wurden für die Dynamik in Gittern typische Phänomene wie Bloch-Oszillationen und Landau-Zener-Tunneln der Atome beobachtet. Im Gegensatz zu früheren Experimenten [RSN97, MMC<sup>+</sup>01] konnte dabei die Einhüllende der Materiewellenpakete im periodischen Potential räumlich aufgelöst abgebildet werden. Dies ermöglichte es, erstmals auch den Einfluß des Gitters auf die Dispersion der Einhüllenden der Wellenpakete zu beobachten.
- Mit Hilfe des periodischen Potentials wurde die Dispersion von ultrakalten thermischen Atomen experimentell kontrolliert und damit erstmals Dispersionsmanagement für Materiewellen demonstriert. Das aus jedem Lehrbuch zur Festkörperphysik bekannte Konzept der effektiven Masse konnte in einem Experiment direkt veranschaulicht werden. Zur Beschreibung der Experimente wurde ein einfaches theoretisches Modell entwickelt und numerisch ausgewertet.
- Die Technik des Dispersionsmanagements wurde auf ein Bose-Einstein Kondensat im Wellenleiter angewandt. Es wurden starke Hinweise auf die Entstehung von atomaren Gittersolitonen beobachtet: Durch die Präparation des Kondensats mit negativer effektiver Masse konnte das Auseinanderfließen des atomaren Wellenpakets verhindert werden, obwohl die Wechselwirkung zwischen den Atomen im Kondensat repulsiv ist. Weitere Tests

werden derzeit durchgeführt. In einer numerischen Simulation der Dynamik des Kondensats im periodischen Potential wurde für die Parameter des Experiments die Entstehung eines Gittersolitons beobachtet.

Diese Diplomarbeit ist wie folgt gegliedert:

Kapitel 1 stellt die theoretischen Grundlagen zusammen, die für das Verständnis der Experimente mit thermischen Atomen und Bose-Einstein Kondensaten in periodischen optischen Potentialen wichtig sind. Es werden numerische Methoden vorgestellt, die zur Simulation der Experimente eingesetzt wurden. Kapitel 2 gibt einen Überblick über den verwendeten experimentellen Aufbau. Ein Schwerpunkt liegt dabei auf der Beschreibung der zur Manipulation der Atome verwendeten optischen Dipolpotentiale. In Kapitel 3 werden die Herstellung von Bose-Einstein Kondensaten in unseren Experimenten beschrieben und experimentelle Ergebnisse zur Charakterisierung der Kondensate präsentiert. Kapitel 4 stellt die Ergebnisse zum Dispersionsmanagement für Materiewellen im linearen Regime vor. Dabei wurde mit einem inkohärenten atomaren Ensemble gearbeitet. In Kapitel 5 wird die Technik des Dispersionsmanagements auf die nichtlinearen Materiewellen eines Bose-Einstein Kondensats angewandt und es werden Ergebnisse zu atomaren Gittersolitonen beschrieben.

# Kapitel 1

## Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die theoretischen Grundlagen der Experimente zum Dispersionsmanagement für Materiewellen erläutert. Neben einer Einführung in die Grundidee der Experimente stehen dabei die Bereitstellung analytischer und numerischer Methoden im Vordergrund, die in dieser Diplomarbeit zur Interpretation der experimentellen Ergebnisse verwendet wurden.

Am Beispiel eines gaußschen Wellenpakets werden zunächst das Phänomen der Dispersion und die Idee des Dispersionsmanagements vorgestellt. Dispersionsmanagement beruht auf der Manipulation der effektiven Masse in einem periodischen Potential. Daher wird die Bloch-Theorie von Materiewellen in periodischen Potentialen kurz zusammengefaßt, in deren Rahmen das Konzept der effektiven Masse entwickelt wurde. In unserem Experiment dient ein Bose-Einstein Kondensat als Quelle nichtlinearer Materiewellen. Die Beschreibung des Kondensats in einem Wellenleiter durch eine eindimensionale Gross-Pitaevskii Gleichung wird hergeleitet. Die nichtlineare Dynamik des Kondensats in einem schwachen periodischen Potential wird im Rahmen einer effektive-Masse-Theorie diskutiert. Nichtlineare Effekte wie Solitonen und Pulscompression werden vorgestellt. Abschnitt 1.5 behandelt numerische Methoden, die zur Auswertung der experimentellen Ergebnisse zum Dispersionsmanagement benötigt wurden. Am Ende des Kapitels wird auf die Erzeugung des Wellenleiters und des periodischen Potentials durch Dipolkräfte eingegangen.

### 1.1 Dispersion von Materiewellen

Die Dispersion von Materiewellen und die Grundidee des Dispersionsmanagements können am Beispiel eines gaußschen Wellenpakets verdeutlicht werden. Da Dispersion ein lineares Phänomen ist, wird von nichtlinearen Effekten zunächst abgesehen. Die Beschreibung eines inkohärenten atomaren Ensembles durch gaußförmige Wellenpakete wird in Kapitel 4 zur Interpretation der Experimente verwendet.

### 1.1.1 Dispersion freier Teilchen

Im Gegensatz zu Licht zeigen Materiewellen selbst im Vakuum Dispersion, wie im folgenden verdeutlicht wird. Wir beschränken uns auf den eindimensionalen Fall, da unsere Experimente in einem eindimensionalen Wellenleiter stattfinden. Die Schrödingergleichung für freie Teilchen lautet dann

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t). \quad (1.1)$$

Sie hat ebene Wellen mit Wellenvektoren  $k$  und Energien  $E(k)$  als Eigenzustände, die Dispersionsrelation

$$E(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (1.2)$$

ist quadratisch in  $k$ .

Ein zum Zeitpunkt  $t = 0$  in einem Bereich  $\pm\sigma/2$  um den Ort  $x_0$  lokalisiertes Atom mit Wellenvektor  $k_0$  kann durch ein gaußförmiges Wellenpaket

$$\Psi(x, 0) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{\sigma^2}\right] e^{ik_0(x-x_0)} \quad (1.3)$$

beschrieben werden. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung  $|\Psi(x, 0)|^2$  für die Beobachtung des Teilchens im Ortsraum hat eine Breite (Standardabweichung)  $\Delta x := \sqrt{\langle \hat{x}^2 \rangle_{t=0} - \langle \hat{x} \rangle_{t=0}^2} = \sigma/2$ . Die Wellenfunktion im Impulsraum zur Zeit  $t = 0$  ergibt sich durch Entwicklung nach ebenen Wellen,

$$\Psi(k, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \Psi(x, 0) e^{-ikx} dx. \quad (1.4)$$

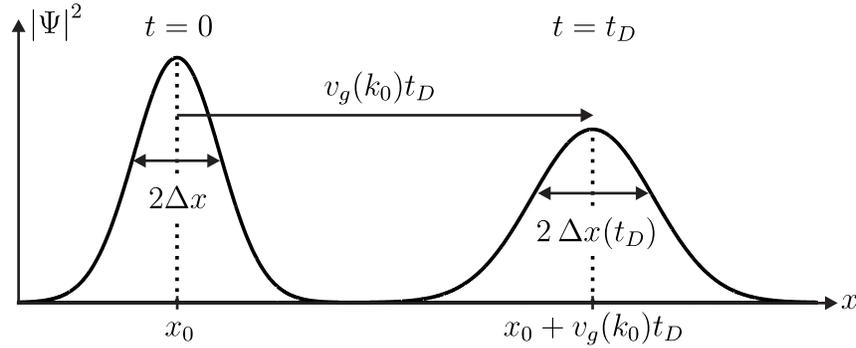
Sie entspricht einer Impulsverteilung um den Wert  $\hbar k_0$  herum, deren Breite im hier betrachteten Fall gemäß  $\Delta p = \hbar/2\Delta x$  durch die Heisenbergsche Unschärferelation gegeben ist.

Wir interessieren uns nun für das Wellenpaket nach einer Zeit  $t$  der freien Propagation (Abb. 1.1). Man erhält es durch Integration der Schrödingergleichung im Impulsraum:

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \Psi(k, 0) e^{-\frac{i}{\hbar} E(k)t} e^{ikx} dk. \quad (1.5)$$

Gl. 1.5 zeigt, daß die Dynamik allein durch die Dispersionsrelation  $E(k)$  bestimmt ist. Das Wellenpaket bewegt sich mit der Gruppengeschwindigkeit

$$v_g(k_0) := \frac{1}{\hbar} \left. \frac{dE(k)}{dk} \right|_{k_0} = \frac{\hbar k_0}{m} \quad (1.6)$$



**Abbildung 1.1** : Dispersion eines gaußschen Wellenpakets nach Propagation für eine Dispersionszeit,  $t = t_D$ .

fort, gleichzeitig nimmt die Breite der Wahrscheinlichkeitsverteilung mit der Zeit zu:

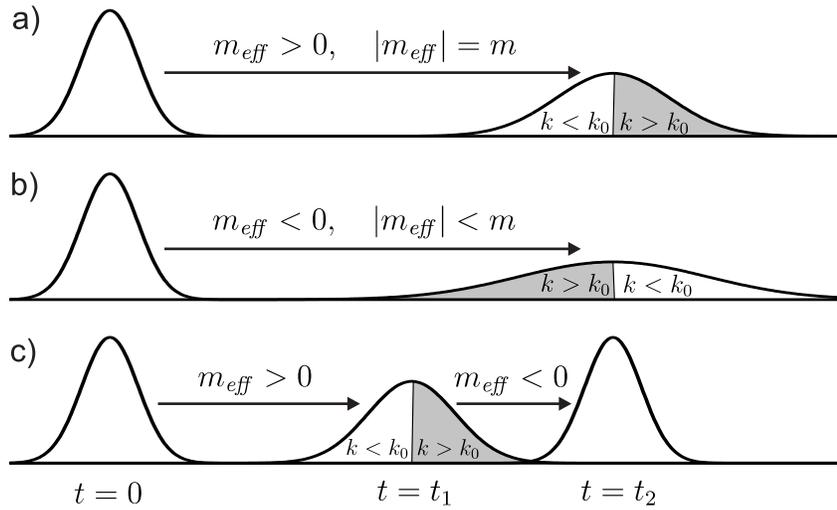
$$\Delta x(t) := \sqrt{\langle \hat{x}^2 \rangle_t - \langle \hat{x} \rangle_t^2} = \Delta x \sqrt{1 + \left( \frac{t}{t_D} \right)^2}, \quad t_D = \frac{2m(\Delta x)^2}{\hbar} \quad (1.7)$$

Das Wellenpaket zerfließt aufgrund der Abhängigkeit  $v_g(k)$  der Gruppengeschwindigkeit vom Wellenvektor  $k$  auf einer charakteristischen Zeitskala  $t_D$ , der Dispersionszeit.

### 1.1.2 Ein Parameter zur experimentellen Kontrolle der Dispersion

Wie läßt sich die Dispersion von Materiewellen beeinflussen? Aus Gl. 1.2 erkennt man, daß die Dispersionsrelation die Masse  $m$  der Atome als Parameter enthält. In Abschnitt 1.2.2 wird gezeigt, daß die Masse in der Dispersionsrelation unter bestimmten Bedingungen durch einen experimentell kontrollierbaren Parameter, die effektive Masse  $m_{eff}$ , ersetzt werden kann. Über die effektive Masse läßt sich dann die Abhängigkeit der Gruppengeschwindigkeit von  $k$  und damit die Dispersion kontrollieren:

- Für  $m_{eff} > 0$  ist  $v_g(k) = \hbar k / m_{eff}$  monoton steigend in  $k$ , d.h. Wellen mit größerem  $k$  propagieren schneller. Dies entspricht der normalen Dispersion freier Teilchen. Während zum Zeitpunkt  $t = 0$  im Wellenpaket 1.3 keine Korrelation zwischen Ort und Wellenvektor besteht, sammeln sich nach der Propagation im vorderen Teil des Wellenpakets Beiträge von Wellenvektoren  $k > k_0$  und im hinteren Teil Wellenvektoren  $k < k_0$  an (Abb. 1.2(a)).
- Für  $m_{eff} < 0$  fällt  $v_g(k)$  monoton, d.h. nun propagieren große  $k$ -Vektoren



**Abbildung 1.2** : Dispersionsmanagement: durch die effektive Masse wird die Dynamik der Materiewellen beeinflusst (siehe Text). Gezeigt sind Wellenpakete nach Propagationszeiten  $0 < t_1 < t_2$  bei unterschiedlichen Werten von  $m_{eff}$ .

langsamer. Die Dispersion der Materiewellen ist anomal, auch dies führt zum Zerfließen des Wellenpakets (Abb. 1.2(b)).

- Wie schnell das Wellenpaket auseinanderfließt, d.h. der Wert der Dispersionszeit  $t_D$ , hängt in beiden Fällen von  $|m_{eff}|$  ab. In Abb. 1.2(b) ist  $|m_{eff}|$  kleiner als in Abb. 1.2(a), daher ist das Wellenpaket nach der selben Propagationszeit  $t_2$  schon breiter geworden.

Besonders schön sieht man den Einfluß der negativen effektiven Masse, wenn das Vorzeichen von  $m_{eff}$  während der Propagation geändert wird (Abb. 1.2(c)). Da die Energie  $E(k)$  nach Umschalten auf  $m_{eff} < 0$  nun ebenfalls ein negatives Vorzeichen hat, propagiert das Wellenpaket gemäß Gl. 1.5 „rückwärts in der Zeit“, bis es seine Ausgangsbreite wieder erreicht hat. Diese kann aufgrund der Unschärferelation bei Abwesenheit eines nichtlinearen Terms in der Schrödingergleichung nicht unterschritten werden. In Abschnitt 4.5 dieser Diplomarbeit wird ein Experiment vorgestellt, in dem genau das in Abb. 1.2 dargestellte Verhalten beobachtet wird.

Da die Dispersionsrelation quadratisch ist, bleibt das Wellenpaket in allen Fällen gaußförmig, solange die effektive Masse als konstant angenommen werden kann. Eine Abweichung vom gaußförmigen Profil ist daher ein Indiz für eine Abhängigkeit der effektiven Masse vom Wellenvektor.

## 1.2 Materiewellen in periodischen Potentialen

Zur Manipulation der Dispersionsrelation wird in unseren Experimenten ein „optisches Gitter“ verwendet, d.h. ein periodisches Potential, das von einer stehenden Lichtwelle erzeugt wird (siehe Abschnitt 1.6). Es gibt zwei theoretische Ansätze zur Beschreibung der Dynamik von Materiewellen in diesem Potential [PBB<sup>+</sup>97]: In einer quantenoptischen Theorie wird der Einfluß des Potentials durch Photonen-austausch zwischen den Atomen und den Laserstrahlen beschrieben. In diesem Abschnitt wird jedoch ein theoretischer Ansatz aus der Festkörperphysik gewählt: Die Dynamik von Materiewellen in periodischen Potentialen wird im Rahmen der Bloch-Theorie behandelt. Dabei wird zunächst von nichtlinearen Effekten (d.h. Wechselwirkung zwischen den Atomen) abgesehen, diese werden in Abschnitt 1.4 näher betrachtet.

### 1.2.1 Bloch-Theorem und Bandstruktur

Wir betrachten Atome in einem eindimensionalen periodischen Potential der Form

$$V(x) = V_0 \cos^2(k_L x). \quad (1.8)$$

Das Potential ist periodisch mit einer Gitterkonstanten  $R = \pi/k_L$ , wobei  $k_L$  der Wellenvektor der Laserstrahlen ist, die das Potential erzeugen. In unseren Experimenten ist die Modulationstiefe  $V_0$  des Potentials von der Größenordnung der Photonen-Rückstoßenergie,  $V_0 \sim E_r = \hbar^2 k_L^2 / 2m$ . Daher sind die Atome nicht stark an einzelne Potentialtöpfe gebunden, sondern können in dem Gitter propagieren. Auch für tiefere Potentiale wäre noch Dynamik der Atome durch Tunneln zwischen den einzelnen Potentialtöpfen möglich. Diese Prozesse sind jedoch wesentlich langsamer, was die Beobachtung im Experiment unnötig erschweren würde.

Das Bloch-Theorem [AM01] besagt, daß die Eigenzustände  $\Phi(x)$  mit Energie  $E$  des Hamiltonoperators  $\hat{H}$  für ein beliebiges periodisches Potential  $U(x)$ ,

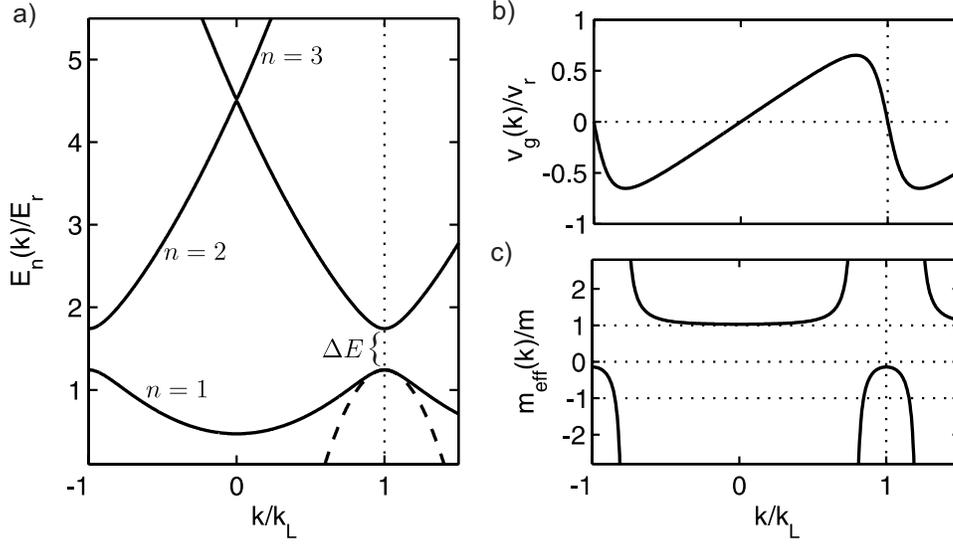
$$\hat{H}\Phi(x) \equiv \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x) \right] \Phi(x) = E\Phi(x), \quad (1.9)$$

als Produkte aus einer ebenen Welle mit Wellenvektor  $k$  und einer Funktion mit der Periodizität des Gitters gewählt werden können:

$$\Phi_{n,k}(x) = e^{ikx} u_{n,k}(x), \quad u_{n,k}(x + R) = u_{n,k}(x). \quad (1.10)$$

In unserem Fall ist  $U(x) = V(x)$  cosinusförmig und Gl. 1.9 wird zur Mathieu-Gleichung, die Bloch-Funktionen  $\Phi_{n,k}(x)$  sind durch die Mathieu-Funktionen gegeben [McL64].

Die Dispersionsrelation  $E = E_n(k)$  für die Blochfunktionen  $\Phi_{n,k}(x)$  zeigt eine Bandstruktur, d.h. sie ist eine periodische Funktion des Quasiimpulses  $k$  mit



**Abbildung 1.3** : Erste Brillouinzone der Bandstruktur von Atomen in einem periodischen Potential der Modulationstiefe  $V_0 = E_r$ . Die Bandstruktur wurde numerisch bestimmt, siehe Abschnitt 1.5.1. (a) Energie  $E_n(k)$  der ersten drei Bänder als Funktion des Quasiimpulses  $k$ . Für schwache periodische Potentiale ist die Energielücke zwischen den beiden niedrigsten Energiebändern  $\Delta E \simeq V_0/2$ . Die Energielücke zwischen den Bändern  $n = 2$  und  $n = 3$  ist dagegen sehr viel kleiner. Die harmonische Approximation des niedrigsten Energiebandes (gestrichelt), hier für den Rand der Brillouinzone gezeigt, entspricht der Näherung konstanter effektiver Masse. (b) Gruppengeschwindigkeit  $v_g(k)$  im untersten Band, in Einheiten der Photonen-Rückstoßgeschwindigkeit  $v_r = \frac{\hbar k_L}{m}$ . (c) Effektive Masse  $m_{\text{eff}}(k)$  im untersten Band.

der Periodizität  $2\pi/R = 2k_L$ . Die Quantenzahl  $n$  bezeichnet man als Bandindex. Abb. 1.3(a) zeigt die Bandstruktur in der ersten Brillouinzone, d.h. für  $-k_L < k \leq k_L$ . Betrachten wir das niedrigste Energieband ( $n = 1$ ) genauer: im Zentrum der Brillouinzone ( $k \sim 0$ ) weicht die Bandstruktur für schwache periodische Potentiale mit  $V_0 \sim E_r$  nur unwesentlich von der quadratischen Dispersionsrelation freier Teilchen ab. Am Rand der Brillouinzone ( $k \sim k_L$ ) entsteht jedoch aufgrund des periodischen Potentials eine Energielücke  $\Delta E$  zwischen erstem und zweitem Energieband und die Dispersionsrelation weicht deutlich von derjenigen freier Teilchen ab. Dies werden wir uns zunutze machen, um die Dispersion der Materiewellen zu beeinflussen.

### 1.2.2 Dynamik von Bloch-Wellenpaketen: Gruppengeschwindigkeit und effektive Masse

Wie verändert sich die Dynamik von Materiewellen in Gegenwart des periodischen Potentials? Da die Blochfunktionen aus Gl. 1.10 eine Basis des Hilbertraums darstellen, läßt sich jede Wellenfunktion nach Blochfunktionen entwickeln. Die Dynamik ist dann durch die Dispersionsrelation  $E_n(k)$  gegeben:

$$\Psi(x, t) = \sum_n \int_{-k_L}^{k_L} f_n(k) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n(k)t} \Phi_{n,k}(x) dk. \quad (1.11)$$

In dieser Form läßt sich  $\Psi(x, t)$  bei Kenntnis der Entwicklungskoeffizienten  $f_n(k)$  zum Zeitpunkt  $t = 0$ , der Bandstruktur und der Blochfunktionen prinzipiell auswerten. Um Dispersionsmanagement in der in Abschnitt 1.1.2 diskutierten Form realisieren zu können, müssen jedoch noch zwei wichtige Bedingungen erfüllt sein:

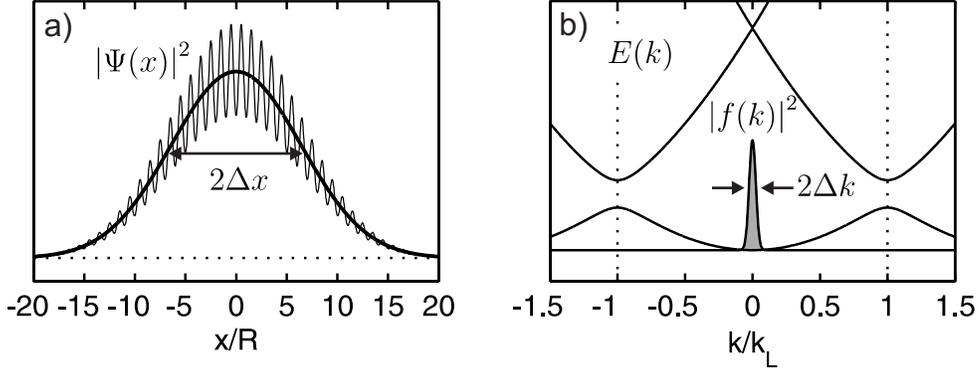
1. Wir müssen die Atome in einem einzigen Energieband präparieren. Solange durch externe Kräfte keine Übergänge in höherer Energiebänder induziert werden, können diese dann bei der Dynamik vernachlässigt werden: im folgenden wird nur noch  $n = 1$  betrachtet.
2. Die Quasiimpulsverteilung des atomaren Wellenpakets muß schmaler als die Ausdehnung der Brillouinzone sein, d.h. die Entwicklungskoeffizienten  $f(k)$  sind um einen Wert  $k_0$  herum konzentriert, die Breite  $\Delta k$  der Verteilung muß  $\Delta k \ll 2k_L$  erfüllen. Dies hat aufgrund der Unschärferelation zur Folge, daß die Einhüllende des Wellenpakets nur langsam veränderlich auf der Längenskala  $R$  des Potentials sein darf, für die Breite der Einhüllenden gilt  $\Delta x \gg R$  (siehe Abb. 1.4). Diese Einschränkung ist verständlich: nur wenn das Wellenpaket viele Perioden des Gitter überdeckt, kommt der periodische Charakter des Potentials zur Geltung. Ist die Ausdehnung des Wellenpakets dagegen vergleichbar mit der Gitterperiode, so beschreibt man das System besser durch eine geringe Zahl unterscheidbarer Potentialmulden.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so kann die Beschreibung des Wellenpakets im Rahmen der aus der Festkörperphysik bekannten „effektive-Masse-Näherung“ erfolgen [Cal91], in der nichtlinearen Optik entspricht dem eine „multiple scales analysis“ [SS94, SSS96].

Die Idee ist, das Energieband  $E(k)$  um den Wert  $k_0$  herum zu entwickeln:

$$E(k) = E(k_0) + (k - k_0) \left. \frac{\partial E(k)}{\partial k} \right|_{k_0} + \frac{1}{2} (k - k_0)^2 \left. \frac{\partial^2 E(k)}{\partial k^2} \right|_{k_0} + \dots \quad (1.12)$$

Wir schreiben die Blochfunktionen in der Form  $\Phi_k(x) = e^{ikx} u_k(x)$  und nehmen an, daß sich  $u_k(x)$  mit  $k$  sehr viel langsamer verändert als  $f(k)$  (vgl. Bedingung 2), so daß wir es durch  $u_{k_0}(x)$  ersetzen können. Damit vernachlässigen wir



**Abbildung 1.4** : Wellenpaket im Zentrum der Brillouinzone ( $k_0 = 0$ ) eines periodischen Potentials mit  $V_0 = E_r$ . (a) Wellenfunktion im Ortsraum. Die Oszillationen der Blochfunktionen mit der Gitterperiode  $R$  sind deutlich zu sehen. Die Einhüllende (dicke Linie) ist nur langsam veränderlich auf dieser Skala, es gilt  $\Delta x \gg R$ . (b) Bandstruktur  $E(k)$  und Entwicklungskoeffizienten der Wellenfunktion nach Blochfunktionen,  $f(k)$ , die auf einen schmalen Bereich  $\Delta k$  um den zentralen Wellenvektor  $k_0$  begrenzt sind.

die Dynamik innerhalb der einzelnen Potentialmulden, wir tragen der schnellen Oszillation der Wellenfunktion  $\Psi(x, t)$  im periodischen Potential nur noch durch eine zeitlich konstante Funktion Rechnung. Die Dynamik beschränkt sich dann auf die Einhüllende  $A(x, t)$ . Damit ergibt sich in zweiter Ordnung in  $(k - k_0)$ :

$$\Psi(x, t) = \Phi_{k_0}(x) e^{-\frac{i}{\hbar} E(k_0)t} \underbrace{\int_{-k_L}^{k_L} f(k) e^{i(k-k_0)(x-v_g(k_0)t)} e^{-i \frac{\hbar(k-k_0)^2}{2m_{eff}(k_0)} t} dk}_{\equiv A(x,t)}. \quad (1.13)$$

wobei die Gruppengeschwindigkeit und die effektive Masse durch

$$v_g(k_0) = \frac{1}{\hbar} \left. \frac{\partial E(k)}{\partial k} \right|_{k_0}, \quad m_{eff}(k_0) = \hbar^2 \left( \left. \frac{\partial^2 E(k)}{\partial k^2} \right|_{k_0} \right)^{-1} \quad (1.14)$$

gegeben sind. In unserem Fall können diese Ausdrücke mit Hilfe der Dispersionsrelation bestimmt werden. Ist diese nicht bekannt, so können  $v_g$  und  $m_{eff}$  in Störungstheorie aus  $\Phi_{k_0}$  und  $E(k_0)$  berechnet werden [Cal91].

Man sieht, daß sich das Wellenpaket in Gl. 1.13 mit der Gruppengeschwindigkeit bewegt: der in  $(k - k_0)$  lineare Exponent ist konstant für  $(x - v_g(k_0)t) = \text{const}$ . Der quadratische Term ist für die Dispersion verantwortlich, hier erscheint die effektive Masse. Gruppengeschwindigkeit und effektive Masse sind Funktionen des zentralen Quasiimpulses  $k_0$  des Wellenpakets. Abb. 1.3(b,c) zeigt ihre Abhängigkeit vom Quasiimpuls für das niedrigste Energieband. Die Näherung konstanter Gruppengeschwindigkeit und effektiver Masse sowie das Abbrechen

der Entwicklung (1.12) nach der zweiten Ordnung entspricht einer parabolischen Approximation der Dispersionsrelation, die in Abb. 1.3(a) gezeigt ist.

Aus der Definition der effektiven Masse (1.14) erkennt man, daß  $m_{eff}$  im wesentlichen ein Maß für die Krümmung der Dispersionsrelation  $E(k)$  ist. Ist die Krümmung positiv, wie etwa im Zentrum der Brillouinzone, so ist auch  $m_{eff} > 0$ . Für schwache periodische Potentiale ist dort außerdem  $|m_{eff}| \simeq m$  (Abb. 1.3(c)). Geht man weiter in Richtung des Randes der Brillouinzone, so steigt  $m_{eff}$  zunächst stark an, d.h. die Dispersion ist stark unterdrückt. Eine negative effektive Masse findet man dagegen in einem relativ schmalen Bereich um den Rand der Brillouinzone. Dort ist für schwache Potentiale außerdem  $|m_{eff}| \ll m$ , d.h. die Dispersion ist besonders stark. Damit ist das Verfahren für Dispersionsmanagement klar: Die effektive Masse wird kontrolliert, indem Wellenpakete mit unterschiedlichem zentralen Quasiimpuls  $k_0$  präpariert werden.

Falls man an der schnellen Oszillation der Blochfunktion  $\Phi_{k_0}(x) = e^{ik_0x} u_{k_0}(x)$  in (1.13) nicht interessiert ist (was in unseren Experimenten der Fall ist, da Strukturen auf der Längenskala der Gitterperiode von unserem Abbildungssystem nicht aufgelöst werden können), kann man die Effektive-Masse-Näherung gleich in die Schrödingergleichung „einbauen“, die dann nur noch die Dynamik der Einhüllenden  $A(x, t)$  beschreibt:

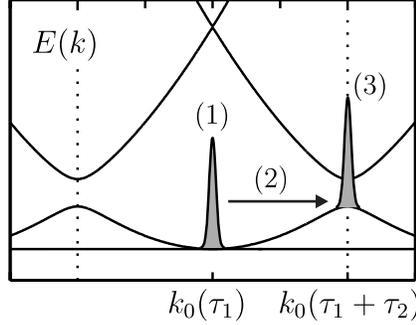
$$i\hbar \left[ \frac{\partial}{\partial t} + v_g \frac{\partial}{\partial x} \right] A(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m_{eff}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} A(x, t). \quad (1.15)$$

In unseren Experimenten werden auch die Grenzen der Näherung konstanter effektiver Masse deutlich werden. Falls die Breite des Wellenpakets im  $k$ -Raum größer als der Bereich annähernd konstanter effektiver Masse ist, so müssen höhere Terme in der Entwicklung (1.12) berücksichtigt werden, was zu z.T. drastischen Änderungen der Form des Wellenpakets während der Propagation führt.

### 1.2.3 Adiabatische Präparation der Atome im periodischen Potential

Um Dispersionsmanagement zu realisieren, müssen atomare Wellenpakete mit variablem zentralen Quasiimpuls  $k_0$  im niedrigsten Energieband präpariert werden. Dies geschieht in zwei Schritten, bei denen Modulationstiefe und Geschwindigkeit des periodischen Potentials relativ zu den Atomen verändert werden:

1. Zunächst wird das periodische Potential mit einer linearen Amplitudenrampe  $V_0(t) = V_0 t / \tau_1$  der Dauer  $\tau_1$  eingeschaltet. Ist die Rampe hinreichend langsam und bewegt sich das Potential relativ zu den Atomen nicht, so ist der Präparationsprozeß adiabatisch und das Wellenpaket wird im niedrigsten Energieband im Zentrum der Brillouinzone um  $k_0 = 0$  herum präpariert (Position (1) in Abb. 1.5).



**Abbildung 1.5** : Präparation des Wellenpakets im periodischen Potential (siehe Text).  $k_0(t)$  bezeichnet den zentralen Quasiimpuls des Wellenpakets am Ende des jeweiligen Präparationsschritts. Hier ist beispielhaft die Präparation am Rand der Brillouinzone bei  $k_0(\tau_1 + \tau_2) = k_L$  dargestellt.

2. Im zweiten Schritt wird das Potential im Laborsystem mit konstanter Beschleunigung  $a = -v/\tau_2$  auf eine Geschwindigkeit  $-v$  beschleunigt (Schritt (2) in Abb. 1.5). Dies verändert den Quasiimpuls der Atome im Bezugssystem des nun bewegten periodischen Potentials von  $k_0(\tau_1) = 0$  auf  $k_0(\tau_1 + \tau_2) = mv/\hbar$ . Ist der Beschleunigungsprozeß ebenfalls adiabatisch, bleiben die Atome dabei im niedrigsten Energieband.

Danach kann die Propagation des Wellenpakets mit der effektiven Masse  $m_{eff}(k_0)$  untersucht werden.

Damit der Präparationsprozeß adiabatisch ist und somit Übergänge der Atome in höhere Energiebänder vermieden werden, muß das Kriterium für Adiabaticität

$$\left| \langle n, k | \frac{d}{dt} | 1, k \rangle \right|^2 \ll \frac{|E_n(k) - E_1(k)|^2}{\hbar^2} \quad (1.16)$$

erfüllt sein [Mes90], wobei  $|n, k\rangle$  die Blochzustände bezeichnet. Dabei sind Übergänge zwischen benachbarten Bändern besonders kritisch, daher wird im folgenden nur  $n = 2$  betrachtet. Für Potentiale  $V_0 \leq E_r$  läßt sich dieses Kriterium leicht auswerten [DPR<sup>+</sup>96], wir betrachten wieder den Fall  $V_0 = E_r$  (für tiefere Potentiale ist das Kriterium weniger streng).

Für die Dauer der linearen Amplitudenrampe im Zentrum der Brillouinzone muß nach 1.16  $\tau_1 \gg 1/32\sqrt{2}\omega_r = 0.9 \mu\text{s}$  gelten [DPR<sup>+</sup>96], dabei bezeichnet  $\omega_r = E_r/\hbar = 2\pi \times 3.8 \text{ kHz}$  die Photonen-Rückstoßfrequenz. In unseren Experimenten ist immer  $\tau_1 > 100 \mu\text{s}$ , also weit im adiabatischen Regime. Bemerkenswert ist, daß am Rand der Brillouinzone kein adiabatisches Anschalten des Potentials möglich wäre, da dort für  $V_0 = 0$  die Energielücke verschwindet und somit  $E_2(k_L) - E_1(k_L) = 0$  ist. Daher muß in unserem Experiment die Präparation in zwei Schritte unterteilt werden.

Für die Beschleunigung des periodischen Potentials genügt es, das Adiabazitätskriterium am Rand der Brillouinzone auszuwerten, da dort die Energielücke am kleinsten ist. Mit der Endgeschwindigkeit  $v = v_r = \frac{\hbar k_L}{m}$  ergibt sich  $\tau_2 \gg 8/\omega_r = 0.34$  ms, dieses Kriterium ist also wesentlich strenger und limitiert letztlich die Dauer des Präparationsprozesses. Im Experiment ist typischerweise  $\tau_2 = 2.4$  ms.

Es bleibt noch zu bemerken, daß es auch eine obere Grenze für die Dauer der Präparation gibt: Damit die Art der Präparation die Dynamik des Wellenpakets nicht wesentlich beeinflußt, muß die Präparation schneller als die charakteristischen Zeitskalen des Experiments sein, d.h. es muß  $\tau_1 + \tau_2 \ll t_D$  gelten. Diese Bedingung ist im Experiment gut erfüllt, da in der Regel  $t_D > 20$  ms ist. Im nichtlinearen Fall sollte zusätzlich  $\tau_1 + \tau_2 \ll t_{NL}$  gelten (siehe Abschnitt 1.4.2). Diese Bedingung ist schwieriger zu erfüllen, da für die im Experiment realisierbaren Atomzahlen  $t_{NL}$  nur wenige Millisekunden beträgt. Simulationen zeigen jedoch, daß der Präparationsprozeß die Dynamik der Wellenpakete auch für  $\tau_1 + \tau_2 \simeq t_{NL}$  nicht wesentlich stört (vgl. Abschnitt 1.5.2).

### 1.3 Bose-Einstein Kondensation

In unseren Experimenten sind Bose-Einstein Kondensate die Quelle kohärenter, nichtlinearer Materiewellen: Es stellt sich heraus, daß die Atome im Kondensat durch eine makroskopische Wellenfunktion beschrieben werden können, die nichtlineare Dynamik zeigt. Im folgenden wird die für unser Experiment relevante Theorie der Kondensate vorgestellt.

Das Phänomen der Bose-Einstein Kondensation (BEC) wurde bereits in den Jahren 1924-25 von N.S. Bose [Bos24] und A. Einstein [Ein24, Ein25] theoretisch vorhergesagt: Oberhalb einer kritischen Phasenraumdicke

$$\rho_c = n\lambda_{dB}^3 = 2.61 \quad (1.17)$$

wird der Grundzustand eines Systems von Bosonen makroskopisch besetzt. Dabei ist  $n$  die Dichte der Bosonen und

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}} \quad (1.18)$$

die thermische deBroglie-Wellenlänge für ein Teilchen der Masse  $m$  in einem Gas der Temperatur  $T$ .  $\lambda_{dB}$  kann als die räumliche Ausdehnung der Materiewellenpakete in dem Gas interpretiert werden. Die kritische Phasenraumdicke (1.17) ist dann erreicht, wenn  $\lambda_{dB}$  größer als der mittlere Teilchenabstand  $n^{-1/3}$  wird. In unserem Experiment findet die Kondensation in einem atomaren Gas in einer harmonischen Falle mit Fallenfrequenzen  $\omega_{x,y,z}$  statt. Für eine gegebene Atomzahl  $N$  in der Falle läßt sich Gl. 1.17 dann als Bedingung für die Temperatur

des Gases formulieren: BEC tritt auf für Temperaturen unterhalb der kritischen Temperatur [DGPS99]

$$T_c^0 = 0.94 \frac{\hbar \omega_{ho}}{k_B} N^{1/3} \quad (1.19)$$

wobei  $\omega_{ho} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}$  das geometrische Mittel der Fallenfrequenzen ist. Dabei wurden Wechselwirkungseffekte zwischen den Atomen vernachlässigt.

Während die Bose-Einstein Kondensation zunächst im Zusammenhang mit der Suprafluidität von flüssigem Helium Bedeutung erlangte, hat die Erzeugung von BECs in verdünnten atomaren Gasen [AEM<sup>+</sup>95, DMA<sup>+</sup>95, BSTH95] seit 1995 einen regelrechten Boom der BEC-Physik ausgelöst. Vorläufiger Höhepunkt war die Verleihung des Nobelpreises 2001 an E.A. Cornell, C.E. Wieman und W. Ketterle für die Realisierung und Untersuchung der ersten Alkali-Kondensate. Die Physik der atomaren Bose-Einstein Kondensate wird in zahlreichen Übersichtsartikeln ausführlich behandelt [KDS99, DGPS99].

### 1.3.1 Die Gross-Pitaevskii Gleichung

Die Physik schwach wechselwirkender BECs kann in einer Molekularfeldnäherung durch die Gross-Pitaevskii Gleichung (GPE) für den Erwartungswert des Kondensat-Feldoperators  $\Psi(\mathbf{r}, t) = \langle \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \rangle$  beschrieben werden [Gro61, Gro63, Pit61]. Dabei werden Anregungen aus dem Kondensat vernachlässigt, was die Gültigkeit der Theorie auf  $T = 0$  einschränkt. Für Temperaturen  $T \ll T_c$  und hinreichend große Kondensate ( $N \gg 1$ ) ist die Beschreibung durch die GPE jedoch eine gute Näherung.

In einem verdünnten Gas ( $n^{-1/3} \gg a_s$ ) bei niedriger Temperatur ( $\lambda_{dB}(T) \gg a_s$ ) wird die Wechselwirkung zwischen den Atomen durch elastische s-Wellen-Streuung dominiert, mit der Streulänge  $a_s$  als einzigem Parameter. Das interatomare Potential kann dann durch ein Pseudopotential verschwindender Reichweite  $U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = g\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  ersetzt werden, wobei

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m} \quad (1.20)$$

als Kopplungskonstante bezeichnet wird. Die Gross-Pitaevskii Gleichung für ein BEC in einem externen Potential  $V_{ext}(\mathbf{r})$  lautet damit

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_{ext}(\mathbf{r}) + g |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \Psi(\mathbf{r}, t), \quad (1.21)$$

wobei  $\Psi$  auf die Teilchenzahl normiert ist,  $\int |\Psi|^2 d^3r = N$ . Der nichtlineare Term  $g |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$  in der GPE beschreibt die Wechselwirkung der Atome. Für positive Streulänge  $a_s > 0$  ist die Wechselwirkung repulsiv, für  $a_s < 0$  attraktiv. Im folgenden nehmen wir die Streulänge  $a_s$  immer als positiv an, dies entspricht der repulsiven Wechselwirkung der  $^{87}\text{Rb}$ -Atome in unserem Experiment.

### 1.3.2 Das Kondensat in der Thomas-Fermi Näherung

Wir betrachten den stationären Grundzustand des Kondensats in einer Falle. Die Wellenfunktion des Kondensats hat dann die Form  $\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi(\mathbf{r})e^{-\frac{i}{\hbar}\mu t}$  mit dem chemischen Potential  $\mu$ . Im Grenzfall großer Kondensate dominiert der nichtlineare Term in der Gross-Pitaevskii Gleichung über den kinetischen Term, abgesehen vom Rand der Kondensate. Der kinetische Term in der GPE kann dann vernachlässigt werden, Gleichung 1.21 wird zu

$$\mu\Psi(\mathbf{r}) = [V_{ext}(\mathbf{r}) + g|\Psi(\mathbf{r})|^2]\Psi(\mathbf{r}). \quad (1.22)$$

Diese Näherung wird als Thomas-Fermi Näherung bezeichnet. Für Kondensate in einem harmonischen Fallenpotential

$$V_{ext}(\mathbf{r}) = \frac{m}{2}(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2). \quad (1.23)$$

gilt sie, solange das Verhältnis aus nichtlinearer und kinetischer Energie  $E_{nl}/E_{kin} \simeq \frac{Na_s}{a_{ho}} \gg 1$  ist, mit der mittleren Oszillatorlänge  $a_{ho} = \sqrt{\hbar/m\omega_{ho}}$ . In Experimenten ist die Thomas-Fermi Näherung in der Regel gültig: Für  $2 \times 10^4$   $^{87}\text{Rb}$ -Atome mit einer Streulänge  $a_s = 5.4$  nm in einer Falle mit Fallenfrequenzen  $\omega_{x,y} = 2\pi \times 20$  Hz und  $\omega_z = 2\pi \times 57$  Hz ist  $\frac{Na_s}{a_{ho}} = 53$ .

In der Thomas-Fermi Näherung lassen sich eine Reihe einfacher analytischer Ausdrücke für wichtige Größen des Bose-Einstein Kondensats in der Falle finden, die im folgenden kurz zitiert werden [DGPS99]:

Die Dichte der Atome im Kondensat hat das Profil (Abb. 1.6)

$$n(\mathbf{r}) = |\Psi(\mathbf{r})|^2 = \begin{cases} g^{-1}[\mu - V_{ext}(\mathbf{r})] & \text{für } \mu > V_{ext}(\mathbf{r}), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (1.24)$$

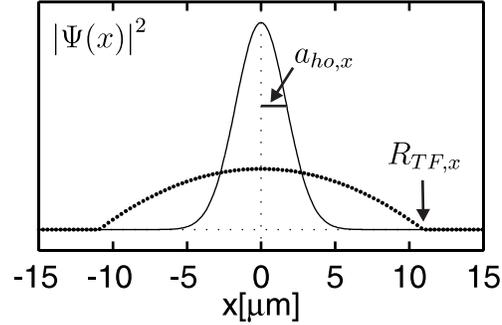
Dies ist abgesehen von einem schmalen Bereich um den Rand des Kondensats herum eine gute Beschreibung der beobachteten Dichteverteilung. Das chemische Potential hat dabei den Wert

$$\mu = \frac{\hbar\omega_{ho}}{2} \left( \frac{15Na_s}{a_{ho}} \right)^{2/5}. \quad (1.25)$$

Daraus läßt sich der sog. Thomas-Fermi Radius des Kondensats bestimmen:

$$R_{TF,i} = \frac{\omega_{ho}}{\omega_i} a_{ho} \left( \frac{15Na_s}{a_{ho}} \right)^{1/5}, \quad i = x, y, z. \quad (1.26)$$

Die Wechselwirkungsenergie pro Teilchen ist ebenfalls mit dem chemischen Potential verknüpft:  $E_{ww}/N = (2/7)\mu$ . Diese Größen spielen bei der Charakterisierung des Kondensats eine wichtige Rolle.



**Abbildung 1.6** : Profil der Grundzustandswellenfunktion in  $x$ -Richtung eines BECs aus  $2 \times 10^4$   $^{87}\text{Rb}$ -Atomen in einer harmonischen Falle mit Fallenfrequenzen  $\omega_{x,y} = 2\pi \times 20$  Hz und  $\omega_z = 2\pi \times 57$  Hz. Die Thomas-Fermi-Näherung (gepunktet) spiegelt das parabolische Fallenpotential wider. Der Thomas-Fermi Radius ist  $R_{TF,x} = 10.9 \mu\text{m}$ , die atomare Dichte ist durch die repulsive Wechselwirkung deutlich reduziert. Im Vergleich dazu der Grundzustand der Falle für verschwindende Wechselwirkung (durchgezogen) mit der Oszillatorlänge  $a_{ho,x} = 2.0 \mu\text{m}$ .

### 1.3.3 Das BEC im Wellenleiter: Die Gross-Pitaevskii Gleichung in einer Dimension

Die Experimente zum Dispersionsmanagement wurden alle in einem eindimensionalen Wellenleiter für Atome durchgeführt. Dadurch können die Atome gegen die Gravitation gehalten werden, während die Dynamik entlang des Wellenleiters nicht signifikant beeinflusst wird. Dies ermöglicht längere Beobachtungszeiten; gleichzeitig ist Eindimensionalität eine wichtige Voraussetzung für die Erzeugung atomarer Solitonen. Im folgenden wird eine eindimensionale Gross-Pitaevskii Gleichung für die Dynamik des Kondensats im Wellenleiter hergeleitet.

Wir betrachten einen Wellenleiter, der die Atome transversal in ein harmonisches Potential einschließt:

$$V_D(y, z) = \frac{m}{2} \omega_{\perp}^2 (y^2 + z^2). \quad (1.27)$$

Ohne den nichtlinearen Term wäre die GPE mit diesem Potential separabel und die Wellenfunktion könnte als Produkt aus einem longitudinalen und einem transversalen Anteil geschrieben werden,  $\Psi(x, y, z) = \Psi(x)\Psi_{\perp}(y)\Psi_{\perp}(z)$ . Obwohl die Nichtlinearität die longitudinalen und transversalen Freiheitsgrade koppelt, ist der Produktansatz eine gute Näherung, solange die nichtlineare Energie kleiner als die Energie  $\hbar\omega_{\perp}$  der transversalen Anregungen ist. Wird das Kondensat im transversalen Grundzustand des Wellenleiters präpariert, so wird es auch während der dynamischen Entwicklung im Grundzustand bleiben, der Wellenleiter ist dann „single mode“.

Als transversale Wellenfunktion wird die Grundzustandswellenfunktion des

harmonischen Oszillators mit der Oszillatorlänge  $a_{\perp} = \sqrt{\hbar/m\omega_{\perp}}$  verwendet. Dabei werden Effekte der Nichtlinearität auf die transversale Wellenfunktion vernachlässigt.

Der Produktansatz wird in die dreidimensionale GPE 1.21 eingesetzt, die Gleichung mit  $\Psi_{\perp}^*(y)\Psi_{\perp}^*(z)$  multipliziert und über die transversalen Freiheitsgrade integriert. Dies führt auf folgende 1D Gross-Pitaevskii Gleichung:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{gN}{A_{\perp}}|\Psi(x,t)|^2 \right] \Psi(x,t). \quad (1.28)$$

Dabei ist

$$A_{\perp} = \left[ \int dy |\Psi_{\perp}(y)|^4 \int dz |\Psi_{\perp}(z)|^4 \right]^{-1} = 2\pi a_{\perp}^2 \quad (1.29)$$

ein Maß für die Ausdehnung des transversalen Zustandes. In dieser Darstellung der GPE ist  $\Psi(x,t)$  auf 1 normiert.

Nun können wir das single-mode Kriterium noch etwas genauer fassen. Die maximale Nichtlinearität muß kleiner als die transversale Oszillatorenergie sein:

$$\frac{gN}{A_{\perp}} \max_x (|\Psi(x,t)|^2) \lesssim \hbar\omega_{\perp} \quad \Leftrightarrow \quad N \cdot \max_x (|\Psi(x,t)|^2) \lesssim \frac{1}{2a_s}. \quad (1.30)$$

Nach [MvLvdHS99] kann dieses Kriterium sogar um einen Faktor 2.4 verfehlt werden, bevor transversale Instabilitäten einsetzen. Die zweite Form der Ungleichung zeigt, daß das single-mode Kriterium unabhängig von  $\omega_{\perp}$  eine Einschränkung der linearen atomaren Dichte in  $x$ -Richtung ist: für  $^{87}\text{Rb}$  ist  $1/2a_s = 93$  Atome/ $\mu\text{m}$ .

Die 1D Gross-Pitaevskii Gleichung entspricht der aus der nichtlinearen Optik bekannten nichtlinearen Schrödingergleichung für Laserpulse in optischen Fasern, wenn man Orts- und Zeitableitungen vertauscht [Agr95]. Die Wechselwirkung zwischen den Atomen übernimmt dabei die Rolle des nichtlinearen Mediums aus der Optik. Aufgrund dieser Analogie lassen sich viele aus der nichtlinearen Optik bekannte Effekte mit den Materiewellen eines Bose-Einstein Kondensats im Wellenleiter beobachten.

## 1.4 Nichtlineare Effekte in periodischen Potentialen

Wie verändert die Nichtlinearität des Bose-Einstein Kondensats die Dynamik der Materiewellen im Gitter? Wir suchen eine Lösung der 1D Gross-Pitaevskii Gleichung mit periodischem Potential,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_0 \cos^2(k_L x) + \frac{gN}{A_{\perp}}|\Psi(x,t)|^2 \right] \Psi(x,t). \quad (1.31)$$

Aufgrund der Nichtlinearität sind die Blochfunktionen  $\Phi_{n,k}(x)$  keine Eigenfunktionen von 1.31. Dennoch könnte man analog zu 1.11 eine Entwicklung nach den vollständigen Blochfunktionen mit nun zeitabhängigen Entwicklungskoeffizienten  $f_n(k, t)$  versuchen. Für ein lokalisiertes Wellenpaket würde dies auf eine sehr große Zahl dynamischer Gleichungen für die  $f_n(k, t)$  führen. Ein anderer Weg ist vielversprechender: analog zum linearen Fall soll eine effektive-Masse-Theorie entwickelt werden, bei der die Wellenfunktion auf der Skala der Potentialmulden des Gitters wieder nur durch eine einzige Blochfunktion beschrieben wird. Die Vorhersagen dieser einfachen Theorie können zu ihrer Überprüfung mit der in Abschnitt 1.5.2 beschriebenen numerischen Lösung der GPE mit periodischem Potential verglichen werden. Über die effektive Masse kann auch im nichtlinearen Fall Dispersionsmanagement realisiert werden.

### 1.4.1 Effektive-Masse-Theorie für schwache Nichtlinearität

Unter folgenden Bedingungen läßt sich eine effektive-Masse-Theorie für die Gross-Pitaevskii Gleichung formulieren:

1. Analog zum linearen Fall betrachten wir ein Wellenpaket, dessen Entwicklung nach Blochfunktionen auf eine Verteilung im Quasiimpulsraum führt, die sehr viel schmäler als die Ausdehnung der 1. Brillouinzone ist. Dann kann die Beschreibung durch eine langsam veränderliche Einhüllende erfolgen.
2. Die Nichtlinearität wird als Störung betrachtet, genauer: die maximale Nichtlinearität muß klein gegenüber der Bandlücke über dem niedrigsten Energieband sein. Dies rechtfertigt die Einschränkung der Dynamik auf ein einziges Energieband. Starke Nichtlinearitäten würden zu einer Kopplung der Energiebänder ober- und unterhalb der Energielücke führen.

Als Ansatz für die Wellenfunktion wird ein Produkt aus einer Blochfunktion im niedrigsten Energieband ( $n = 1$ ) und der langsam variierenden Einhüllenden  $A(x, t)$  gewählt:

$$\Psi(x, t) = A(x, t)\Phi_{n,k_0}(x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_n(k_0)t} \quad (1.32)$$

Im Rahmen der effektive-Masse-Theorie oder einer multiple scales analysis ergibt sich dann folgende reduzierte 1D GPE für die Einhüllende [SZ98, Hil01]:

$$i\hbar \left[ \frac{\partial}{\partial t} + v_g \frac{\partial}{\partial x} \right] A(x, t) = \left[ -\frac{\hbar^2}{2m_{\text{eff}}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha_{NL} \frac{gN}{A_{\perp}} |A(x, t)|^2 \right] A(x, t). \quad (1.33)$$

wobei  $v_g$  und  $m_{\text{eff}}$  wie in 1.14 definiert sind. Die Blochfunktionen sind auf die Länge des Gitters  $L$  normiert. Der Vorfaktor

$$\alpha_{NL} = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx |u_{n,k_0}(x)|^4 \quad (1.34)$$

trägt der Änderung der Stärke der Nichtlinearität durch die Blochfunktion Rechnung: Innerhalb einer Periode des Potentials ist die Dichte der Atome inhomogen verteilt (vgl. Abb. 1.4), dies führt zu einer erhöhten Nichtlinearität auch für die Einhüllende. Für schwache Potentiale ( $V_0 \sim E_r$ ) ist  $\alpha_{NL} \in \mathcal{O}(1)$ , dabei am Rand der Brillouinzone immer etwas größer als im Zentrum (z.B. ist für  $V_0 = E_r$  am Rande der Brillouinzone  $\alpha_{NL} = 1.56$ , im Zentrum  $\alpha_{NL} = 1.03$ ).

Die Bandlücke über dem niedrigsten Energieband ist für schwache Potentiale  $\Delta E \simeq V_0/2$ . Damit die Nichtlinearität als Störung betrachtet werden kann und somit die Einschränkung der Beschreibung auf das niedrigste Band gerechtfertigt ist, muß also gelten:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{NL} g N}{A_{\perp}} \max_x (|A(x, t)|^2) &\ll \Delta E \simeq \frac{V_0}{2} \\ \Leftrightarrow N \cdot \max_x (|A(x, t)|^2) &\ll \frac{V_0}{4\hbar\omega_{\perp}\alpha_{NL}a_s}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

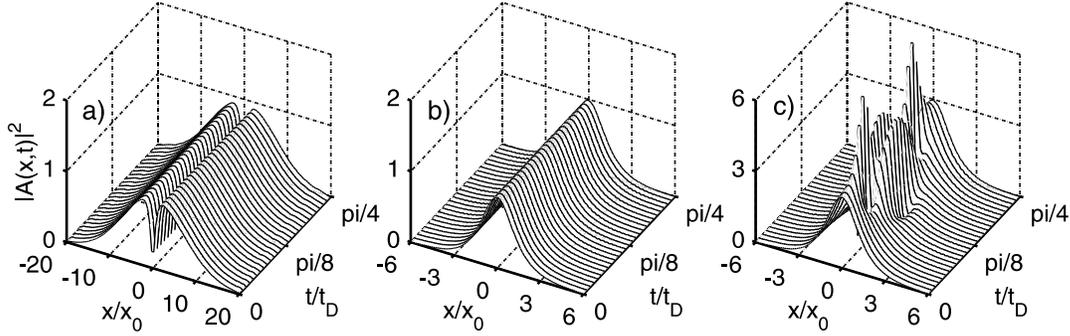
Die zweite Form der Ungleichung ist wieder eine Einschränkung der linearen atomaren Dichte. Für  $V_0 = E_r$  und eine transversale Fallenfrequenz  $\omega_{\perp} = 2\pi \times 200$  Hz entspricht die rechte Seite 560 Atomen/ $\mu\text{m}$ . Diese Einschränkung ist also zumindest für die transversalen Fallenfrequenzen in unserem Experiment weniger streng als die single-mode Bedingung für den Wellenleiter, Gl. 1.30.

Bei näherer Betrachtung der nichtlinearen Schrödingergleichung 1.33 für die Einhüllende drängt sich eine Frage auf: Auch der nichtlineare Term enthält in der Kopplungskonstanten  $g$  die Masse der Atome — warum wird diese nicht ebenfalls durch eine effektive Masse ersetzt? Der Grund für die „Ungleichbehandlung“ der Massen in der Gross-Pitaevskii Gleichung liegt darin, daß beide mit der Dynamik der Atome auf völlig unterschiedlichen Längenskalen verknüpft sind: Die effektive Masse im kinetischen Term der Gleichung ist ein Parameter, der der veränderten Dispersionsrelation in Gegenwart des periodischen Potentials auf einer Längenskala von typischerweise einigen  $\mu\text{m}$  Rechnung trägt. Die Masse im nichtlinearen Term stammt dagegen aus der Beschreibung der atomaren Kollisionen durch s-Wellen Streuung. Die charakteristische Längenskala hierfür ist die Streulänge  $a_s = 5.4$  nm. Auf dieser im Vergleich zur Periode des Potentials sehr kurzen Skala ist die Dispersionsrelation unverändert. Die Manipulation der effektiven Masse erlaubt also die Änderung des Vorzeichens des kinetischen Terms in der eindimensionalen Gross-Pitaevskii Gleichung.

## 1.4.2 Atomare Bragg-Gittersolitonen

Die Gleichung 1.33 für die Einhüllende  $A(x, t)$  der Wellenfunktion ist die aus der nichtlinearen Optik bekannte nichtlineare Schrödingergleichung. Diese Gleichung hat Solitonen als Lösung [Agr95, Has90]. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

- Für gleiches Vorzeichen von Dispersions- und nichtlinearem Term, d.h.  $m_{\text{eff}}g > 0$ , sind dunkle Solitonen Lösungen. Dunkle Solitonen zeichnen sich



**Abbildung 1.7** : Solitonen als Lösung der nichtlinearen Schrödingergleichung für die Einhüllende  $A(x, t)$ . Gezeigt ist jeweils eine Solitonperiode  $t_{sol} = \frac{\pi}{4}t_D$  für ein BEC mit repulsiver Wechselwirkung ( $g > 0$ ). (a) Dunkles Soliton erster Ordnung in einem BEC mit gaußförmigem Profil für  $m_{eff} = +m$ . (b) Helles Soliton erster Ordnung für  $m_{eff} = -m$ . (c) Helles Soliton 3. Ordnung mit derselben Anfangswellenfunktion wie in (b) jedoch 9 mal so großer Atomzahl.

dadurch aus, daß sich ein Dichteminimum durch das BEC bewegt, ohne zu zerfließen (Abb. 1.7(b)).

- Für  $m_{eff}g < 0$  sind helle Solitonen eine Lösung, bei denen das gesamte Kondensat als nicht zerfließendes Wellenpaket propagiert (Abb. 1.7(a)).

Sowohl dunkle [BBD<sup>+</sup>99, DSF<sup>+</sup>00] als auch helle [SPTH02, KSF<sup>+</sup>02] Solitonen wurden bereits mit atomaren BECs realisiert. Dabei wurden Kondensate mit positiver bzw. negativer Streulänge verwendet, die Dispersionsrelation wurde nicht manipuliert, d.h.  $m_{eff} = m > 0$ . Da sich das BEC nicht in einem Gitter befand, erfüllte die Kondensatwellenfunktion  $\Psi(x, t)$  selbst, und nicht nur die Einhüllende  $A(x, t)$  die nichtlineare Schrödingergleichung.

In unseren Experimenten liegt eine grundlegend andere Situation vor. Wir interessieren uns für solitonartiges Verhalten der Einhüllenden  $A(x, t)$  in einem periodischen Potential. Da für <sup>87</sup>Rb-Atome die Wechselwirkung repulsiv ist ( $g > 0$ ) und das Vorzeichen von  $g$  im Experiment nicht geändert werden kann, ist der Bereich um die Bandkante am Rand der Brillouinzone ( $k = k_L$ ) interessant, in dem  $m_{eff}(k) < 0$  ist und somit helle Solitonen erwartet werden. Solche „Bragg-Gittersolitonen“ wurden in der nichtlinearen Faseroptik bereits realisiert [ES96], für Materiewellen aber bisher nur theoretisch untersucht [ZPMW99, SZ98]. Tatsächlich handelt es sich bei Gittersolitonen nicht um Solitonen im strengen Sinne, sondern um nicht zerfließende „solitäre Wellen“, da die Gross-Pitaevskii Gleichung mit periodischem Potential nicht integrierbar ist [Rem94].

Solitonen beruhen auf dem Wechselspiel von Dispersion und Nichtlinearität. Für beide Effekte kann eine charakteristische Zeitskala definiert werden, die Dispersionszeit  $t_D$  (vergleiche Gl. 1.7) und die nichtlineare Zeit  $t_{NL}$ , die mit den

jeweiligen Energien verknüpft sind:

$$t_{NL} = \frac{\hbar}{E_{NL}} = \frac{\hbar A_{\perp}}{\alpha_{NL}|g|N \max_x (|A(x, t=0)|^2)}, \quad t_D = \frac{2|m_{eff}|x_0^2}{\hbar}, \quad (1.36)$$

dabei ist  $x_0$  die Breite der Einhüllenden zur Zeit  $t = 0$ . Solitonen treten in Ordnungen  $\mathcal{N}$  auf (wobei  $\mathcal{N}$  ganzzahlig und positiv ist). Für ein Soliton der Ordnung  $\mathcal{N}$  ist

$$t_D = 2\mathcal{N}^2 t_{NL}. \quad (1.37)$$

Für das fundamentale Soliton ( $\mathcal{N} = 1$ ) kann dies als Kompensation von Dispersion und Nichtlinearität verstanden werden. Das fundamentale helle Soliton besitzt eine Einhüllende

$$A(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2x_0}} \operatorname{sech} \left( \frac{x - v_g t}{x_0} \right) e^{-i\omega_e t} \quad (1.38)$$

mit

$$x_0 = \frac{2\hbar^2 A_{\perp}}{|m_{eff}|\alpha_{NL}gN}, \quad \omega_e = \frac{\hbar}{2|m_{eff}|x_0^2} = \frac{1}{t_D}, \quad (1.39)$$

Man erkennt, daß die Einhüllende ihre Form über die Zeit beibehält und nicht auseinanderfließt. Dieses helle Soliton kann nur am Rand der Brillouinzone erzeugt werden, da nur dort  $m_{eff} < 0$  ist. Bemerkenswert ist dabei, daß in Abwesenheit der Nichtlinearität Wellenpakete am Rand der Brillouinzone wegen  $|m_{eff}(k_L)| < |m_{eff}(0)|$  sogar schneller auseinanderfließen als im Zentrum. Im nichtlinearen Fall wird das Auseinanderfließen durch die *repulsive* Wechselwirkung der Atome verhindert, während man in einem naiven Bild aufgrund der gegenseitigen Abstoßung der Atome ein beschleunigtes Auseinanderfließen erwarten würde (was für normale Dispersion ( $m_{eff} > 0$ ) tatsächlich eintritt).

Solitonen höherer Ordnung zerfließen ebenfalls nicht, zeigen jedoch periodisches „Atmen“ der Form von  $|A(x, t)|^2$  mit der Soliton-Periode  $t_{sol} = \frac{\pi}{4}t_D$  (Abb. 1.7(c)). Dabei treten vorübergehend sehr viel schmalere Wellenpakete und höhere Nichtlinearitäten als für  $t = 0$  auf. Dies kann dazu führen, daß während der Propagation die Voraussetzungen für die Beschreibung durch eine eindimensionale effektive-Masse-Theorie nicht mehr erfüllt sind.

Für die experimentelle Beobachtung ist die Zahl der Atome im fundamentalen Soliton eine wichtige Größe. Die Atomzahl in einem Soliton der Ordnung  $\mathcal{N}$  ergibt sich aus 1.36 und 1.37 zu

$$N = \mathcal{N}^2 \frac{\hbar}{|m_{eff}|\omega_{\perp}\alpha_{NL}a_s x_0}. \quad (1.40)$$

Sind die Potentialtiefe  $V_0$  (und damit  $m_{eff}$  und  $\alpha_{NL}$ ), die transversale Fallenfrequenz  $\omega_{\perp}$  und die Breite des Anfangswellenpakets  $x_0$  einmal festgelegt, so muß die Atomzahl im Experiment entsprechend eingestellt werden. Für  $\mathcal{N} = 1$ ,  $V_0 = E_r$

( $m_{\text{eff}}(k_L)/m = -0.142$ ),  $\omega_{\perp} = 2\pi \times 100$  Hz und  $x_0 = 5 \mu\text{m}$  ergibt sich  $N = 195$  Atome. Diese Zahl ist sehr niedrig und stellt hohe Ansprüche an Präparation und Abbildung des BECs. Die Bedingung für Eindimensionalität und die Anwendbarkeit der effektive-Masse-Näherung sind jedoch erfüllt. Eine numerische Stabilitätsanalyse zeigt, daß Solitonen stabil gegenüber leichten Abweichungen der Atomzahl vom geforderten Wert ebenso wie gegenüber Abweichungen der Anfangswellenfunktion von der sech-Pulsform sind [Agr95]. Während der Dynamik paßt sich die Breite des Solitons an, bis Bedingung 1.40 erfüllt ist.

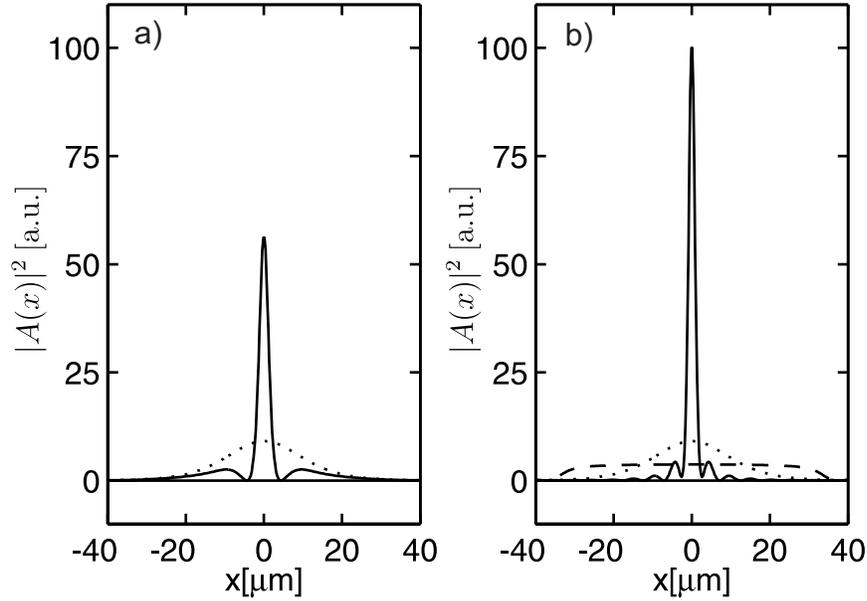
### 1.4.3 Pulskompression

Pulskompression ist ein Phänomen, das mit Solitonen eng verknüpft ist, da es ebenfalls auf einem Wechselspiel von Nichtlinearität und Dispersion beruht. Damit ein Puls komprimiert werden kann, muß seine Impulsverteilung breiter werden. Ansonsten verbietet die Unschärferelation eine Kompression des Wellenpakets. Der Hamiltonoperator für ein freies Teilchen ist im Impulsraum diagonal, daher wird die Impulsverteilung durch die Dynamik nicht verändert und das Wellenpaket kann — unabhängig vom Vorzeichen der effektiven Masse — nicht komprimiert werden. Pulskompression wird erst durch nichtlineare Dynamik möglich, die Nichtlinearität in der 1D Gross-Pitaevskii Gleichung verbreitert die Impulsverteilung des Wellenpakets. Wird zusätzlich das Vorzeichen der effektiven Masse negativ gewählt, führt dies zur Verringerung der Breite des Wellenpakets im Ortsraum.

Eine Möglichkeit zur Pulskompression, die in der nichtlinearen Optik angewandt wird [Agr95, BTR<sup>+</sup>97], bieten Solitonen höherer Ordnung. Solitonen höherer Ordnung gehen zu Beginn ihrer periodischen Dynamik durch eine Phase der Kompression. Wird die Dynamik zu diesem Zeitpunkt unterbrochen, kann ein schmalerer Puls beobachtet werden. Abb. 1.8(a) zeigt ein Soliton 3. Ordnung zum Zeitpunkt der größten Kompression. Ein Problem bei diesem Kompressionschema ist, daß nur der zentrale Teil des Pulses komprimiert wird, seitlich bleiben breite Flanken. Dies hat seine Ursache darin, daß die Dispersion die Phase, die der Wellenfunktion durch die Nichtlinearität aufgeprägt wird, nur im Zentrum des Pulses kompensieren kann [Agr95].

Mit der räumlichen Auflösung des Abbildungssystems in unserem Experiment läßt sich ein auf diese Weise komprimierter Puls nur schlecht detektieren. Der schmale Puls kann vor dem Hintergrund der breiten Flanken nicht aufgelöst werden. Die Pulsqualität kann jedoch verbessert werden, wenn das Wellenpaket zunächst mit normaler Dispersion ( $m_{\text{eff}} > 0$ ) für eine gewisse Zeit expandieren kann. Dadurch entwickelt das Wellenpaket in einem größeren Bereich eine quadratische Phase. Erst dann wird auf  $m_{\text{eff}} < 0$  umgeschaltet, um das Wellenpaket zu komprimieren (Abb. 1.8(b)). Diese Methode der Pulskompression für Materiewellen soll in Zukunft in unserem Experiment untersucht werden.

Es bleibt noch zu bemerken, daß durch die starke Kompression des Wellen-



**Abbildung 1.8** : Pulskompression durch nichtlineare Dynamik und anomale Dispersion für  $V_0 = E_r$ ,  $\omega_\perp = 2\pi \times 200$  Hz und ein sech-Anfangswellenpaket mit  $x_0 = 5 \mu\text{m}$  und  $N = 878$  Atomen. Die 1D Gross-Pitaevskii Gleichung für die Einhüllende  $A(x, t)$  wurde im Rahmen der Näherung konstanter effektiver Masse integriert. (a) Soliton-Kompression durch ein Soliton 3. Ordnung. Gezeigt ist das Anfangswellenpaket (gepunktet) und das Soliton zum Zeitpunkt maximaler Kompression nach  $t = 1.80$  ms Propagation mit  $m_{eff} < 0$  (durchgezogen). Während die Wellenfunktion in der Mitte stark komprimiert wird, bleiben die Flanken an der Basis des Pulses breit. (b) Optimierte Kompression: Anfangswellenpaket (gepunktet), Wellenpaket nach  $t = 10$  ms Propagation mit  $m_{eff} > 0$  (gestrichelt) und anschließend  $t = 1.67$  ms mit  $m_{eff} < 0$  (durchgezogen).

pakets hohe Nichtlinearitäten und eine relativ breite Quasiimpulsverteilung  $\Delta k$  entstehen (für die Parameter in Abb. 1.8 ist  $\Delta k \simeq 0.3 k_L$ ). Dies kann zu transversalen Anregungen im Wellenleiter und zum Zusammenbruch der Näherung konstanter effektiver Masse führen, so daß höhere Terme in der Dispersionsrelation berücksichtigt werden müssen.

#### 1.4.4 Regimes starker Nichtlinearität und tiefer periodischer Potentiale

Die hier vorgestellte effektive-Masse-Theorie für Bose-Einstein Kondensate in einem optischen Gitter ist nur gültig für relativ schwache periodische Potentiale und solange die Nichtlinearität als Störung angesehen werden kann. Während dies das Regime ist, dessen Realisierung in unseren Experimenten angestrebt wurde, soll kurz auf das Verhalten von Kondensaten in tiefen optischen Gittern und bei starker Nichtlinearität eingegangen werden. Auch in diesen Regimes kann unter bestimmten Bedingungen die Dispersion derart modifiziert sein, daß Solitonen für repulsive Wechselwirkung auftreten können:

- Ist die nichtlineare Energie in schwachen periodischen Potentialen nicht mehr sehr viel kleiner als die Energielücke über dem niedrigsten Energieband ( $E_{NL} \lesssim \Delta E \simeq V_0/2$ ), müssen höhere Bänder bei der Dynamik berücksichtigt werden. Insbesondere wird am Rand der Brillouinzone die Dynamik durch Zustände aus den Bändern direkt oberhalb ( $n = 2$ ) und unterhalb ( $n = 1$ ) der Energielücke bestimmt. In diesem Fall kann als Ansatz für die Wellenfunktion eine Blochfunktion und eine langsam veränderliche Einhüllende aus jedem der beiden Bänder verwendet werden [SZ98]. Die effektive-Masse-Theorie führt dann auf gekoppelte Gleichungen für beide Einhüllende. Es stellt sich heraus, daß die Dispersion durch die Kopplung der beiden Bänder die Dispersion durch die Krümmung jedes einzelnen Bandes dominiert. Auch in diesem Fall können Bragg-Gittersolitonen auftreten [ZPMW99].
- Wird die Nichtlinearität sogar größer als die Modulationstiefe des periodischen Potentials ( $E_{NL} > V_0$ ), so verändert sich die Bandstruktur drastisch: Am Rand der Brillouinzone tritt eine „Schleife“ im Energieband auf [WDN02, DJPS02]. Dadurch verschwindet der Bereich negativer Krümmung des niedrigsten Energiebandes.
- In tiefen periodischen Potentialen ( $V_0 \gg 10E_r$ ) sind Atome im niedrigsten Energieband bereits stark an einzelne Potentialmulden des Gitters gebunden. Dennoch können die Atome für schwache Nichtlinearitäten zwischen den einzelnen Potentialmulden tunneln und die Wellenpakete in den einzelnen Potentialmulden haben eine definierte Phasenbeziehung. Anstelle der Bloch-Theorie bietet sich die „tight-binding“ Näherung der Festkörperphysik

zur Beschreibung des Kondensats an: Das Kondensat wird durch Wellenpakete beschrieben, die in den einzelnen Potentialmulden lokalisiert sind (Wannier-Zustände) und durch eine zeitabhängige Amplitude moduliert werden. Die Dynamik dieser Amplituden wird durch eine diskrete nicht-lineare Schrödingergleichung bestimmt, die ebenfalls Solitonen als Lösung hat [CPT00, TS01, ABD<sup>+</sup>01, CMJ<sup>+</sup>02].

- Dominiert die Nichtlinearität in tiefen optischen Gittern die Tunneldynamik, so geht die Kohärenz zwischen benachbarten Potentialmulden verloren und es kommt es zur Fragmentation des Kondensats (Mott-Isolator-Übergang) [OTF<sup>+</sup>01, GME<sup>+</sup>02]. In diesem Fall kann die Dynamik nicht mehr im Rahmen einer Molekularfeldnäherung durch eine makroskopische Wellenfunktion beschrieben werden.

## 1.5 Numerische Methoden

Zur Auswertung der in Kapitel 4 und 5 vorgestellten Experimente zum Dispersionsmanagement wurden zahlreiche numerische Simulationen durchgeführt. Die dabei verwendeten Methoden wurden mit Hilfe des Programmpakets MATLAB implementiert und werden hier kurz vorgestellt. Die numerische Integration der 1D Gross-Pitaevskii Gleichung mit periodischem Potential (1.31) ermöglicht zudem eine Überprüfung der Vorhersagen der effektive Masse Theorie aus Abschnitt 1.4.1.

### 1.5.1 Numerische Bestimmung der Bandstruktur und der Blochfunktionen

Zunächst werden die Bandstruktur und die Blochfunktionen für Atome in einem periodischen Potential numerisch bestimmt. Dabei wird von einer Entwicklung des periodischen Potentials und der Blochfunktionen nach ebenen Wellen Gebrauch gemacht [AM01]. Die lineare Schrödingergleichung 1.9 kann dann im Impulsraum gelöst werden. Aus der Bandstruktur lassen sich durch Differentiation nach dem Quasiimpuls Gruppengeschwindigkeit und effektive Masse bestimmen, die als Parameter in die effektive-Masse-Theorie eingehen.

Die Entwicklung des periodischen Potentials 1.8 nach ebenen Wellen hat die Form

$$V(x) = \sum_{K'} V_{K'} e^{iK'x} = V_Q e^{iQx} + V_{-Q} e^{-iQx} + \text{const.} \quad (1.41)$$

wobei  $Q = 2k_L$  ein reziproker Gittervektor und  $V_Q = V_{-Q} = V_0/4$  die reellen Entwicklungskoeffizienten des Potentials sind. Ebenso können die Blochfunktionen

entwickelt werden:

$$\Phi_{n,k}(x) = e^{ikx} u_{n,k}(x), \quad u_{n,k}(x) = \sum_K c_{k-K} e^{-iKx}. \quad (1.42)$$

Dabei wurde verwendet, daß das periodische Potential nur ebene Wellen koppelt, die sich um einen reziproken Gittervektor  $K = m \cdot Q$  unterscheiden ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Für gegebenen Quasiimpuls  $k$  ergibt sich durch Einsetzen der Entwicklungen in 1.9 und Ausnutzen der Orthogonalität der ebenen Wellen folgende Schrödingergleichung im Impulsraum:

$$\frac{\hbar^2}{2m} (k - K)^2 c_{k-K} + V_Q c_{k-K-Q} + V_{-Q} c_{k-K+Q} = E c_{k-K}. \quad (1.43)$$

Dieses Gleichungssystem wird unter Berücksichtigung einer hinreichend großen Zahl reziproker Gittervektoren numerisch diagonalisiert (für  $V_0 \sim E_r$  reichen die typischerweise verwendeten  $|m| \leq 15$  bei weitem aus). Dies liefert die Eigenvektoren  $c_{n,k-K}$ , aus denen sich die Blochfunktionen  $\Phi_{n,k}(x)$  bestimmen lassen. Die zugehörigen Eigenwerte  $E_n$  entsprechen den Energien  $E_n(k)$  der  $n$  niedrigsten Bänder beim Quasiimpuls  $k$ . Die gesamte Bandstruktur ergibt sich durch Wiederholen der Prozedur für alle  $k$  in der ersten Brillouinzone. Die in Abb. 1.3 gezeigte Bandstruktur wurde auf diese Weise berechnet.

### 1.5.2 Numerische Integration der Gross-Pitaevskii Gleichung in einer Dimension

Die Dynamik eines Bose-Einstein Kondensats im periodischen Potential soll numerisch simuliert werden. Dazu muß die Gross-Pitaevskii Gleichung mit periodischem Potential für eine gegebene Anfangswellenfunktion integriert werden.

Die Zeitentwicklung einer quantenmechanischen Wellenfunktion ist durch den Zeitentwicklungsoperator  $U(t_1, t_0)$  bestimmt [Sak94]:

$$\Psi(x, t_1) = \hat{U}(t_1, t_0) \Psi(x, t_0). \quad (1.44)$$

Für einen zeitunabhängigen Hamiltonoperator ist

$$U(t_1, t_0) = \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_1 - t_0) \right]. \quad (1.45)$$

Zur numerischen Integration wird das Zeitintervall  $(t_1 - t_0)$  in kleine Zeitschritte  $dt$  unterteilt:  $(t_1 - t_0) = N_s dt$ . Der infinitesimale Zeitentwicklungsoperator  $U(dt) = \exp[-\frac{i}{\hbar} \hat{H} dt]$  kann nun für jeden Zeitschritt erneut ausgewertet und auf die Wellenfunktion angewandt werden. Dadurch lassen sich auch zeitabhängige Probleme integrieren.

Zur Integration der Gross-Pitaevskii Gleichung wurde eine sog. „spektrale Methode“ verwendet [Hil01, SS86]. Dabei wird der Hamiltonoperator  $\hat{H}$  in einen kinetischen Term  $K(\hat{p})$  und einen orts- und zeitabhängigen Term  $V(\hat{x}, t)$  zerlegt:

$$\hat{H} = \underbrace{-\frac{\hat{p}^2}{2m}}_{K(\hat{p})} + \underbrace{V_0 \cos^2(k_L \hat{x}) + \frac{gN}{A_\perp} |\Psi(\hat{x}, t)|^2}_{V(\hat{x}, t)}. \quad (1.46)$$

Das Ziel ist nun,  $K(\hat{p})$  im Impulsraum und  $V(\hat{x}, t)$  im Ortsraum auszuwerten. Dazu wird der infinitesimale Zeitentwicklungsoperator aufgeteilt,

$$U(dt) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} dt} \simeq e^{-\frac{i}{\hbar} K(\hat{p}) dt/2} e^{-\frac{i}{\hbar} V(\hat{x}, t) dt} e^{-\frac{i}{\hbar} K(\hat{p}) dt/2} + \mathcal{O}(dt^3) \quad (1.47)$$

wobei ein Fehler in Kauf genommen werden muß, da  $\hat{x}$  und  $\hat{p}$  nicht kommutieren. Durch das symmetrische Aufteilen der Operatoren wird der Fehler von der Ordnung  $dt^2$  auf die Ordnung  $dt^3$  erniedrigt. Da der kinetische Term im Impulsraum diagonal ist, kann er leicht mit Hilfe einer Fouriertransformation ausgewertet werden,

$$\Psi'(x, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} K(\hat{p}) dt/2} \Psi(x, t) = F^{-1} \left[ e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} dt/2} F [\Psi(x, t)] \right], \quad (1.48)$$

wobei  $F$  die Fouriertransformation bezeichnet. Dadurch reduziert sich der Aufwand zur Berechnung des kinetischen Terms auf zwei Fouriertransformationen und eine Multiplikation mit  $e^{-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} dt/2}$ . Der ortsabhängige Term  $e^{-\frac{i}{\hbar} V(x, t) dt} \Psi'(x, t)$  kann direkt durch Multiplikation im Ortsraum ausgewertet werden. Wird nun noch die inverse Fouriertransformation am Ende jedes Zeitschritts mit der Fouriertransformation am Anfang des nächsten Zeitschritts kombiniert, so ergibt sich für die volle Simulation der  $N_s$  Zeitschritte

$$\Psi(x, t_1) = \hat{P}_{1/2} \hat{R}(t) \left[ \hat{P} \hat{R}(t) \right]^{N_s-1} \hat{P}_{1/2} \Psi(x, t_0) \quad (1.49)$$

wobei

$$\hat{P}_{1/2} = F^{-1} e^{-i \frac{p^2}{2m} dt/2} F, \quad (1.50)$$

$$\hat{P} = F^{-1} e^{-i \frac{p^2}{2m} dt} F, \quad (1.51)$$

$$\hat{R}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} V(x, t) dt}. \quad (1.52)$$

Dabei ist  $\hat{R}(t)$  aufgrund der Nichtlinearität für jeden Zeitschritt erneut zu bestimmen.

Für die numerische Simulation muß nun noch die Größe des Zeitschritts  $dt$  und der Ortsauflösung  $dx$  geeignet gewählt werden. Die Ortsauflösung ist durch die Periode des Potentials bestimmt: typischerweise wurden  $2^{14}$  Punkte auf 1020

Perioden des optischen Gitters verteilt. Jede Gitterperiode von 390 nm wird damit durch rund 16 Punkte repräsentiert ( $dx = 24.3$  nm). Der Ortsauflösung  $dx$  entspricht eine Energieskala  $E_{max} = \hbar^2/2m(dx)^2$ . Die Größe des Zeitschritts wurde entsprechend zu

$$dt \sim 0.1 \frac{\hbar}{E_{max}} = 0.1 \frac{2m(dx)^2}{\hbar} \quad (1.53)$$

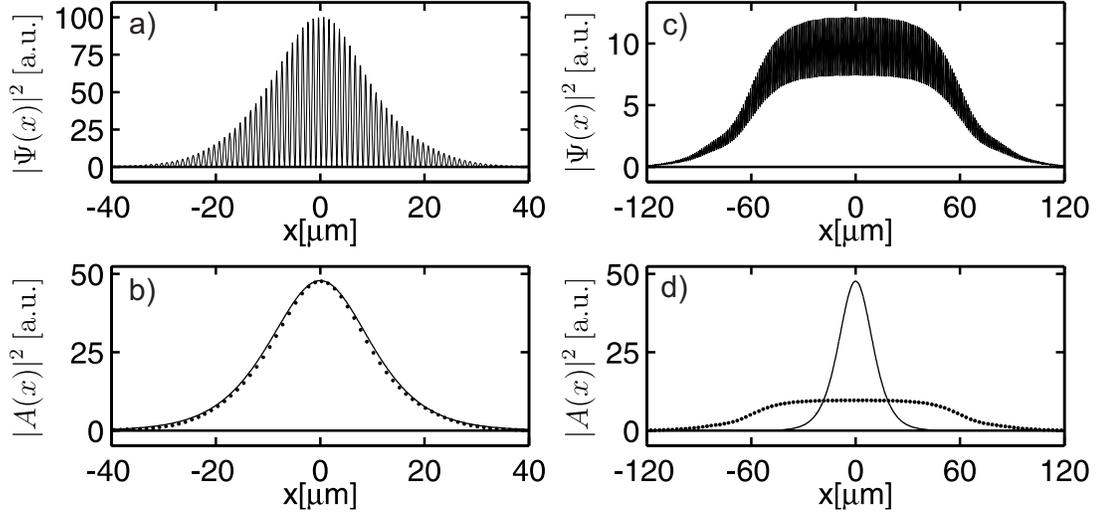
gewählt, typischerweise  $dt = 200$  ns. Für diese Parameter hat sich die hier dargestellte spektrale Methode zur Integration der 1D Gross-Pitaevskii Gleichung in der Implementierung mit MATLAB als ca. fünf mal schneller und deutlich stabiler erwiesen als die im Programmpaket mitgelieferten *ode-solver* basierend auf Runge-Kutta Verfahren.

Abbildung 1.9 zeigt Ergebnisse einer Simulation mit den oben angegebenen numerischen Parametern. Die Atomzahl in der Anfangswellenfunktion  $\Psi(x, t = 0)$  wurde so gewählt, daß nach der effektiven Masse Theorie für die Einhüllende  $A(x, t)$  ein Soliton erster Ordnung erwartet wird. Die Simulation wurde in drei Schritte unterteilt, um den Präparationsprozeß des Kondensats im optischen Gitter entsprechend dem experimentellen Vorgehen (siehe Abschnitt 1.2.3 und Kapitel 5) zu simulieren:

1. Im ersten Schritt wird das periodische Potential für 0.8 ms mit einer linearen Rampe von  $V_0 = 0$  auf  $V_0 = E_r$  angeschaltet. Damit wird das Kondensat im niedrigsten Energieband bei  $k_0 = 0$  präpariert.
2. Das periodische Potential wird in 2.4 ms mit einer konstanten Beschleunigung von einer Geschwindigkeit  $v = 0$  auf  $v = v_r = 5.88$  mm/s beschleunigt. Dadurch wird das Kondensat im niedrigsten Band am Rand der Brillouinzone ( $k_0 = k_L$ ) präpariert.
3. Im dritten Schritt propagiert das Wellenpaket für eine variable Zeit  $t$  am Rand der Brillouinzone.

Abb. 1.9 zeigt, daß das Verhalten des Wellenpakets den Vorhersagen der effektive-Masse-Theorie entspricht: das Wellenpaket zerfließt nicht, die Einhüllende zeigt die charakteristische sech-Form eines Solitons 1. Ordnung. Der Präparationsprozeß stört die Ausbildung des Solitons offenbar nicht, obwohl er mit einer Dauer von insgesamt 3.2 ms in Abb. 1.9 nur unwesentlich kürzer als die nichtlineare Zeit  $t_{NL} = 4.8$  ms ist. Um die Propagation des Wellenpakets im Zentrum der Brillouinzone zu untersuchen, kann der 2. Schritt weggelassen werden: in diesem Fall zerfließt das Wellenpaket, da sich Dispersion und Nichtlinearität nicht kompensieren können.

Die Konvergenz der numerischen Simulation wurde getestet, indem die Ortsauflösung  $dx$  nochmals halbiert und  $dt$  entsprechend gesenkt wurde. Das Resultat der Simulation ändert sich dadurch nicht. Während die eindimensionale



**Abbildung 1.9** : Ergebnis der numerischen Integration der 1D Gross-Pitaevskii Gleichung mit periodischem Potential für  $V_0 = E_r$ ,  $\omega_\perp = 2\pi \times 100$  Hz und ein sechs-Anfangswellenpaket mit  $x_0 = 5 \mu\text{m}$  und  $N = 195$  Atomen. Die  $x$ -Koordinate ist jeweils im Bezugssystem des periodischen Potentials angegeben. (a) Wellenpaket nach  $t = 9.3 t_{sol} = 71$  ms Propagation mit einem Quasiimpuls am Rand der Brillouinzone ( $k_0 = k_L$ ). (b) Einhüllende des Wellenpakets aus (a) für  $t = 0$  (durchgezogen) und für  $t = 71$  ms (gepunktet). Die Einhüllende wurde durch Mittelung des Wellenpakets über eine Periode des Potentials bestimmt. Das Wellenpaket zerfließt nicht (Soliton 1. Ordnung), die Einhüllende stimmt mit der Vorhersage der effektive-Masse-Theorie aus Abschnitt 1.4.1 hervorragend überein. (c) Dasselbe Anfangswellenpaket wie in (a), jedoch nach  $t = t_D = 71$  ms Propagation mit  $k_0 = 0$  (man beachte die andere Skalierung der Achsen im Vergleich zu (a)). (d) Die Einhüllende des Wellenpakets aus (c) für  $t = 0$  (durchgezogen) und für  $t = 71$  ms (gepunktet). Das Wellenpaket zerfließt, da im Zentrum der Brillouinzone  $m_{eff} > 0$  ist und somit kein helles Soliton entstehen kann.

Simulation durch die explizite Modellierung des periodischen Potentials die Anwendbarkeit der effektive-Masse-Näherung testen kann, setzt sie nach wie vor die Eindimensionalität der Propagation der Atome im Wellenleiter voraus. Die Annahme, daß keine transversalen Anregungen entstehen, kann nur durch eine zwei- oder dreidimensionale Simulation überprüft werden. Eine zweidimensionale Simulation wurde in einer Arbeitsgruppe der theoretischen Physik in Konstanz durchgeführt [Hil01]. Auch in der zweidimensionalen Simulation wurden Solitonen beobachtet, solange die Bedingung 1.30 für den transversalen Einschluß der Atome erfüllt ist.

## 1.6 Optische Potentiale für Materiewellen

Der Wellenleiter und das periodische Potential für die Atome werden im Experiment durch Laserstrahlen realisiert, deren Frequenz  $\omega_L$  weit von einer Resonanz  $\omega_0$  im Spektrum der  $^{87}\text{Rb}$  Atome verstimmt ist. Aufgrund der großen Verstimmung  $\Delta = \omega_L - \omega_0$  kann die spontane Streuung von Photonen durch die Atome vernachlässigt werden. Durch die Kopplung der atomaren Dipolmomente  $\mathbf{d}$  an das elektrische Feld des Lasers  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  entsteht dann ein nahezu konservatives Dipolpotential für die Atome [Mv99].

Im folgenden betrachten wir den Grenzfall  $|\Delta| \gg \Omega_R$  und  $|\Delta| \gg \Gamma$ , wobei

$$\Omega_R(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})}{\hbar} \quad (1.54)$$

die Rabifrequenz für den betrachteten Übergang und  $\Gamma$  die natürliche Linienbreite des angeregten Zustands ist. Das durch den Laserstrahl hervorgerufene Dipolpotential für Atome im Grundzustand ist dann

$$V(\mathbf{r}) = \frac{\hbar |\Omega_R(\mathbf{r})|^2}{4\Delta}. \quad (1.55)$$

Für ein zwei-Niveau System ist das Betragsquadrat der Rabifrequenz

$$|\Omega_R(\mathbf{r})|^2 = \frac{\Gamma^2 I(\mathbf{r})}{2I_{sat}} \quad (1.56)$$

mit der Intensität  $I(\mathbf{r})$  des Laserstrahls und der Sättigungsintensität  $I_{sat}$  verknüpft. Für ein Atom mit Hyperfeinstruktur wie  $^{87}\text{Rb}$  muß dieser Ausdruck noch durch die Clebsch-Gordan Koeffizienten (CG) für den betrachteten Übergang korrigiert werden (siehe z.B. [Mv99], einige spektroskopische Daten von  $^{87}\text{Rb}$  finden sich im Anhang und in Abb. 2.2).

Wir berechnen nun Formeln für die Dipolpotentiale des atomaren Wellenleiters und des periodischen Potentials. Zahlenwerte werden in Kapitel 2 angegeben. Dabei betrachten wir  $^{87}\text{Rb}$  Atome im Grundzustand in einem starken äußeren

Magnetfeld (im Experiment durch das Bias-Feld realisiert, siehe Abschnitt 2.1.4), d.h. durch die Dipolpotentiale werden keine Ramanübergänge zwischen magnetischen Unterzuständen induziert. Die Laserstrahlen sind linear polarisiert und die Verstimmung  $\Delta \gg E_{HFS}$  ist sehr viel größer als die Hyperfeinaufspaltung  $E_{HFS}$  der beteiligten Zustände. In diesem Fall ist das Dipolpotential für alle magnetischen Unterzustände nahezu identisch und unabhängig von der Polarisationsrichtung des Lasers. Die Frequenz der Laserstrahlen liegt in der Nähe der  $D_1$ - und  $D_2$ -Linien von  $^{87}\text{Rb}$  mit den Frequenzen  $\omega_{1,2}$ , andere Linien werden nicht berücksichtigt.

### 1.6.1 Der Wellenleiter für Atome

Der Wellenleiter wird durch einen fokussierten gaußschen Laserstrahl [ST91] mit Wellenzahl  $k_D$  und der ortsabhängigen Intensität

$$I(\mathbf{r}) = \frac{I_{max}}{1 + (x/x_R)^2} \exp\left[-2\frac{y^2 + z^2}{w(x)^2}\right], \quad w(x) = w_D \sqrt{1 + (x/x_R)^2} \quad (1.57)$$

erzeugt. Dabei ist  $w_D \simeq 60 \mu\text{m}$  die Strahltaile,  $x_R = \frac{k_D}{2} w_D^2$  die Rayleigh-Länge, und die maximale Intensität ist durch  $I_{max} = \frac{2P}{\pi w_D^2}$  mit der Leistung  $P$  des Strahls verknüpft. Das Dipolpotential hat dann unter Berücksichtigung der  $D_2$ -Linie und der um einen Faktor  $\frac{1}{2}$  schwächeren  $D_1$ -Linie die Form

$$V_D(\mathbf{r}) = \frac{V_D}{1 + (x/x_0)^2} \exp\left[-2\frac{y^2 + z^2}{w(x)^2}\right], \quad V_D = \frac{\hbar\Gamma^2 I_{max}}{8I_{sat}} \cdot \frac{2}{3} \left( \frac{1}{\Delta_2} + \frac{1}{2\Delta_1} \right). \quad (1.58)$$

Dabei ist  $\Delta_i = \omega_D - \omega_i$  die Verstimmung des Lasers gegenüber der  $D_i$ -Linie, die Clebsch-Gordan Koeffizienten der beteiligten Übergänge steuern einen Faktor  $\sum |CG|^2 = \frac{2}{3}$  bei, und  $I_{sat} = 1.67 \text{ mW/cm}^2$  ist für polarisiertes Licht auf dem stärksten Übergang zwischen magnetischen Unterzuständen der  $D_2$ -Linie gegeben [Mv99].

Für  $V_D < 0$  ist das Dipolpotential attraktiv und Atome können im Intensitätsmaximum des gaußschen Strahls gefangen werden. Eine Entwicklung des Potentials bis zur zweiten Ordnung um den Fokus bei  $\mathbf{r} = 0$  führt auf ein harmonisches Potential

$$V(\mathbf{r}) = V_D + \frac{1}{2} m \omega_{\parallel}^2 x^2 + \frac{1}{2} m \omega_{\perp}^2 (y^2 + z^2) \quad (1.59)$$

mit den Frequenzen

$$\omega_{\perp} = \sqrt{\frac{4|V_D|}{m w_D^2}}, \quad \omega_{\parallel} = \sqrt{\frac{8|V_D|}{m k_D^2 w_D^4}} = \frac{\sqrt{2}}{k_D w_D} \omega_{\perp}. \quad (1.60)$$

Typischerweise ist  $k_D w_D \simeq 200$  und damit  $\omega_{\parallel} \ll \omega_{\perp}$ , d.h. der Laserstrahl schließt die Atome transversal ein, während die Dynamik in longitudinaler Richtung für

Propagationszeiten  $t < \omega_{\parallel}^{-1}$  als frei betrachtet werden kann. Der Wellenleiter erfüllt also die Anforderungen aus Abschnitt 1.3.3.

Damit die spontane Streuung von Photonen an den Atomen im Wellenleiter vernachlässigt werden kann, muß für alle relevanten Zeitskalen  $t$  des Experiments die Bedingung  $t \ll \Gamma_s^{-1}$  gelten. Dabei ist die Photonen-Streurate im Zentrum des Wellenleiters durch

$$\Gamma_s = \frac{\Gamma^3 I_{max}}{8I_{sat}} \cdot \frac{2}{3} \left( \frac{1}{\Delta_2^2} + \frac{1}{2\Delta_1^2} \right) \quad (1.61)$$

gegeben. Ansonsten würde die atomare Wolke durch den ungerichteten Impulsübertrag bei der Streuung von Photonen aufgeheizt, die Kohärenz der Materiewellen aus dem Bose-Einstein Kondensat ginge verloren.

## 1.6.2 Das eindimensionale optische Gitter

Das periodische Potential wird durch zwei entgegengesetzt propagierende Laserstrahlen derselben Polarisation erzeugt, die mit dem Wellenleiter am Ort der Atome gut überlappen. Die Strahltaile  $w_s \simeq 600 \mu\text{m}$  dieser Strahlen ist sehr viel größer als die des Wellenleiters,  $w_s \gg w_D$ . Daher kann die Ortsabhängigkeit der Intensität dieser Strahlen für Atome im Wellenleiter vernachlässigt werden, die Strahlen werden durch ebene Wellen approximiert. Wir nehmen weiterhin an, daß die Laserstrahlen den selben Wellenvektor  $k_L$ , aber leicht unterschiedliche Frequenzen  $\omega_{a,b}$  besitzen ( $\Delta\omega = \omega_b - \omega_a \ll \omega_{a,b}$ ). Durch die Interferenz der beiden Strahlen entsteht ein zeitabhängiges Intensitätsmuster der Form

$$I(x, t) = 4\sqrt{I_a I_b} \cos^2 \left( k_L x - \frac{\Delta\omega}{2} t \right), \quad (1.62)$$

wobei  $I_{a,b}$  die Intensität je *eines* der Strahlen ist. Interferenzen dieser Strahlen mit dem Wellenleiter können vernachlässigt werden, wenn die Frequenzen  $\omega_{a,b}$  hinreichend verschieden von  $\omega_D$  sind. Das Intensitätsmuster erzeugt ein eindimensionales „optisches Gitter“ [JD96, DCT89], d.h. ein periodisches Dipolpotential

$$V(x) = V_0 \cos^2 \left( k_L x - \frac{\Delta\omega}{2} t \right), \quad V_0 = \frac{\hbar\Gamma^2 \sqrt{I_a I_b}}{2I_{sat}} \cdot \frac{2}{3} \left( \frac{1}{\Delta_2} + \frac{1}{2\Delta_1} \right), \quad (1.63)$$

das für  $\Delta\omega = 0$  genau die in Abschnitt 1.2.1 betrachtete Form hat. Solche optischen Gitter werden in vielen Experimenten der Atomphysik zur Manipulation von Atomen eingesetzt. Ein großer Vorteil ist dabei, daß nicht nur die Modulationstiefe  $V_0$  über die Laserintensität sehr genau eingestellt, sondern das Gitter über den Frequenzunterschied  $\Delta\omega$  auch bewegt werden kann: Ist  $\Delta\omega = \text{const.} \neq 0$ , so bewegt sich das periodische Potential mit der Geschwindigkeit  $v = \Delta\omega/2k_L$ . Eine lineare Zeitabhängigkeit der Frequenzdifferenz von der Form  $\Delta\omega(t) = ak_L t$  entspricht einer Beschleunigung des Potentials mit der Beschleunigung  $a$ . Auf diese Weise kann das Gitter relativ zu den Atomen bewegt und der Quasiimpuls  $k$  der

Materiewellen im Bezugssystem des Gitters eingestellt werden: Ein mit der Geschwindigkeit  $v$  im Laborsystem bewegtes Gitter entspricht einem Quasiimpuls  $k = -mv/\hbar = -\Delta\omega/2v_r$  der Atome im bewegten Bezugssystem des Gitters (vgl. Abschnitt 1.2.3). Um Atome am Rand der Brillouinzone ( $k = k_L$ ) zu präparieren, muß die Frequenzdifferenz  $|\Delta\omega| = 4\omega_r$  sein.

Analog zum Wellenleiter ergibt sich die Photonen-Streureate für das optische Gitter zu

$$\Gamma_s = \frac{\Gamma^3 \sqrt{I_a I_b}}{2I_{sat}} \cdot \frac{2}{3} \left( \frac{1}{\Delta_2^2} + \frac{1}{2\Delta_1^2} \right) \quad (1.64)$$

mit  $\Delta_i = \omega_a - \omega_i$ .

Mit den in diesem Abschnitt angegebenen Formeln lassen sich alle wichtigen Parameter der Dipolpotentiale berechnen. Im nächsten Kapitel wird auf die experimentelle Anordnung zur Erzeugung der Potentiale noch näher eingegangen.



# Kapitel 2

## Experimenteller Aufbau

In diesem Kapitel wird ein Überblick über den experimentellen Aufbau gegeben, mit dem die in den folgenden Kapiteln beschriebenen Experimente zur Bose-Einstein Kondensation mit  $^{87}\text{Rb}$ -Atomen und zum Dispersionsmanagement für Materiewellen durchgeführt wurden. Bose-Einstein Kondensation in verdünnten atomaren Gasen erfordert die Kombination mehrerer experimenteller Techniken: Eine Vakuumkammer dient der Isolation der Atome von der Umwelt, geeignete Lasersysteme und optische Aufbauten werden für die Laserkühlung der Atome benötigt und eine Magnetfalle wird bei der Verdampfungskühlung eingesetzt. Dieser Teil des Experiments war schon zu großen Teilen aufgebaut, die Magnetfalle mußte jedoch einmal grundlegend modifiziert werden. Für die Experimente zum Dispersionsmanagement müssen zusätzlich die Dipolpotentiale zur Manipulation der Materiewellen bereitgestellt werden. Der dazu benötigte optische Aufbau und die Radiofrequenz-Elektronik zur präzisen Kontrolle der Dipolpotentiale wurden im Rahmen dieser Diplomarbeit konzipiert und aufgebaut.

Im folgenden wird zunächst ein Überblick über die Apparatur zur Erzeugung des  $^{87}\text{Rb}$ -BECs gegeben, mit Schwerpunkt auf den zum evaporativen Kühlen essentiellen Komponenten. Es folgt die experimentelle Anordnung um die Glaszelle, in der die Experimente stattfinden. Die verwendeten Laser und optischen Aufbauten für den atomaren Wellenleiter und das optische Gitter werden im Detail beschrieben. Die Radiofrequenz-Elektronik zur Kontrolle von Amplitude und Phase des optischen Gitters wird vorgestellt. Am Schluß wird auf das Abbildungssystem eingegangen, mit dessen Hilfe sämtliche experimentellen Daten gewonnen werden.

### 2.1 Die Maschine zur Erzeugung des BECs

Am Beginn eines Experiments zur Bose-Einstein Kondensation stehen mehrere Stufen der Laserkühlung in einer Vakuumapparatur. Dabei werden im von uns verwendeten Aufbau bewährte Techniken wie ein atomarer „Funnel“ und

eine magneto-optische Falle eingesetzt. Der zweite Teil des Experiments findet in einer Magnetfalle statt: dort werden die Atome weiter bis zur kritischen Temperatur evaporativ gekühlt. In unserem Experiment wird die Bose-Einstein Kondensation in einer magnetischen TOP-Falle erreicht. Eine solche Apparatur wird z.B. in [Ens98, Arl00] detailliert beschrieben. Atomarer Funnel und magneto-optische Falle waren zu Beginn meiner Diplomarbeit bereits in Betrieb. Als nächster Schritt stand daher das Umladen der Atome in die Magnetfalle und das Durchführen von Verdampfungskühlung an. Der Stand des Aufbaus zu Beginn meiner Diplomarbeit ist in [For01] dokumentiert.

### 2.1.1 Die Vakuumapparatur

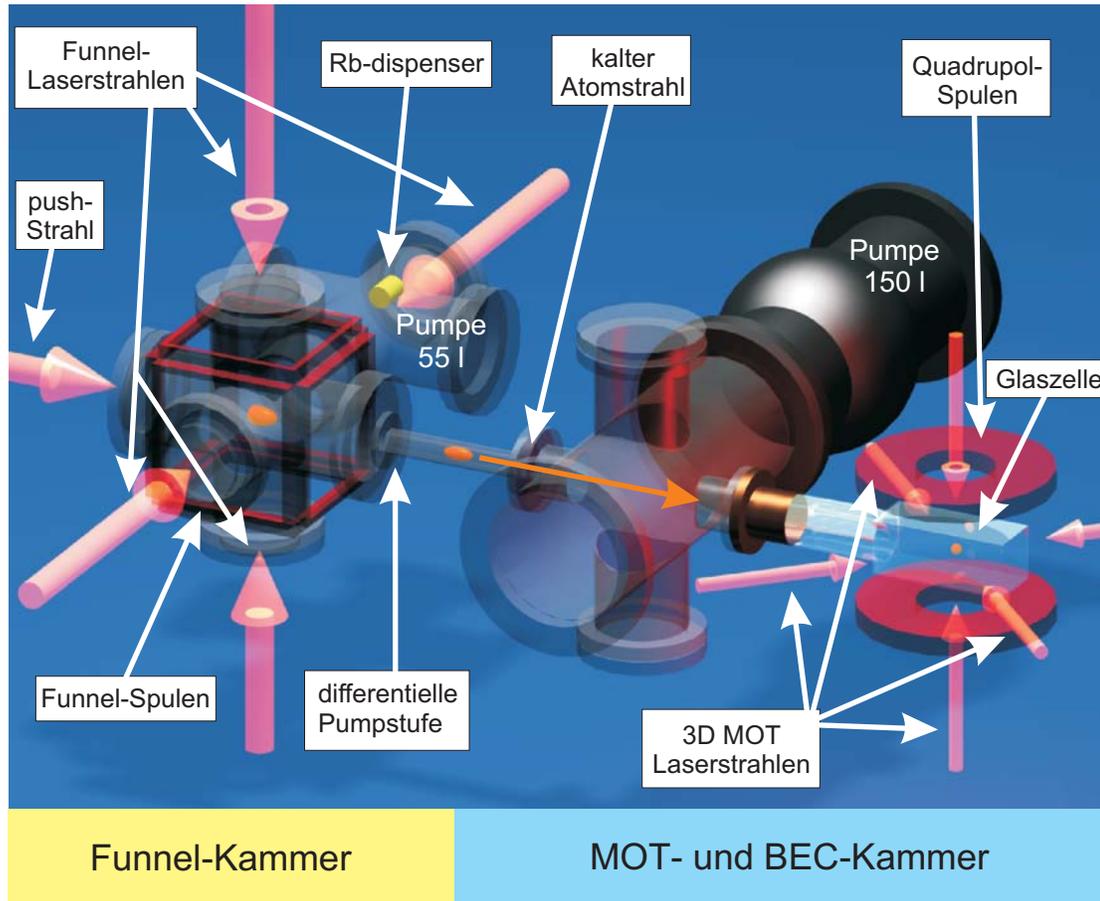
Die Vakuumapparatur zur Erzeugung des BECs besteht aus zwei Kammern, die über eine differentielle Pumpstufe verbunden sind (Abb. 2.1). Der Doppelkammeraufbau löst das bei BEC-Experimenten auftretende Problem, daß zum Einfangen möglichst vieler Atome in der Falle ein relativ hoher Rb-Hintergrundgasdruck nötig ist, während die für evaporatives Kühlen nötige lange Lebensdauer der kalten Atome in der Magnetfalle nur bei sehr niedrigem Druck erreicht werden kann.

In der Funnel-Kammer herrscht bei Betrieb des Experiments ein Druck von  $\sim 10^{-9}$  mbar, der durch eine 55 l-Ionenpumpe (Varian Vaclon Plus 55) aufrechterhalten wird. Hier wird mit  $^{87}\text{Rb}$ -Atomen aus dem Hintergrundgas in einem atomaren Trichter („Funnel“) ein kalter Atomstrahl erzeugt. Als Rb-Quelle dienen sog. „Dispenser“, in denen das Rubidium in Form von Rubidiumchromat chemisch gebunden ist. Über den Strom durch die Dispenser kann die Rate kontrolliert werden, mit der gasförmiges Rb freigesetzt wird. Der atomare Funnel erzeugt einen nahezu horizontal verlaufenden kalten Atomstrahl, in dem die Atome in die MOT-Kammer transportiert werden. Als differentielle Pumpstufe dient dabei ein kleines Loch mit Durchmesser 1 mm, durch das die Atome hindurchtreten.

In der MOT-Kammer herrscht ein Druck von  $\sim 10^{-11}$  mbar. An der Kammer befindet sich in einer 150 l-Ionenpumpe (Varian Vaclon Plus 155) noch zusätzlich ein Titansublimator. An die Kammer ist eine Glaszelle (Fa. Optiglas) mit Innendurchmessern  $3 \times 3 \times 8$  cm und einer Wandstärke von 4 mm angeflanscht. Die Glaszelle bietet guten optischen Zugang aus fünf Raumrichtungen. In ihr finden sämtliche Experimente statt. Zunächst werden hier die Atome aus dem kalten Atomstrahl in einer magneto-optischen Falle (MOT) gefangen und gekühlt.

### 2.1.2 Das Lasersystem

Im Experiment werden vier verschiedene Lasersysteme verwendet. Ein Überblick über die generierten Wellenlängen bietet Abb. 2.2.

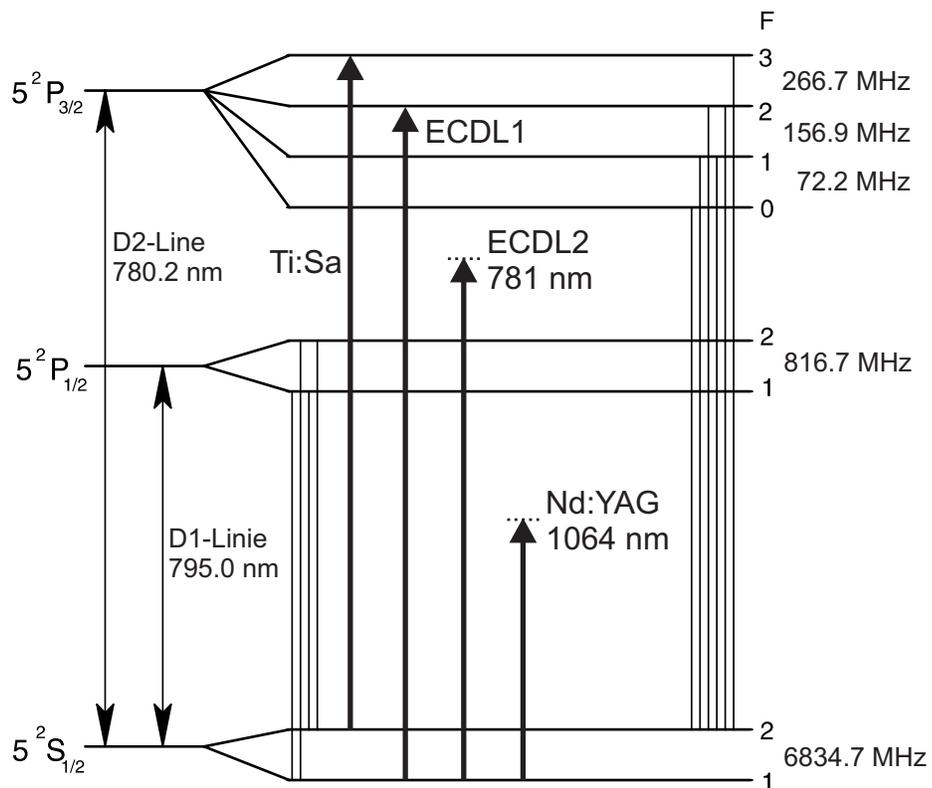


**Abbildung 2.1** : Übersicht über die Vakuumapparatur. Die Funnel-Kammer ( $\sim 10^{-9}$  mbar) und die MOT-Kammer ( $\sim 10^{-11}$  mbar) sind über einen Metallschlauch („bellow“) verbunden. Die Atome werden in einem kalten Atomstrahl aus dem Funnel in die 3D-MOT transportiert. Die Experimente finden in der Glaszelle statt. Gezeigt sind auch die Laserstrahlen und Magnetfeldspulen für die  $2D^+$ -MOT (atomarer „Funnel“) und die 3D-MOT. In der Abbildung nicht gezeigt sind drei Helmholtz-Spulenpaare, die um die 3D-MOT herum angeordnet sind und dem Ausgleich des Erdmagnetfeldes dienen. Das Bild wurde freundlicherweise von W. Geithner zur Verfügung gestellt.

- Ein von einem frequenzverdoppelten Nd:YAG Laser (Coherent Verdi V10, 10 W bei 532 nm) gepumpter Titan-Saphir-Ringlaser mit einer optischen Ausgangsleistung von 1.4 W (Ti:Sa, Coherent MBR-110) stellt alles im Experiment benötigte Licht in der Nähe des  $F = 2 \rightarrow F' = 3$ -Übergangs der  $D_2$ -Linie bei 780 nm zur Verfügung. Dieses wird zum Kühlen und Fangen der Atome im Funnel und in der MOT sowie für die Absorptionsabbildung eingesetzt. Der Ti:Sa-Laser wird über seinen internen Referenzresonator durch dopplerfreie Sättigungsspektroskopie auf den  $F = 2 \rightarrow F' = 3, 1$ -Crossover-Übergang der  $D_2$ -Linie stabilisiert. Die Linienbreite des Lasers ist kleiner als die Linienbreite  $\Gamma = 2\pi \times 5.76$  MHz des  $5^2P_{3/2}$ -Zustands von  $^{87}\text{Rb}$ . In einem früheren Stadium des Experiments wurde statt dieses Lasersystems ein durch einen Argon-Ionen Laser gepumpter Coherent Ti:Sa 899-21 Ring Laser verwendet.
- Ein gitterstabilisierter Diodenlaser (ECDL1) mit einer Ausgangsleistung von 15 mW stellt Licht auf dem  $F = 1 \rightarrow F' = 2$ -Übergang der  $D_2$ -Linie zur Verfügung. Dieses wird im Funnel und in der MOT als Rückpumperlicht eingesetzt, um Atome aus dem Zustand  $F = 1$  zurück nach  $F = 2$  und damit in den Kühlübergang zu pumpen. Auch dieser Laser wird durch Sättigungsspektroskopie stabilisiert, die Frequenz wird mit Hilfe eines Gitters in Littrow-Konfiguration geregelt, das durch ein Piezoelement verkippt werden kann. Die Linienbreite des Lasers ist ebenfalls kleiner als  $\Gamma$ .
- Ein zweiter diodengepumpter Nd:YAG (Spectra-Physics T40-X30-106QW) erzeugt 8 W Licht bei einer Wellenlänge von 1064 nm. Das Licht dieses weit von allen Resonanzen verstimmt Lasers wird für den atomaren Wellenleiter eingesetzt. Der Laser muß aufgrund der weiten Verstimmung von der Resonanz nicht stabilisiert werden.
- Ein zweiter gitterstabilisierter Diodenlaser (ECDL2) wird zur Erzeugung des optischen Gitters verwendet. Dieser Laser liefert je nach eingebauter Laserdiode typischerweise 60 mW Licht bei einer Wellenlänge zwischen 780 und 785 nm. Auch dieser Laser muß über die Stabilisierung durch das Gitter hinaus nicht weiter stabilisiert werden. Zeitweilig wurde das Licht für den Wellenleiter und für das optische Gitter auch von einem Coherent Ti:Sa 899-21 Ring Laser erzeugt, der einige Nanometer rotverstimmt gegenüber der  $D_2$ -Linie war.

### 2.1.3 Der atomare Funnel und die magneto-optische Falle

Das Licht des Ti:Sa-Lasers wird in drei Teile unterschiedlicher Intensität aufgespalten:  $\sim 800$  mW gehen in den Aufbau für den Funnel,  $\sim 400$  mW in den Aufbau für die MOT und  $\sim 80$  mW in die Absorptionsabbildung. Das MOT- und



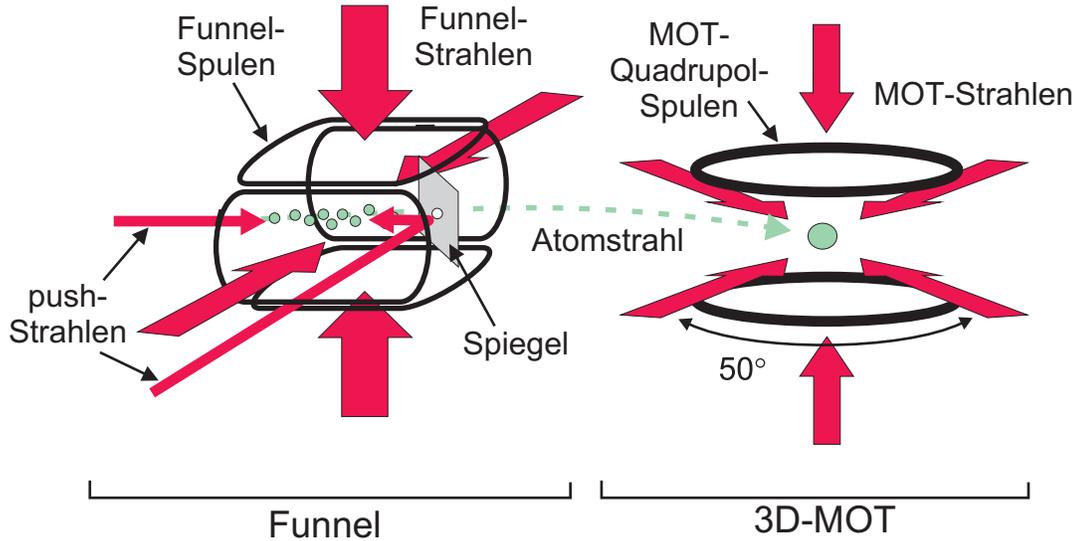
**Abbildung 2.2** : Termschema von  $^{87}\text{Rb}$  und die Wellenlängen der im Experiment verwendeten Laser. Gezeigt ist die Hyperfeinstruktur der  $D_1$  und  $D_2$  Linien. Dünne vertikale Linien bezeichnen die für elektrische Dipolstrahlung erlaubten Übergänge.

das Funnel-Licht werden je durch einen „double-pass“ akusto-optischen Modulator (AOM) zur Kontrolle der Frequenz und zum schnellen Schalten des Lichts geschickt. Bevor das Licht den experimentellen Aufbau erreicht, wird die Mode durch eine polarisationserhaltende optische Faser gefiltert, vor der sich ein mechanischer Shutter befindet. Durch die Faser wird der optische Aufbau um die Vakuumkammer von den Lasern abgekoppelt. Dies vereinfacht die tägliche Justage der optischen Komponenten enorm. Nach den Fasern wird das Licht des Rückpumpers mit den Strahlen für MOT und Funnel überlappt und zur Vakuumkammer geleitet.

Ein atomarer Funnel zur Erzeugung eines kalten Atomstrahls wurde erstmals in [DSWW98] in einem BEC-Experiment verwendet. Er besteht im wesentlichen aus einer zweidimensionalen MOT, d.h. transversal wird ein Magnetfeldgradient von ca. 10 G/cm aufrechterhalten und Atome werden wie in einer MOT mit Hilfe von zirkular polarisiertem Licht in zwei Dimensionen gekühlt (Abb. 2.3). Die kalten Atome sammeln sich auf der Symmetrieachse des Funnels an, auf der das Magnetfeld verschwindet. Auf dieser Achse sorgen zwei sog. „push-Strahlen“ dafür, daß die Atome vorzugsweise in Richtung der MOT-Kammer getrieben werden. Dies wird dadurch erreicht, daß einer der Strahlen von einem unter  $63^\circ$  aufgestellten Spiegel reflektiert wird, der in der Mitte ein kleines Loch besitzt (der Winkel von  $63^\circ$  ist durch die Geometrie der Vakuumkammer gegeben). Dadurch entsteht entlang der Funnel-Achse ein Ungleichgewicht im Strahlungsdruck, der die Atome durch das Loch treibt (dieses Loch dient gleichzeitig als differentielle Pumpstufe). Außerhalb dieses Bereichs wirken die push-Strahlen wie eine eindimensionale optische Melasse und tragen ebenfalls zur Kühlung der Atome bei. Die Intensität der einzelnen Funnel-Strahlen beträgt typischerweise  $2 \text{ mW/cm}^2$ , die der push-Strahlen  $1 \text{ mW/cm}^2$ . Die Strahlen sind  $2.6 \Gamma = 15.2 \text{ MHz}$  vom  $F = 2 \rightarrow F' = 3$ -Übergang der  $D_2$ -Linie verstimmt. Die Intensitäten der Strahlen sind unabhängig voneinander einstellbar und werden auf eine maximale Laderate der 3D-MOT hin optimiert. Die gesamte Leistung in allen Funnel-Laserstrahlen beträgt ca. 130 mW.

Über eine leicht parabolische Flugbahn erreichen die Atome aus dem Funnel die 3D-MOT. Der optische Aufbau der MOT entspricht dem in [RPC<sup>+</sup>87] beschriebenen Standardaufbau mit dem kleinen Unterschied, daß die horizontalen Laserstrahl-Paare aus Platzgründen einen Winkel von nur  $50^\circ$  zueinander aufweisen (Abb. 2.3). Für den Betrieb der MOT wird ein Quadrupol-Magnetfeld mit einem radialen Gradienten von typischerweise  $2.76 \text{ G/cm}$  angelegt, der von denselben Magnetfeldspulen in anti-Helmholtz-Konfiguration erzeugt wird, die auch für die magnetische TOP-Falle in unserem Experiment verwendet werden (siehe Abschnitt 2.1.4). Die MOT-Laserstrahlen haben einen Strahldurchmesser von ca. 18 mm, individuell optimierte Intensitäten von typischerweise  $7\text{--}9 \text{ mW/cm}^2$  und sind  $1.4 \Gamma = 2\pi \times 8 \text{ MHz}$  von der Resonanz verstimmt. Die gesamte Leistung in allen MOT-Laserstrahlen beträgt ca. 50 mW.

Die MOT wird während des Experiments durch zwei Kameras beobachtet



**Abbildung 2.3** : Schematischer Aufbau von atomarem Funnel und 3D-MOT. Im Funnel erzeugen zwei anti-Helmholtz Spulenpaare einen Magnetfeldgradienten in zwei Dimensionen, in der MOT ein anti-Helmholtz Spulenpaar einen dreidimensionalen Gradienten. Gezeigt ist auch der Spiegel mit Loch, durch den die push-Strahlen im Funnel überlappt werden (siehe Text).

(Abb. 2.6). Die erste Kamera ermöglicht eine qualitative Kontrolle der fehlerfreien Funktion der MOT, z.B. kann ein aus dem Lock gesprungener Laser schnell entdeckt werden. Die zweite Kamera (PCO „PixelFly“) ermöglicht quantitative Analysen, z.B. die Bestimmung der Atomzahl in der MOT. Um die Atomzahl in der MOT bei jedem Durchlauf des Experiments schnell kontrollieren zu können, wird das Fluoreszenzlicht aus der MOT zusätzlich auf eine Photodiode abgebildet. Bei der Justage der MOT werden beide Kameras zusammen eingesetzt, um die MOT räumlich mit der Magnetfalle zu überlappen.

#### 2.1.4 Die magnetische TOP-Falle und das RF-Messer

Um die für ein Bose-Einstein Kondensat nötigen tiefen Temperaturen und hohen Dichten zu erzeugen, reichen die Methoden der Laserkühlung nicht aus. Daher werden die Atome von der MOT in eine Magnetfalle umgeladen, in der sie dann durch Verdampfungskühlung bis zur Bose-Einstein Kondensation gekühlt werden können. Die Magnetfalle beruht auf der Wechselwirkung des magnetischen Moments  $\mu$  der Atome mit einem Magnetfeld  $\mathbf{B}$ ,

$$U = -\mu \cdot \mathbf{B} = m_F g_F \mu_B |B|, \quad (2.1)$$

dabei ist  $\mu_B$  das Bohrsche Magneton,  $m_F$  der magnetische Unterzustand und  $g_F$  der  $g$ -Faktor des Hyperfeinzustands  $F$ . Nur Zustände mit  $m_F g_F > 0$  können in ei-

nem Potentialminimum magnetisch gefangen werden, da die Maxwell-Gleichungen kein Maximum des Magnetfelds im freien Raum zulassen. In unserem Experiment werden Atome im  $F = 2, m_F = 2$ -Grundzustand mit einem magnetischen Moment  $|\mu| = \mu_B$  gefangen. Eine mögliche Feldkonfiguration zum Fangen von Atomen ist das sphärische Quadrupolfeld zweier Spulen in anti-Helmholtz Konfiguration. Bewegen sich die Atome in der Falle, so folgt das magnetische Moment der Magnetfeldrichtung in der Regel adiabatisch und die Atome sind eingeschlossen. Eine Ausnahme ist das Zentrum der Falle, wo das Magnetfeld verschwindet. Hier können Majorana-Übergänge in nicht gefangene  $m_F$ -Zustände zu einem Verlust von Atomen aus der Falle führen. Für die langen Evaporationszeiten in einem BEC-Experiment muß dies vermieden werden.

Unsere Magnetfalle ist eine sog. TOP-Falle („Time-averaged Orbiting Potential“-Falle) [PAEC95], die das Problem der Majorana-Verluste vermeidet: Sie besteht aus einem zylindersymmetrischen Quadrupolfeld mit radialem Gradienten  $B'_q$ , das durch ein in der  $xy$ -Ebene rotierendes Bias-Feld  $B_0$  „ausgeschmiert“ wird. Ist die Rotation des Bias-Feldes schneller als die mechanische Bewegung der Atome, aber langsamer als die Präzessionsfrequenz der magnetischen Momente im Magnetfeld, so ergibt sich im zeitlichen Mittel ein harmonisches Potential der Form

$$U_{TOP}(\mathbf{r}) = \mu_B B_0 + \frac{\mu_B B_q'^2}{4B_0} (x^2 + y^2 + 8z^2). \quad (2.2)$$

Das Magnetfeld im Zentrum dieser Falle verschwindet nicht, der Nullpunkt des instantanen Magnetfeldes rotiert auf einem Kreis mit Radius  $r_0 = B_0/B'_q$  in der  $xy$ -Ebene, dem „circle of death“ (vgl. Abb. 2.4). Dies führt zu einer endlichen Falltiefe von  $U_{TOP}(r_0) - U_{TOP}(0) = \mu_B B_0/4$ . Die Falle hat eine oblate Form mit den Fallenfrequenzen

$$\omega_x = \omega_y = \sqrt{\frac{\mu_B B_q'^2}{2mB_0}} = \omega_z/\sqrt{8}. \quad (2.3)$$

Berücksichtigt man noch den Einfluß der Gravitation auf die Atome in der TOP-Falle, so ergeben sich folgende Korrekturen: Die Ruhelage der atomaren Wolke ist um

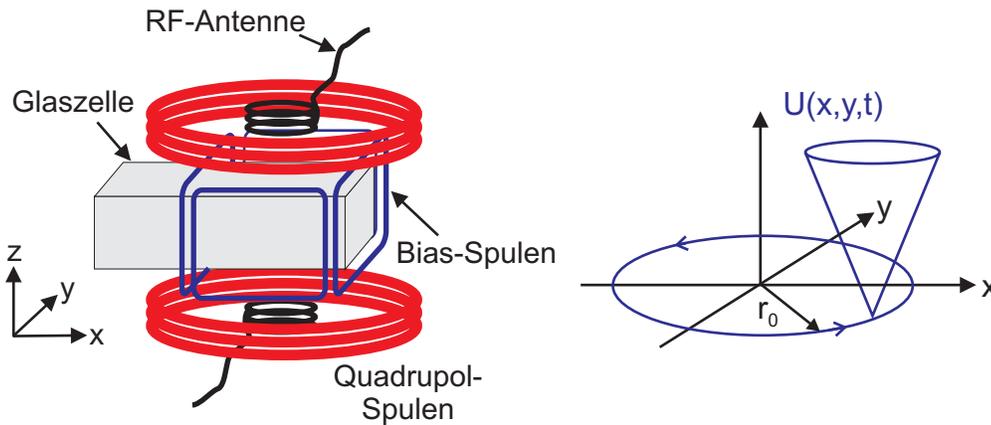
$$\Delta z = -\frac{r_0}{2} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}, \quad \rho = \frac{mg}{2\mu_B B'_q} \quad (2.4)$$

aus dem Fallenzentrum verschoben. Die Fallenfrequenzen ändern sich ebenfalls:

$$\omega'_x = \omega'_y = \omega_x (1 - \rho^2)^{1/4} (1 + \rho^2)^{1/2}, \quad (2.5)$$

$$\omega'_z = \omega'_x \sqrt{8 \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2}}. \quad (2.6)$$

Abb. 2.4 zeigt den schematischen Aufbau der TOP-Falle im Experiment. Das Quadrupolfeld wird durch Spulen oberhalb und unterhalb der Glaszelle erzeugt.



**Abbildung 2.4** : Aufbau und Funktionsprinzip der TOP-Falle. Im linken Bild ist die Anordnung der Spulen um die Glaszelle herum gezeigt. Nicht gezeigt sind die Spulen zur Kompensation des Erdmagnetfelds. Das rechte Bild zeigt das instantane Potential für die Atome, das auf einer Kreisbahn mit Radius  $r_0$  („circle of death“) in der  $xy$ -Ebene mit der Frequenz 9.8 kHz rotiert.

Die Spulen sind aus Kupferrohr gewickelt, in anti-Helmholtz Konfiguration geschaltet und erzeugen einen radialen Gradienten von bis zu  $B'_q = 260 \text{ G/cm}$  bei einem Strom von 300 A. Zwischen den Quadrupolspulen befinden sich zwei Bias-Spulenpaare in Helmholtz-Konfiguration. Sie liefern ein maximales Feld von je  $B_0 = 80 \text{ G}$  bei einem Strom von 100 A. In den Bias-Spulen fließt ein Wechselstrom mit einer Frequenz von 9.8 kHz wobei die Ströme in den beiden Spulenpaaren um  $90^\circ$  außer Phase sind. Dadurch entsteht das rotierende Magnetfeld in der  $xy$ -Ebene. Um den gesamten Aufbau herum befinden sich noch drei Helmholtz-Spulenpaare zur Kompensation des Erdmagnetfelds.

Sowohl die Quadrupolspulen als auch die Bias-Spulen sind wassergekühlt und in Epoxidharz eingegossen. Das Eingießen in Harz war nötig geworden, nachdem in einem früheren Aufbau thermisch und mechanisch verursachte Schwankungen der Position des Fallenzentrums beobachtet wurden (vgl. Abb. 2.5(a)). Diese Schwankungen machen das reproduzierbare Umladen des Kondensats aus der Magnetfalle in den atomaren Wellenleiter unmöglich. Aus diesem Grund mußte der Aufbau um die Glaszelle herum abgebaut, die Spulen eingegossen und die Magnetfalle erneut aufgebaut werden. Der Strom für die Quadrupolspulen wird von einem 300 A/16 V-Netzteil (Agilent 6682A) geliefert. Die Bias-Spulen sind an einen Audioverstärker (Crest Audio) mit  $2 \times 5000 \text{ W}$  Ausgangsleistung angeschlossen. Durch einen Schwingkreis wird der Strom in den Spulen überhört und die Impedanz zum Anschluß an den Verstärker reell gemacht. Der Audioverstärker wird von einem Funktionsgenerator mit einer Wechselspannung der Frequenz 9.8 kHz angesteuert.

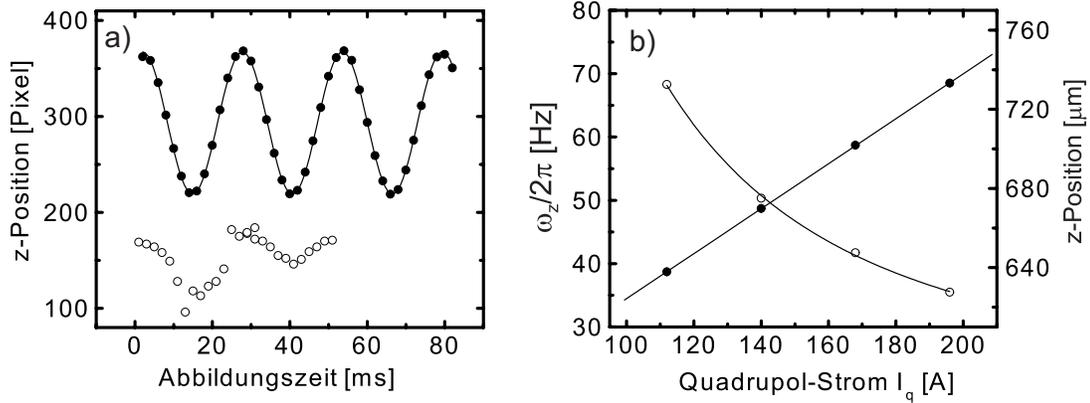
Zur evaporativen Kühlung wird im Experiment unter anderem Radiofrequenz

(RF)-Strahlung mit einer Frequenz von 3–6 MHz eingesetzt. Diese wird von je einer RF-Antenne ober- und unterhalb der Glaszelle abgestrahlt, die aus Kupferdraht-Spulen mit je 10 Windungen bestehen. Um genügend RF-Leistung am Ort der Atome zu erzeugen, müssen die RF-Spulen so nah wie möglich an der Glaszelle montiert werden, ohne jedoch den optischen Zugang zu den Atome zu beeinträchtigen. In unserem Experiment befinden sie sich daher innerhalb der Quadrupolspulen. Die beiden Antennen sind parallel an ein 50  $\Omega$ -Koaxialkabel angeschlossen und werden von einem Funktionsgenerator (Agilent 33250A) über einen 5 W-Verstärker (Minicircuits ZHL-5W-1) getrieben. Ein Problem bei dieser Anordnung besteht darin, daß es zu einer starken Kopplung zwischen den RF-Spulen und den Quadrupolspulen kommt, die auf derselben Achse montiert sind. Dadurch kommt es bei bestimmten Resonanzfrequenzen zu einer vollständigen Auslöschung der RF-Leistung am Ort der Atome. Da diese Resonanzen abhängig von der Induktivität der RF-Antennen sind, konnte durch sorgfältiges Design die Resonanz außerhalb des Bereichs von 3–6 MHz geschoben werden.

### Bestimmung der Fallenfrequenzen und Eichung der Magnetfelder

Für die BEC-Experimente ist eine genaue Kenntnis der Fallenfrequenzen und daher eine gute Eichung der Magnetfelder notwendig. Das Bias-Feld wurde geeicht, indem die von dem oszillierenden Magnetfeld induzierte Spannung in einer kleinen Meßspule bekannter Windungszahl und Querschnittsfläche am Ort der Bias-Spulen gemessen wurde. Mit Hilfe des gemessenen Wertes und der numerisch bestimmten Feldgeometrie wurde dann das Feld am Ort der Atome bestimmt. Es ergab sich eine lineare Abhängigkeit des Feldes vom Strom in den Bias-Spulen von 0.746 G/A in  $x$ -Richtung und 0.785 G/A in  $y$ -Richtung.

Unter Verwendung der Eichung für das Bias-Feld kann das Quadrupolfeld geeicht werden, indem die vertikale Fallenfrequenz der Magnetfalle direkt gemessen wird. Dazu wurde zunächst ein BEC in der Magnetfalle erzeugt. Dann wurde der Strom durch die Quadrupolspulen abrupt geändert. Dadurch ändert sich die Fallenfrequenz und nach Gl. 2.4 auch die Ruhelage der Atome in der Magnetfalle. Dies führt zu einer vertikalen Oszillation des Kondensats in der Magnetfalle. Die Oszillation wird sukzessive aufgenommen indem Kondensate mit identischen Parametern erzeugt werden und dabei das Zeitintervall zwischen Anregung der Schwingung und Abbildung variiert wird. Abb. 2.5(a) zeigt eine Oszillation mit der Frequenz  $\omega_z = 2\pi \times 38.7$  Hz bei einem Bias-Feld von 40.0 G und einem Strom von 112 A in den Quadrupolspulen. Dies führt gemäß 2.3 auf einen Magnetfeldgradienten  $B'_q = 95.9$  G/cm. Die Korrektur aufgrund der Gravitation beträgt bei diesen Feldern nur 1 %. Der Zusammenhang zwischen Fallenfrequenz und Strom durch die Quadrupolspulen ist daher wie zu erwarten linear (Abb. 2.5(b)). Die Dipolschwingungen des Kondensats in der Magnetfalle liefern zusätzlich zur Fallenfrequenz auch noch einen Wert für die Ruhelage des Kondensats in Abhängigkeit vom Quadrupol-Strom (Abb. 2.5(b)). Dies kann nach 2.4 ebenfalls zur Eichung



**Abbildung 2.5** : Dipoloszillation des BEC in der Magnetfalle. (a) Vertikale Position des Kondensats in Abhängigkeit vom Zeitpunkt der Abbildung bei einem Bias-Feld von 40.0 G und einem Strom  $I_q = 112$  A durch die Quadrupolspulen (schwarze Punkte). Jeder Datenpunkt entspricht einem BEC. Der sinusförmige Fit an die Daten ergibt eine Fallenfrequenz von  $\omega_z = 2\pi \times 38.7$  Hz. Gezeigt ist ebenfalls eine Messung, die bei gleichen Parametern gemacht wurde, bevor die Spulen in Epoxidharz eingegossen waren (Kreise). Deutlich sind eine langsame Drift und plötzliche Sprünge in der Position der Atome zu sehen. (b) Fallenfrequenz als Funktion von  $I_q$  (schwarze Punkte). Der lineare Fit entspricht  $\omega_z(I_q) = 2\pi \times (0.335 \cdot I_q[A] - 1.02)$  Hz. Ebenfalls gezeigt ist die Ruhelage des Kondensats als Funktion von  $I_q$  (Kreise) mit einem Fit nach Gl. 2.4

der Quadrupolspulen verwendet werden und bestätigt in unserem Fall die Eichung über die Fallenfrequenzen.

### 2.1.5 Steuerung des Experiments mit dem Computer

Das gesamte Experiment wird von einem Computer gesteuert. Über eine analoge Ausgabekarte (National Instruments PCI-6713) mit 8 Kanälen werden die Ströme in der Magnetfalle sowie die Leistung und Frequenz in den verschiedenen zur Kontrolle der Laserstrahlen verwendeten AOMs gesteuert. Zwei digitale Ausgabekarten (National Instruments PCI-6534) mit je 8 Kanälen kontrollieren die Shutter in den Laserstrahlen und geben Steuersignale an die Funktionsgeneratoren für RF-Strahlung und Abbildungs-Laserpulse, den Arbitrary-Waveform-Generator für die stehende Lichtwelle und die Kamera für die Absorptionsabbildung. Sämtliche Karten werden von einem mit Hilfe des Softwarepakets „Lab-View“ geschriebenen Programms angesteuert.

Ein zweiter Computer nimmt Daten auf. Dazu werden mit Hilfe eines „Visual Basic“-Programms die Absorptionsbilder aus der Kamera ausgelesen. Die Bilder werden bei laufendem Experiment teilweise analysiert, indem das Profil der atomaren Wolke in  $x$ - und  $z$ -Richtung in einem „MATLAB“-Programm mit einer

gaußförmigen Verteilung gefittet wird. Dies gibt bereits während des Experimentierens wichtige Informationen über die beobachteten atomaren Wolken.

## 2.2 Überblick über den Gesamtaufbau

Zur Orientierung soll ein Überblick über den Gesamtaufbau des Experiments gegeben werden. Abb. 2.6 zeigt eine vereinfachte Anordnung der einzelnen Komponenten auf dem optischen Tisch, die in diesem Kapitel vorgestellt werden. Links oben befinden sich die Lasersysteme mit großer Ausgangsleistung unter einer „flow box“, die der Staubfilterung dient. Im rechten oberen Teil befinden sich die Diodenlaser sowie Optik zur Aufbereitung der Laserstrahlen für Dipolpotentiale, Rückpumper und Abbildung der Atome. Der untere Teil des Experiments mit der Vakuumkammer ist verdunkelt, damit kein störendes Streulicht zu Verlusten von Atomen aus der Magnetfalle führt. Links unten ist der Aufbau des Funnel, rechts unten die Glaszelle mit MOT, Magnetfalle, Dipolfallen und optischem Gitter dargestellt. Die Graphik gibt den Verlauf der Laserstrahlen schematisch wieder. Dabei sind zur Unterscheidung die Strahlen, die zu den Dipolfallen und zum optischen Gitter gehören orange, die restlichen Strahlen rot gefärbt. Weggelassen wurden optische Elemente wie  $\lambda/2$ - und  $\lambda/4$ -Platten, Teleskope und Monitor-Photodioden. Ebenso wurde auf die Darstellung der in vertikaler Richtung propagierenden Strahlen von Funnel und MOT verzichtet.

## 2.3 Überblick über den Aufbau um die Glaszelle

Eine Glaszelle dient als „Experimentierkammer“ in unserem Experiment. Sie bietet guten optischen Zugang aus fünf Raumrichtungen, der für die große Zahl von Laserstrahlen für MOT, Abbildung und die Dipolpotentiale auch dringend gebraucht wird. Die geringen Abmessungen der Glaszelle ermöglichen außerdem die Montage der Magnetfeldspulen relativ nahe an den Atomen, ohne daß ein Aufbau innerhalb des Vakuums nötig wäre. Die Anordnung von Magnetfalle und MOT-Strahlen um die Glaszelle herum ist bereits in den Abb. 2.4 und 2.3 dargestellt. In den folgenden Abschnitten soll auf die für das Dispersionsmanagement nötigen Dipolpotentiale und das Abbildungssystem eingegangen werden. Abb. 2.7 zeigt einen schematischen Überblick über diesen Teil des Experiments.

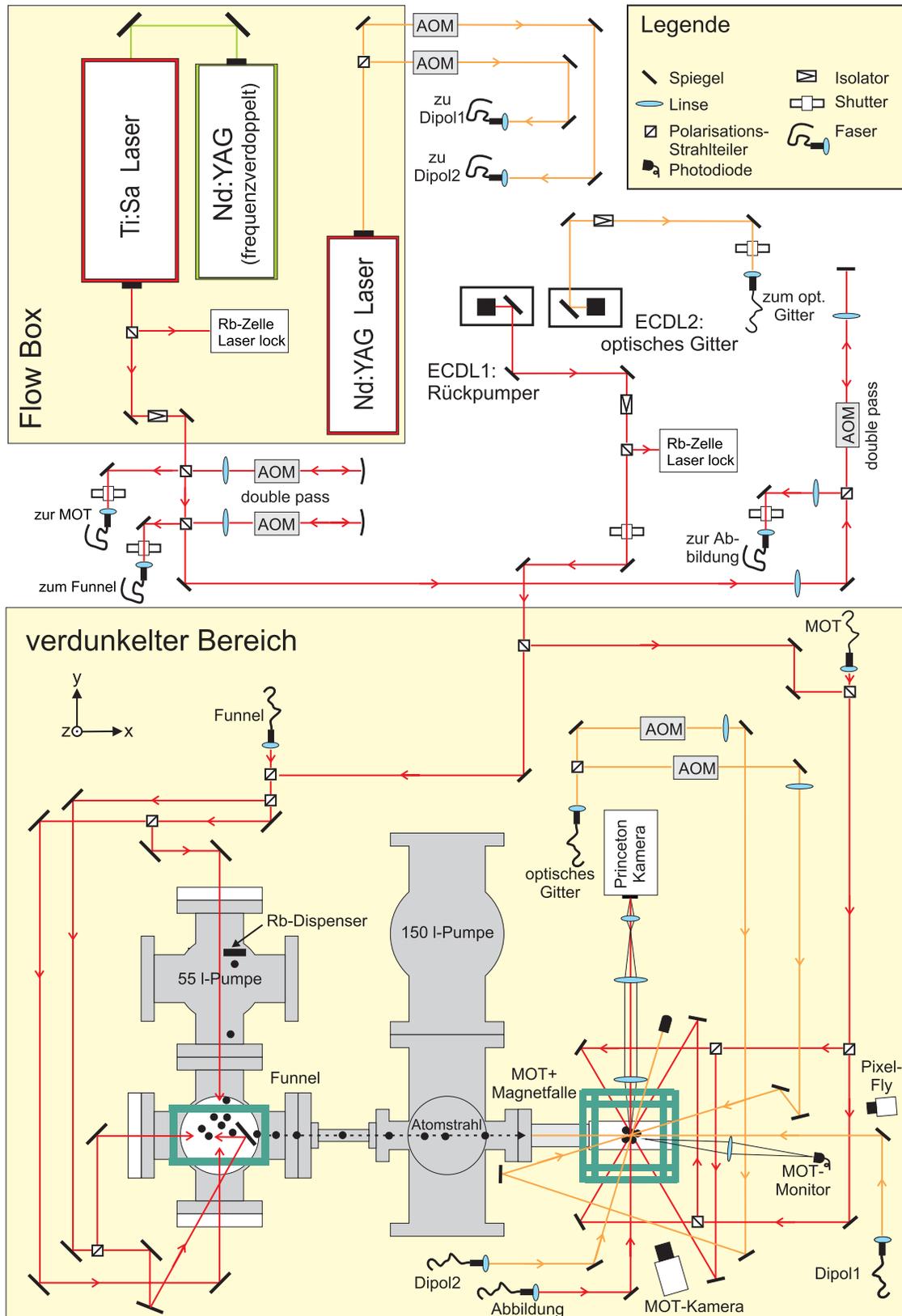
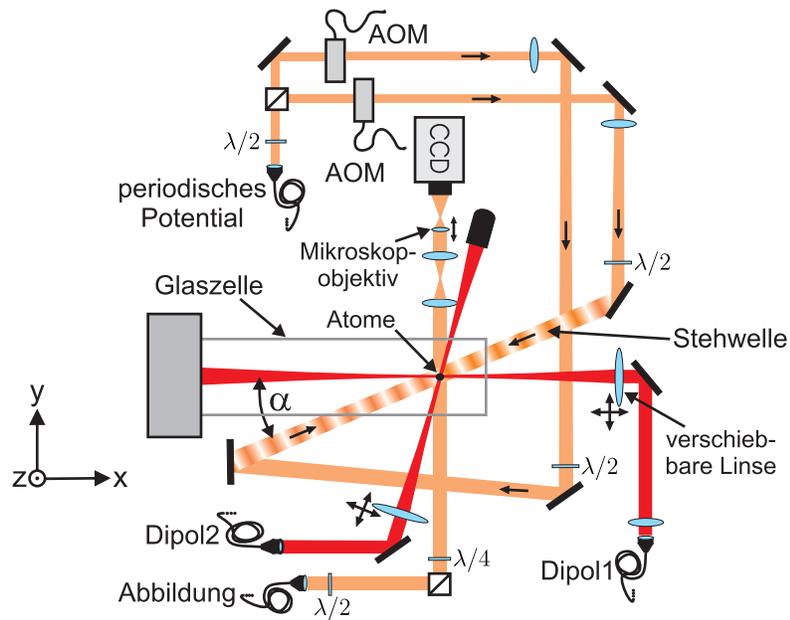


Abbildung 2.6 : Übersicht über den Gesamtaufbau.



**Abbildung 2.7** : Anordnung von Laserstrahlen für die Dipolpotentiale und das Abbildungssystem um die Glaszelle. Mit „Dipol1“ ist der fokussierte Laserstrahl bezeichnet, der als Wellenleiter für Atome dient. Ein zweiter fokussierter Strahl („Dipol2“) kreuzt diesen am Ort der Atome. In dieser gekreuzten Dipolfalle können die Atome nach dem Umladen aus der Magnetfalle gehalten werden. Senkrecht zum Wellenleiter verläuft der kollimierte Laserstrahl für die Absorptionsabbildung. Das periodische Potential wird durch die Interferenz zweier kollimierter Strahlen erzeugt, die aus Platzgründen mit dem Wellenleiter einem Winkel von  $\alpha = 25^\circ$  bilden. Die Frequenzdifferenz dieser Strahlen wird durch akusto-optische Modulatoren (AOMs) kontrolliert.

## 2.4 Dipolpotentiale zur Manipulation der Atome

Im diesem Abschnitt wird der Aufbau der für das Dispersionsmanagement nötigen Dipolpotentiale sowie die RF-Elektronik zu deren Kontrolle vorgestellt. Der Aufbau wurde im Laufe dieser Diplomarbeit mehrmals modifiziert. Dies lag vor allem daran, daß der zum Schluß verwendete Nd:YAG-Laser für den atomaren Wellenleiter anfänglich noch nicht verfügbar war. Im folgenden wird der aktuelle Aufbau beschrieben, in Kapitel 4 wird kurz der frühere Aufbau skizziert.

### 2.4.1 Der atomare Wellenleiter

Zwei fokussierte Laserstrahlen werden als Dipolfallen im Experiment eingesetzt. Das Licht hierfür wird von einem Nd:YAG-Laser bei einer Wellenlänge von 1064 nm generiert und in zwei Strahlen variabler Leistung aufgespalten. Je ein akusto-optischer Modulator kontrolliert die Leistung in den Strahlen. Mit den AOMs können die Dipolfallen langsam angeschaltet werden, was ein adiabatisches Umladen der Atome aus der Magnetfalle erlaubt. Nach den AOMs wird das Licht zur Modenfilterung durch je eine single-mode Glasfaser geschickt (vgl. Abb. 2.6 oben).

Der Aufbau nach den Glasfasern ist in Abb. 2.7 gezeigt: Die erste Dipolfalle („Dipol1“) dient als Wellenleiter für Atome. Dazu wird der aus der Faser ausgekoppelte Strahl durch eine Linse der Brennweite  $f = 200$  mm auf eine Strahltaille von  $w_D = 62 \pm 3 \mu\text{m}$  fokussiert. Die angegebene Strahltaille wurde experimentell bestimmt, indem eine Rasierklinge auf einem Verschiebetisch an verschiedenen Stellen durch den Strahl gefahren wurde. Die Gesamtleistung im Wellenleiter wird durch eine Monitor-Photodiode ständig kontrolliert. Sie beträgt während des Experiments typischerweise  $P = 685$  mW. Dies führt nach Gl. 1.58 und 1.60 auf eine Potentialtiefe von  $|V_D| = 74.3 E_r$  und eine transversale Fallenfrequenz von  $\omega_{\perp} = 2\pi \times 184$  Hz. Dabei addieren sich die Beiträge von  $D_1$ - und  $D_2$ -Linie zum Dipolpotential, da der Laser gegenüber beiden Linien rotverstimmt ist ( $\Delta_i < 0$ ). Die longitudinale Fallenfrequenz ergibt sich zu  $\omega_{\parallel} = 2\pi \times 0.68$  Hz und die Photonen-Streurate im Fokus des Laserstrahls zu  $\Gamma_s = 0.15$  Hz. Damit ist sowohl die Photonen-Streurate als auch der durch den Wellenleiter erzeugte longitudinale Einschluß der Atome vernachlässigbar auf den Zeitskalen des Experiments von  $t < 200$  ms. Im Experiment wurde jedoch eine deutlich höhere longitudinale Fallenfrequenz im Wellenleiter gemessen, was vermutlich auf zusätzliche magnetische Potentiale zurückzuführen ist (Abschnitt 3.4.1).

#### Justage der Dipolfalle

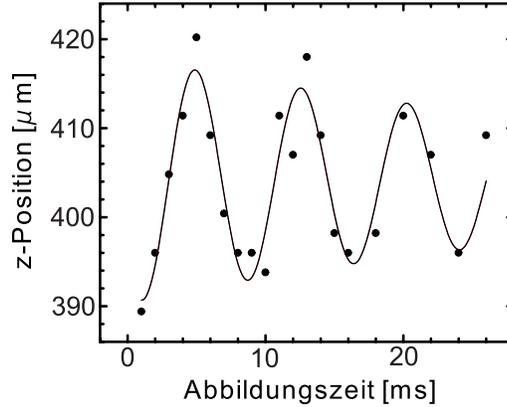
Um Atome aus der Magnetfalle in den Wellenleiter umladen zu können, muß der Fokus der Dipolfalle gut mit der Position der Atome in der Magnetfalle überlappt

werden. Dazu wird in mehreren Schritten justiert: Zunächst wird Licht in die Faser der Dipolfalle 1 eingekoppelt, das resonant mit dem geschlossenen  $F = 2 \rightarrow F' = 3$ -Übergang der  $D_2$ -Linie ist. Trifft dieses Licht auf die Atome in der MOT, werden zahlreiche Photonen gestreut und der Photonenrückstoß treibt die Atome aus der Falle. Dieser Effekt läßt sich zur groben Justage der Optik nach der Faser verwenden: gelingt es, mit geringer Intensität des resonanten Lichts die Atome „wegzublasen“, so liegt der Fokus des Laserstrahls bereits in der Nähe des Fallenzentrums der Magnetfalle. Dann kann Licht des Nd:YAG-Lasers in die Faser eingekoppelt und die Position der Dipolfalle in  $y$ - und  $z$ -Richtung mit Hilfe des letzten Spiegels und der letzten Linse vor der Glaszelle feinjustiert werden. Dabei wird auf maximale Umladeeffizienz von der Magnet- in die Dipolfalle justiert. Mit dieser Methode kann die transversale Position des Wellenleiters auf wenige Mikrometer genau justiert werden. Die Position in vertikaler Richtung kann dabei mit Hilfe des Abbildungssystems während der Justage einfach kontrolliert werden.

Um den Quasiimpuls der Atome im optischen Gitter experimentell kontrollieren zu können, dürfen die Atome in dem Wellenleiter nicht ungewollt in eine Richtung beschleunigt werden. Daher muß der Dipolstrahl 1 genau horizontal und die Atome auch längs des Wellenleiters ( $x$ -Richtung) genau im Fokus des Strahls sein. Um dies zu erreichen kann die letzte Linse vor der Glaszelle mit Hilfe eines Verschiebetisches in  $x$ -Richtung verschoben werden, bis die Atome im Wellenleiter nicht mehr beschleunigt werden. Bei dieser Justage in Längsrichtung läßt sich jedoch nicht genau feststellen, ob nicht die Kräfte aufgrund einer leichten Verkipfung des Wellenleiters aus der Horizontalen durch ein Verschieben der Atome aus dem Fokus heraus kompensiert wurden. In diesem Fall hat der Wellenleiter aufgrund der Abhängigkeiten  $V_D(x)$  und  $w_D(x)$  eine geringere Fallenfrequenz  $\omega_{\perp}$  als berechnet. Außerdem erschwert ein zusätzlich noch vorhandenes magnetisches Potential die Justage (Abschnitt 3.4.1). Die Genauigkeit bei der Justage des Fokus in  $x$ -Richtung liegt im Bereich einiger Millimeter, vergleichbar mit der Rayleigh-Länge des Laserstrahls.

### Messung der transversalen Fallenfrequenz des Wellenleiters

Die transversale Fallenfrequenz des Wellenleiters ist ein wesentlicher Parameter in den Experimenten zum Dispersionsmanagement. Sie wird experimentell bestimmt, indem transversale Schwingungen der Atome im Wellenleiter angeregt werden. Dazu wird zunächst ein BEC in der Magnetfalle erzeugt und der Wellenleiter adiabatisch eingeschaltet. Das Kondensat befindet sich damit in seiner Ruhelage im kombinierten Potential aus Magnet- und Dipolfalle sowie der Gravitation. Dann wird die Magnetfalle plötzlich ausgeschaltet. Durch das Ausschalten der Magnetfalle verschiebt sich die Ruhelage der Atome im Wellenleiter plötzlich, und das Kondensat beginnt in vertikaler Richtung zu oszillieren. Abb. 2.8 zeigt eine solche Oszillation, die analog zur Oszillation des Kondensats in der Magnetfalle aufgenommen wurde.



**Abbildung 2.8** : Transversale Oszillation der Atome im Wellenleiter bei einer Leistung von  $P = 685$  mW im Laserstrahl. Der Fit an die Daten entspricht einer exponentiell gedämpften Schwingung mit einer Frequenz  $\omega_{\perp} = 2\pi \times 130 \pm 2$  Hz und einer Zeitkonstante  $\tau = 42 \pm 3$  ms für die Dämpfung. Die Meßpunkte streuen etwas, da die Magnetfalle beim Ausschalten von Schuß zu Schuß unterschiedliche Kräfte auf die Atome ausübt (vgl. Abschnitt 2.4.2).

Die gemessene Fallenfrequenz von  $\omega_{\perp} = 2\pi \times 130 \pm 2$  Hz stimmt nicht mit der für die experimentellen Parameter berechneten Fallenfrequenz von 184 Hz überein. Auch die Berücksichtigung des Gravitationspotentials bei der Berechnung der Fallenfrequenz führt auf  $\omega_{\perp} = 2\pi \times 176$  Hz und kann die Abweichung nicht erklären, ebensowenig die experimentelle Ungenauigkeit in der Bestimmung der Strahltaile. Die Ursache ist vermutlich, daß sich das Kondensat entlang des Wellenleiters nicht genau im Fokus des Laserstrahls befindet. Ein Abstand  $x = 0.65 x_R = 7$  mm der Atome vom Fokus kann die beobachtete Fallenfrequenz erklären. Ein Justagefehler in dieser Größenordnung ist leicht vorstellbar, da die genaue  $x$ -Position des Fokus in der Glaszelle nicht bestimmt werden kann.

Ebenfalls auffällig an Abb. 2.8 ist, daß die Schwingung in der Dipolfalle relativ stark gedämpft ist. Die Dämpfung deutet auf einen substantiellen Anteil thermischer Atome hin. Eventuell wird das Kondensat beim Umladen in die Dipolfalle aufgeheizt. In einer optimierten experimentellen Prozedur wurde daher nach Abschluß der Experimente für diese Diplomarbeit das Kondensat durch Verdampfungskühlung direkt in der Dipolfalle erzeugt.

### 2.4.2 Die zweite Dipolfalle

Die zweite Dipolfalle („Dipol2“ in Abb. 2.7) dient dazu, die Atome im Wellenleiter in  $x$ -Richtung zu halten, während die Magnetfalle ausgeschaltet wird. Im Experiment hatte sich gezeigt, daß beim schnellen Ausschalten des Quadrupol-Magnetfeldes den Atomen im Wellenleiter ein experimentell unkontrollierbarer

Impuls von der Größenordnung  $|p_{kick}| \sim 0.1 \hbar k_L$  übertragen wird. Dadurch ist der Quasiimpuls der Atome im optischen Gitter nicht mit hinreichender Genauigkeit einstellbar. Um dieses Problem zu vermeiden, wurde die zweite Dipolfalle aufgebaut. Sie wird zusammen mit dem Wellenleiter eingeschaltet und ermöglicht ein langsames Ausschalten der Magnetfalle. Nach Abschalten der Magnetfalle wird die zweite Dipolfalle mit Hilfe des AOMs in  $\sim 1 \mu\text{s}$  abgeschaltet. Dadurch können die Atome mit vernachlässigbarer Anfangsgeschwindigkeit in den Wellenleiter geladen werden.

Strahltaile und Intensität des Lichts im Fokus der zweiten Dipolfalle sind von vergleichbarer Größe wie im Fokus des Wellenleiters. Die Dipolfalle 2 muß mit den Atomen im Fokus des Wellenleiters genau überlappt werden, die Justage erfolgt analog zur Dipolfalle 1. Durch Änderung der Leistung im Laserstrahl der zweiten Dipolfalle kann die Größe des Anfangswellenpakets in  $x$ -Richtung in einem Bereich von 10–40  $\mu\text{m}$  eingestellt werden.

In den derzeit laufenden Experimenten hat die zweite Dipolfalle noch eine andere Funktion. Um sicherzustellen, daß das BEC im Grundzustand des Wellenleiters ohne nennenswerten Anteil thermischer Atome präpariert werden kann, wird die letzte Stufe der Verdampfungskühlung im Potential der beiden gekreuzten Dipolfallen durchgeführt. Dadurch kondensieren die Atome direkt in den Grundzustand des optischen Potentials.

### 2.4.3 Das periodische Potential

Das periodische Potential für die Atome wird durch eine rotverstimmte stehende Lichtwelle erzeugt. Zwei in entgegengesetzter Richtung propagierende Laserstrahlen derselben linearen Polarisation erzeugen die Stehwelle am Ort der Atome. Das Licht hierfür wird von einem Diodenlaser erzeugt (ECDL2, vgl. Abb. 2.6 rechts oben) und durch eine single-mode Glasfaser gefiltert. Vor der Glasfaser befindet sich noch ein mechanischer Shutter. Die Wellenlänge des Lichts kann im Bereich von 780 – 785 nm variiert werden. Im folgenden wird mit einer Wellenlänge von  $\lambda = 780.743 \text{ nm}$  gerechnet, dies entspricht einer Verstimmung  $\Delta_2 = -2\pi \times 2.45 \times 10^{11} \text{ Hz}$  von der  $D_2$ -Line und  $\Delta_1 = 2\pi \times 6.88 \times 10^{12} \text{ Hz}$  von der  $D_1$ -Line. Der Beitrag der  $D_1$ -Line zum Dipolpotential kann also gegenüber der  $D_2$ -Linie vernachlässigt werden.

Nach der Glasfaser wird das Licht in zwei kollimierte Strahlen vergleichbarer Leistung aufgespalten, die durch je einen AOM geschickt und am Ort der Atome miteinander überlappt werden (Abb. 2.7). Die AOMs dienen hier nicht nur der Kontrolle der Intensität in den Strahlen, mit ihnen kann auch die Frequenzdifferenz  $\Delta\omega$  zwischen den Strahlen eingestellt werden. Die AOMs werden durch die in Abschnitt 2.4.4 vorgestellte RF-Elektronik angesteuert.

Die Laserstrahlen des optischen Gitters haben Strahltaillen  $w_a = 590 \mu\text{m}$  für den vorderen und  $w_b = 650 \mu\text{m}$  für den hinteren Strahl, d.h. sehr viel größer als die Strahltaile des atomaren Wellenleiters. Daher kann die Intensität der

Strahlen über die gesamte Ausdehnung der atomaren Wellenpakete als konstant angenommen werden. Typische Leistungen in den Strahlen sind  $P_a = 0.90$  mW und  $P_b = 1.05$  mW. Dies führt auf Intensitäten  $I_a = 166$  mW/cm<sup>2</sup> und  $I_b = 100$  mW/cm<sup>2</sup>. Dabei wurde berücksichtigt, daß der hintere Strahl unter dem relativ kleinen Winkel von  $\alpha = 25^\circ$  auf die Oberfläche der Glaszelle fällt. Eine Messung ergab, daß nur 65 % der einfallenden Leistung transmittiert werden, der Rest wird an der Glaszelle reflektiert.

Das periodische Potential bildet einen Winkel von  $\alpha = 25^\circ$  mit dem Wellenleiter, wie aus Abb. 2.7 zu ersehen ist. Dies ist durch den verfügbaren optischen Zugang zur Glaszelle bedingt. Der Winkel zwischen optischem Gitter und Wellenleiter führt dazu, daß die Periodizität  $R$  des Potentials entlang des Wellenleiters um einen Faktor  $1/\cos \alpha = 1.10$  erhöht ist. Daher müssen alle mit der Periodizität des Gitters verknüpften Größen reskaliert werden:

$$R^\alpha = R/\cos \alpha = 429 \text{ nm}, \quad (2.7)$$

$$k_L^\alpha = k_L \cos \alpha = 7.33 \times 10^6 \text{ m}^{-1}, \quad (2.8)$$

$$E_r^\alpha = E_r \cos^2 \alpha = 0.82 E_r = 2.05 \times 10^{-30} \text{ J}, \quad (2.9)$$

$$\omega_r^\alpha = \omega_r \cos^2 \alpha = 2\pi \times 3098 \text{ Hz}, \quad (2.10)$$

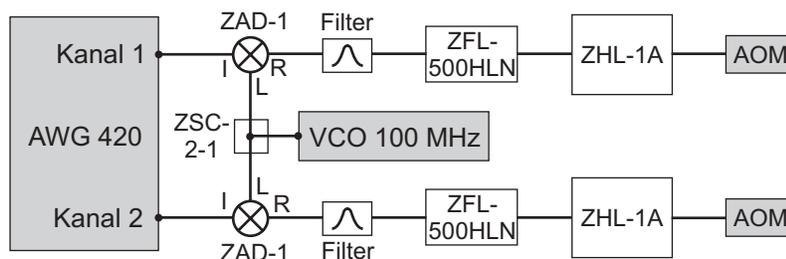
$$v_r^\alpha = v_r \cos \alpha = 5.33 \text{ mm/s}. \quad (2.11)$$

$$(2.12)$$

Mit den in diesem Abschnitt angegebenen Zahlenwerten ergibt Gl. 1.63 eine Modulationstiefe des periodischen Potentials von  $V_0 = 2.31 \times 10^{-31} \text{ J} = 1.12 E_r^\alpha$ . Die Photonen-Streureate ist  $\Gamma_s = 0.51 \text{ Hz}$  und damit auf den Zeitskalen des Experiments vernachlässigbar.

#### 2.4.4 RF-Elektronik zur Kontrolle des periodischen Potentials

Um die Atome im periodischen Potential bei variablem Quasiimpuls präparieren zu können, müssen Amplitude und Phase der Stehwelle kontrolliert werden (vgl. Abschnitte 1.2.3 und 1.6.2). Dies geschieht mit Hilfe der AOMs in den beiden Laserstrahlen, die die Stehwelle bilden. Die AOMs werden durch die in Abb. 2.9 gezeigte RF-Elektronik angesteuert: Ein VCO (Voltage Controlled Oscillator) erzeugt ein sinusförmiges Signal bei einer Frequenz von 100 MHz. Das Signal wird durch einen Power Splitter (Mini-Circuits ZSC-2-1) in zwei Kanäle für die beiden AOMs aufgespalten. In jedem Kanal mischt ein Frequenzmischer (Mini-Circuits ZAD-1) das 100 MHz-Signal mit dem Ausgangssignal eines Arbitrary Waveform Generators (Tektronix AWG 420) bei einer Frequenz von 10 MHz. Der AWG wird zur Kontrolle der Amplitude und der Frequenz der beiden Kanäle eingesetzt, seine Funktionsweise wird weiter unten detailliert besprochen. Nach dem Mischer enthält das Signal zahlreiche Frequenzkomponenten im Abstand von 10 MHz.



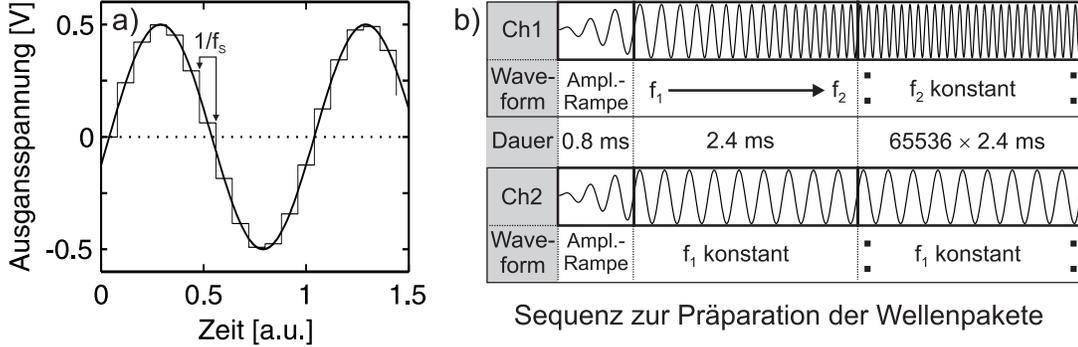
**Abbildung 2.9** : RF-Elektronik zur Kontrolle der Stehwellen-AOMs (siehe Text).

Ein selbst gebauter RF-Filter (s.u.) extrahiert die 110 MHz-Komponente des Signals. Diese wird durch zwei RF-Verstärker (Mini-Circuits ZFL-500HLN und Mini-Circuits ZHL-1A) auf eine Leistung von 1 W verstärkt. Mit den beiden Kanälen werden direkt die beiden akusto-optischen Modulatoren (Crystal Technology 3110-125, 110 MHz) getrieben.

### Der Arbitrary Waveform Generator

Herzstück der RF-Elektronik ist der Arbitrary Waveform Generator (AWG). Ein AWG spielt sog. „Waveforms“ ab: Eine Waveform ist eine digitale Liste von Spannungswerten in einem Waveform-Speicher, die mit der Samplingfrequenz  $f_s$  des AWG ausgegeben wird. Das digitale Ausgangssignal kann dann noch durch analoge Filter geglättet werden (Abb. 2.10(a)). Im Gegensatz zu einem Funktionsgenerator lassen sich auf diese Weise die Ausgangsspannungen der Kanäle zu jedem Zeitpunkt direkt programmieren und es können beliebige Ausgabefunktionen realisiert werden. In unserem Experiment wird immer eine sinusförmige Ausgabefunktion programmiert. Der AWG ermöglicht dabei die vollständige Kontrolle über Amplitude und Phase der beiden Ausgangskanäle, es können beliebige Frequenz- und Amplitudenrampen programmiert werden.

Der Tektronix AWG 420 hat zwei Kanäle mit einer Samplingfrequenz von bis zu  $f_s = 200$  MS/s, dies entspricht einer Zeitaufösung von  $\Delta t = f_s^{-1} = 5$  ns. Die vertikale Auflösung beträgt 16 bit bei einer Ausgangsspannung von 1 V<sub>pp</sub>. Beide Kanäle können Waveforms von bis zu 4 Millionen Punkten Länge abspielen. Die maximale analoge Ausgabefrequenz  $f_{max}$  des AWG ist durch das Nyquist Sampling Theorem zu  $f_{max} = f_s/2$  gegeben. Bei der maximalen Frequenz wird eine Periode des Sinus nur durch zwei digitale Punkte repräsentiert. Wir betreiben den AWG typischerweise bei  $f_s = 123.92$  MS/s. Werden in den Waveforms ca. 12 Punkte auf eine Periode des Sinus verwendet, entspricht dies einer Ausgabefrequenz  $f_{out} \simeq 10$  MHz. Damit Waveforms mehrere Male hintereinander ohne Phasensprung in der Ausgabefunktion abgespielt werden können, ist auf periodische Randbedingungen zu achten, d.h. es muß eine ganze Zahl von Perioden des Sinus in jeder Waveform programmiert sein. Die genaue Ausgabefrequenz



**Abbildung 2.10** : Waveform und Sequenz des AWG 420. (a) Eine Waveform enthält diskrete Spannungswerte, die mit der Samplingrate  $f_s$  ausgegeben werden (Stufen). Das Ausgangssignal wird durch einen internen Filter geglättet (durchgezogene Linie). (b) In einer Sequenz werden verschiedene Waveforms auf den beiden Kanälen hintereinander abgespielt. Die letzte Waveform wird im dargestellten Beispiel bis zum Ende des Experiments wiederholt.

des AWG ist dann von der Länge der Waveform (d.h. der Zahl  $Z_p$  der digitalen Punkte im Waveform-Speicher) und der Anzahl der Perioden des Sinus  $P$  in der Waveform bestimmt:

$$f_{out} = f_s \frac{P}{Z_p}. \quad (2.13)$$

Waveforms für die beiden Kanäle des AWG lassen sich in Sequenzen zusammenfassen. Dabei ist zu beachten, daß die Länge der Waveforms in den beiden Kanälen gleich sein muß. Abb. 2.10(b) zeigt als Beispiel eine Sequenz, wie sie im Experiment verwendet wird. Zunächst wird auf beiden Kanälen eine lineare Amplitudenrampe von 0.8 ms Dauer bei der Frequenz  $f_1 = 9.8829264$  MHz ausgegeben. Im nächsten Schritt wird die Frequenz in Kanal 1 innerhalb von 2.4 ms von  $f_1$  nach  $f_2$  um  $f_2 - f_1 = 12392$  Hz linear hochgerampft, in Kanal 2 wird die Frequenz unterdessen konstant auf  $f_1$  gehalten. Am Schluß der Sequenz werden Waveforms der Frequenzen  $f_2$  in Kanal 1 und  $f_1$  in Kanal 2 bei konstanter Amplitude ausgegeben. Die letzten Waveforms werden so lange wiederholt, bis das Experiment zu Ende ist. Mit dieser Sequenz kann das Kondensat wie in den Abschnitten 1.2.3 und 1.6.2 diskutiert am Rand der Brillouinzone bei  $k = k_L$  präpariert werden. Andere Werte für den Quasiimpuls  $k$  lassen sich durch entsprechende Wahl von  $f_2$  realisieren. Sowohl Waveforms als auch Sequenzen werden mit MATLAB programmiert und als Dateien auf den AWG überspielt. Das Abspielen der Sequenzen wird durch einen Trigger vom Steuerungscomputer des Experiments an den AWG synchron mit dem Abschalten der zweiten Dipolfalle (bzw. der Magnetfalle) gestartet.

Für die Präparation der Atome ist es wichtig, daß der Frequenzunterschied  $\Delta\omega = 2\pi \times (f_2 - f_1)$  der beiden Laserstrahlen der Stehwelle mit hinreichend

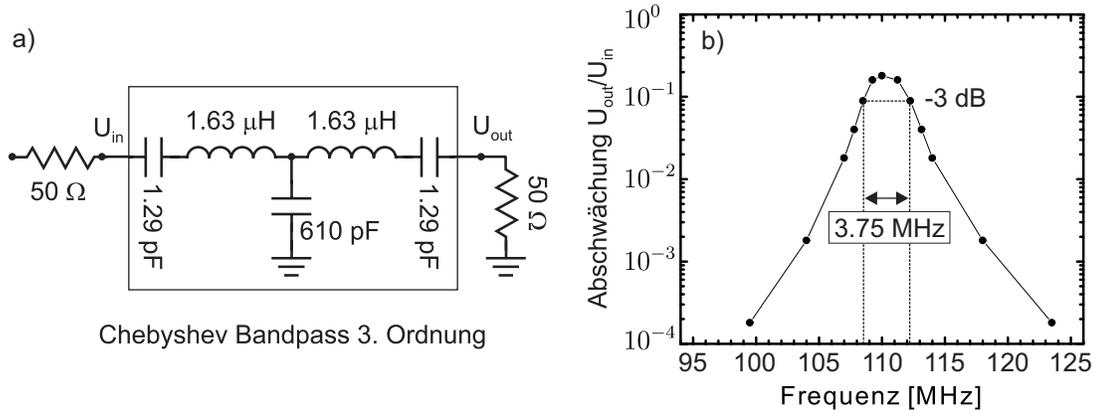
großer Auflösung eingestellt werden kann. Um Atome am Rand der Brillouinzone zu präparieren, müssen sich die Frequenzen der beiden Laserstrahlen um  $\Delta\omega = 4\omega_r^\alpha = 2\pi \times 12392$  Hz unterscheiden. Die Länge der Waveforms definiert aufgrund der periodischen Randbedingungen eine Frequenzauflösung  $\Delta f = f_s/Z_p$ , analog zum freien Spektralbereich eines Resonators. Für  $Z_p = 10^6$  und die oben angegebene Samplingfrequenz ergibt sich  $\Delta f = 123.92$  Hz. Daher kann der Bereich zwischen Zentrum und Rand der Brillouinzone bei fester Samplingfrequenz in 100 mögliche Quasiimpulsweite unterteilt werden. Der genaue Wert des Quasiimpulses wird dabei über die Zahl der Perioden  $P$  des Sinus in der Waveform eingestellt. Eine feinere Auflösung ist durch Ändern der Samplingfrequenz möglich. Diese Überlegungen beziehen sich nur auf den Frequenzunterschied am Ende der Präparation. Während der Frequenzrampe zur Beschleunigung des optischen Gitters ändert sich  $\Delta\omega$  kontinuierlich.

### Die RF-Filter

Nachdem das 10 MHz-Signal des AWG mit den 100 MHz aus dem VCO gemischt wurde, müssen alle Komponenten bis auf die 110 MHz-Komponente eliminiert werden. Die anderen Komponenten des Signals im Abstand von 10 MHz würden im AOM ebenfalls zu Beugungsordnungen des Laserstrahls führen, die mit der gewünschten Komponente interferieren (insbesondere die Komponente bei 90 MHz muß herausgefiltert werden, da sie gleich stark wie die 110 MHz-Komponente ist; die 100 MHz-Komponente wird bereits durch den verwendeten Mischer unterdrückt). Der verwendete Filter muß also ein Passband von wenigen MHz Breite bei 110 MHz besitzen. Hierzu wurde ein Chebyshev Bandpass-Filter 3. Ordnung konstruiert [HH89]. Abb. 2.11 zeigt den Aufbau des Filters sowie den gemessenen Frequenzgang. Die Punkte mit 3 dB Abschwächung sind bei 108.5 und 112.25 MHz. Damit ist das Passband schmal genug, um die unerwünschten Frequenzen zu unterdrücken. Gleichzeitig ist es breit genug, um die gewünschten Frequenzen in beiden Kanälen des AWG trotz des variablen Frequenzunterschieds von  $f_2 - f_1 < 20$  kHz passieren zu lassen. Die verwendeten Spulen bestehen aus 11.5 Windungen Kupferdraht und besitzen eine Induktivität von  $L = 1.63 \mu\text{H}$ . Zum Abgleichen des Filters wurden die Spulen leicht auseinandergezogen oder zusammengedrückt, um die Induktivität einzustellen. Der Filter ist für Anschlüsse mit einer Impedanz von  $50 \Omega$  konzipiert.

## 2.5 Das Abbildungssystem

In Experimenten mit Bose-Einstein Kondensaten kommt der optischen Abbildung des Kondensats eine wichtige Rolle zu. Aus mit einer CCD-Kamera aufgenommenen Bildern werden sämtliche Informationen über die kalten Atome (Temperatur, Atomzahl, Dichteverteilung der Atome) gewonnen. In den letzten Jahren wurde



**Abbildung 2.11** : Chebyshev Bandpass-Filter 3. Ordnung zur Aufbereitung des RF-Signals für die AOMs der Stehwelle. (a) Schaltbild. Der Bandpass 3. Ordnung hätte normalerweise noch eine Induktivität von  $3.42 \text{ nH}$  parallel zur Kapazität von  $610 \text{ pF}$ . Es stellte sich heraus, daß der Filter ohne diese besser abzugleichen ist. (b) Gemessener Frequenzgang des Filters. Das Passband zwischen den  $-3 \text{ dB}$ -Punkten ist  $3.75 \text{ MHz}$  breit. Das Signal wird bei der Resonanzfrequenz von  $110.5 \text{ MHz}$  auf einen Wert von  $0.18 U_{\text{in}}$  abgeschwächt.

eine Reihe unterschiedlicher Abbildungsmethoden entwickelt [KDS99]. In unserem Experiment wird Absorptionsabbildung verwendet, da dieses Verfahren auch bei kleinen Atomzahlen noch effizient und relativ leicht zu implementieren ist.

### 2.5.1 Absorptionsabbildung von kalten Atomen

In Abb. 2.7 ist auch das in unserem Experiment verwendete Abbildungssystem gezeigt. Ein in  $y$ -Richtung propagierender kollimierter Laserstrahl beleuchtet die kalten Atome mit resonantem Licht ( $F = 2 \rightarrow F' = 3$ -Übergang der  $D_2$ -Linie). Aus der transmittierten Intensitätsverteilung  $I(x, z)$  läßt sich Information über die Dichteverteilung  $n(x, z)$  der Atome gewinnen. Dazu wird der „Schatten“, den die Wolke kalter Atome wirft, auf eine CCD-Kamera (Princeton Instruments NTE/CCD-512TK) abgebildet: Zunächst erzeugen zwei Linsen der Brennweite  $f = 80 \text{ mm}$  ein 1:1-Bild der Atome. Dieses wird dann mit Hilfe von Mikroskopobjektiven wahlweise um einen Faktor  $M = 4$  oder  $M = 10$  vergrößert und auf das CCD-Array der Kamera abgebildet. Jeder Pixel des Arrays hat eine Fläche von  $24 \mu\text{m} \times 24 \mu\text{m}$  und „sieht“ dann eine Fläche von  $A = (24 \mu\text{m} \times 24 \mu\text{m})/M^2$ .

Bei jedem experimentellen Durchgang werden drei Bilder aufgenommen: ein Bild der Intensitätsverteilung  $I_p(x, z)$  des Lichts in Anwesenheit der Atome, ein Referenzbild der Intensitätsverteilung im Laserstrahl  $I_r(x, z)$  ohne Atome und ein Hintergrundbild  $I_b(x, z)$ , bei dem das CCD-Array durch den Shutter der Kamera verdunkelt ist. Mit Hilfe der drei Aufnahmen wird zunächst die ortsabhängige

optische Dichte der Atome

$$OD(x, z) = -\ln \left( \frac{I_p(x, z) - I_b(x, z)}{I_r(x, z) - I_b(x, z)} \right) \quad (2.14)$$

bestimmt. Auf diese Weise lassen sich Streulicht und stationäre Beugungsmuster im Laserstrahl, die durch die Abbildungsoptik hervorgerufen werden und sowohl in  $I_p$  als auch in  $I_r$  an der selben Stelle auftreten, weitgehend herausrechnen. Ebenso wird die von Pixel zu Pixel unterschiedliche Hintergrundzählrate des CCD-Arrays durch Subtrahieren von  $I_b$  aus den Bildern eliminiert. Im Laufe des Experiments stellte sich jedoch heraus, daß im Abbildungsstrahl auch zeitabhängige Beugungsmuster auftreten. Diese werden sowohl durch Vibrationen der Abbildungsoptik als auch der Glaszelle, durch die der Abbildungsstrahl hindurchtritt, hervorgerufen. Diese zeitabhängigen Beugungsmuster können durch die Aufnahme von Referenzbildern nicht eliminiert werden, da sie in  $I_p$  und  $I_r$  an unterschiedlichen Stellen auftreten. Sie limitieren letztlich die Qualität der aufgenommenen Bilder.

Aus der optischen Dichte wird die Dichteverteilung der Atome bestimmt [AMH<sup>+</sup>99, KDS99]

$$n(x, z) = \frac{N_A(x, z)}{A} = \frac{1}{\sigma_s} OD(x, z). \quad (2.15)$$

Dabei ist  $N_A(x, z)$  die vom Pixel bei  $x, y$  registrierte Atomzahl und

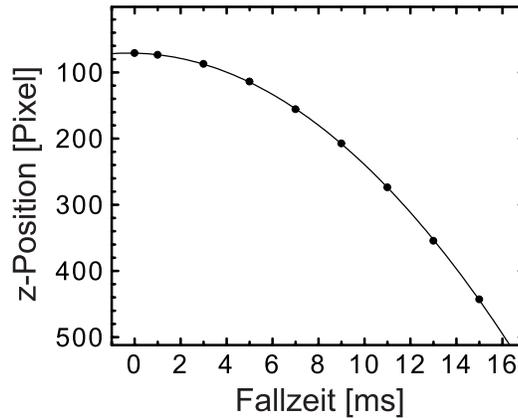
$$\sigma_s = \frac{\Gamma I_0 / 2I_{sat}}{1 + I_0 / I_{sat} + 4\Delta^2 / \Gamma^2} \cdot \frac{\hbar\omega_L}{I_0} \quad (2.16)$$

der Streuquerschnitt der Atome für Licht der Intensität  $I_0$  bei der Frequenz  $\omega_L$  mit einer Verstimmung  $\Delta$  von der Resonanz [Mv99]. Dabei wurde davon ausgegangen, daß der Streuquerschnitt  $\sigma_s$  über die gesamte Ausdehnung der atomaren Wolke konstant ist. Dazu muß  $I_0 / I_{sat} \ll (1 + 4\Delta^2 / \Gamma^2)$  sein, ansonsten muß die in der Wolke abfallende Intensität des Abbildungslaserstrahls berücksichtigt werden. Außerdem sollte die Strahltaile  $w_A$  des Laserstrahls sehr viel größer als die transversale Ausdehnung der Wolke sein, damit die Dichteverteilung in der atomaren Wolke richtig wiedergegeben wird. In unserem Fall ist  $w_A = 1.76$  mm, daher kann  $I_0$  als konstant angenommen werden. Die gesamte Atomzahl in der Wolke ergibt sich durch Aufsummieren der Pixel des CCD-Arrays zu

$$N_t = A \sum_{x,z} n(x, z) \quad (2.17)$$

oder alternativ aus einem zweidimensionalen Gauß-Fit an die Absorptionsbilder:

$$N_t = \frac{A}{\sigma_s} \frac{\pi}{2} C \sigma_x \sigma_z. \quad (2.18)$$



**Abbildung 2.12** : Längeneichung des Abbildungssystems mit fallenden Atomen. Gezeigt ist die Mittenposition der atomaren Wolke in Abhängigkeit von der Zeit nach dem Fallenlassen. Der parabolische Fit entspricht einer Vergrößerung  $M = 7.9$  des Abbildungssystems.

Dabei sind  $C$  die Amplitude und  $\sigma_{x,z}$  die halben  $e^{-2}$ -Breiten des Fits. Die Bestimmung der Atomzahl ist zum gegenwärtigen Zeitpunkt in unserem Experiment mit einer relativ hohen Ungenauigkeit behaftet. Wir schätzen den relativen Fehler auf rund 50 % der gemessenen Werte. Ursache sind vor allem Fehler bei der Messung der Verstimmung  $\Delta$  und der Annahme, daß die Intensität  $I_0$  in der Wolke nicht abfällt. Zur Zeit wird an einer verlässlicheren Bestimmung der Atomzahl gearbeitet.

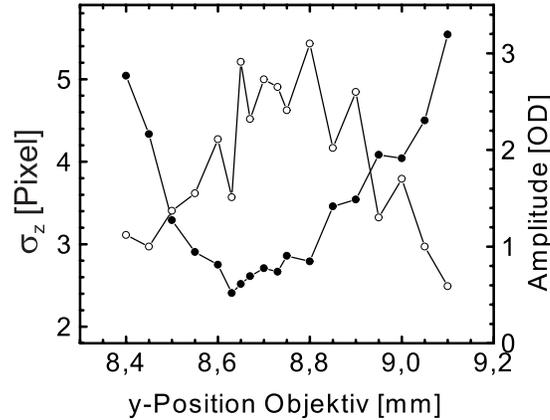
## 2.5.2 Justage und Eichung der Abbildung

Um aus den Absorptionsabbildungen Information gewinnen zu können, müssen zahlreiche Parameter der Abbildung geeicht werden.

### Längeneichung

Die Vergrößerung  $M$  kann bestimmt werden, indem BECs erzeugt, unter Einfluß der Gravitation fallengelassen und zu unterschiedlichen Zeiten abgebildet werden. Abb. 2.12 zeigt eine solche Messung.

Aus einem parabolischen Fit an die Daten entnimmt man, daß ein Pixel auf dem CCD-Array  $3.05 \pm 0.06 \mu\text{m}$  entspricht. Dies führt auf eine Vergrößerung  $M = 7.9$  durch die Abbildungsoptik. Dieser Wert ist kleiner als der angegebene Vergrößerungsfaktor  $M = 10$  des verwendeten Mikroskopobjektivs, da der Abstand des Mikroskopobjektivs vom CCD-Array zum Scharfstellen des Absorptionbildes experimentell eingestellt wurde und nicht genau dem für das Objektiv (Leica N Plan 10x/0.25-/A 5.8) vorgesehenen Wert entspricht.



**Abbildung 2.13** : Fokussieren der Abbildung. Gezeigt ist die halbe  $e^{-2}$ -Breite  $\sigma_z$  eines Gauß-Fits in  $z$ -Richtung an die atomare Wolke im Wellenleiter als Funktion der Position des Mikroskopobjektivs (schwarze Punkte). Die Amplitude des Fits (Kreise) hat ihr Maximum in etwa an der Stelle mit minimalem  $\sigma_z$ . Dort ist die Abbildung fokussiert.

### Intensitätseichung

Damit für jedes Bild die Intensität  $I_0$  und damit der Streuquerschnitt  $\sigma_s$  automatisch bestimmt werden können, wird einmalig ein Referenzbild bei bekannter Intensität  $I_1$  des Abbildungsstrahls aufgenommen. Die Zahl der vom CCD-Array bei dieser Leistung insgesamt registrierten Counts ist dann ein Maß für die Intensität  $I_1$  und kann als Vergleichswert zur Bestimmung der Intensität  $I_0$  des jeweiligen Referenzbildes im Experiment dienen. Im Experiment kann dann die Leistung im Abbildungsstrahl den jeweiligen Erfordernissen angepaßt werden, ohne jedes mal die Intensität des Strahls neu zu bestimmen. Bei den Experimenten zum Dispersionsmanagement wird typischerweise mit  $I_0 = 1.5 I_{sat}$  gearbeitet.

### Scharfstellen der Abbildung

Um die Größe der atomaren Wolke zuverlässig bestimmen zu können, muß die Abbildung scharfgestellt werden. Dazu wird das Mikroskopobjektiv auf einem Verschiebetisch in  $y$ -Richtung verschoben. Die Abbildung ist dann scharfgestellt, wenn die Breite der abgebildeten Wolke minimal und die gemessene optische Dichte im Zentrum maximal ist. Breite und maximale optische Dichte der Wolke werden aus einem Gauß-Fit an die Dichteverteilung bestimmt. Abb. 2.13 zeigt die Abhängigkeit dieser beiden Größen von der Position des Mikroskopobjektivs. Nach dem Scharfstellen muß dann eine Längeneichung der Abbildung durchgeführt werden.

Die Justage ist um so genauer, je kleiner die zum Scharfstellen verwendeten atomaren Wolken sind. Daher wurden in der Regel Kondensate im Wellenleiter

verwendet, die in  $z$ -Richtung sehr schmal sind. Die dem gaußförmigen transversalen Grundzustand des Wellenleiters entsprechende Dichteverteilung der Atome hat bei einer Fallenfrequenz von  $\omega_{\perp} = 2\pi \times 130$  Hz eine halbe  $e^{-2}$ -Breite von nur  $\sigma_z = 1.34 \mu\text{m}$ . Die gemessene minimale Breite ist mit  $\sigma_z = 9 \mu\text{m}$  deutlich größer. Auch eine mögliche Verbreiterung des Grundzustandes durch die repulsive Wechselwirkung kann die beobachtete Breite nicht erklären. Daher muß angenommen werden, daß die gemessene Größe durch die minimale Auflösung unseres Abbildungssystems von  $\simeq 9 \mu\text{m}$  gegeben ist.

### Einstellen der Verstimmung des Abbildungslasers

Die Frequenz des Abbildungslaserstrahls muß bei Absorptionsabbildung in der Nähe der Resonanz stehen. Dadurch werden Beugungseffekte an der atomaren Wolke minimiert, die bei einem verstimmten Abbildungslaser auftreten, da die Atome dann auch zu einer Phasenverschiebung des Lichts führen. Die Verstimmung des Abbildungslaserstrahls wird experimentell eingestellt, indem die gemessene Atomzahl  $N_t$  als Funktion der Frequenz des Laserstrahls aufgetragen wird (dabei wird bei der Bestimmung von  $N_t$  aus den Daten immer  $\Delta = 0$  angenommen, d.h. die gemessene Atomzahl nicht um die Verstimmung des Lichts korrigiert). Das Maximum der so bestimmten Atomzahl entspricht dann der Resonanz. Das Magnetfeld am Ort der Atome ist durch das rotierende Bias-Feld gegeben und beeinflusst die Lage der Resonanz  $F = 2, m_F = 2 \rightarrow F' = 3, m'_F = 3$ . Daher muß die Frequenz des Laserstrahls für jeden Wert des Bias-Feldes erneut eingestellt werden.

Das Abbildungslicht sollte genau  $\sigma^+$ -polarisiert sein, damit möglichst viele Photonen von den Atomen im  $F = 2, m_F = 2$ -Zustand gestreut werden. Bei Experimenten in einer TOP-Falle wird auch die Richtung des Magnetfelds am Ort der Atome durch das rotierende Bias-Feld bestimmt. Daher muß der Abbildungsstrahl in kurzen Pulsen von  $5 \mu\text{s}$  Dauer angeschaltet werden, die mit der Stellung des Bias-Feldes zu synchronisieren sind.

### 2.5.3 Time-of-flight Messungen

Bei Experimenten mit ultrakalten Atomen ist es wichtig, eine zuverlässige Methode zur Bestimmung der Impulsverteilung eines Ensembles von Atomen zu besitzen. Einerseits erlaubt dies im Falle eines thermischen Ensembles die Bestimmung der Temperatur, andererseits ist gerade das Auftreten einer nicht-thermischen Impulsverteilung eine wichtige Signatur der Bose-Einstein-Kondensation.

Bei einem thermischen Ensemble weit oberhalb der kritischen Temperatur ( $T \gg T_c$ ) kann aus der Größe der Wolke in der Magnetfalle auf die Temperatur geschlossen werden. Aus einem zweidimensionalen Gauß-Fit

$$OD(x, z) = C \exp \left[ -\frac{2x^2}{\sigma_x^2} - \frac{2z^2}{\sigma_z^2} \right] \quad (2.19)$$

an die optische Dichte  $OD(x, z)$  der Atome in der Magnetfalle bei einem Bias-Feld  $B_0$  und einem radialen Gradienten  $B'_q$  ergibt sich die Temperatur zu [AMH<sup>+</sup>99, KDS99]

$$\frac{3}{2}k_B T = \frac{\mu_B B'_q{}^2}{16B_0} (2\sigma_x^2 + 8\sigma_z^2). \quad (2.20)$$

Dabei wurde von der Rotationssymmetrie der Falle um die  $z$ -Achse Gebrauch gemacht.

Bei sehr niedrigen Temperaturen in der Nähe von  $T_c$  wird die atomare Wolke in der Magnetfalle so klein und optisch so dicht, daß eine zuverlässige Bestimmung der Dichteverteilung durch Absorptionsabbildung der Atome in der Magnetfalle nicht mehr möglich ist. Dann kann zur Bestimmung der Temperatur eine time-of-flight Messung durchgeführt werden. Dabei wird die Falle plötzlich abgeschaltet, und die Atome fallen unter dem Einfluß der Gravitation nach unten. Ist die für das Abschalten benötigte Zeit  $\Delta t$  sehr viel kleiner als die inverse Fallenfrequenz,  $\Delta t \ll \omega^{-1}$ , so expandiert die Wolke ballistisch und läßt Rückschlüsse auf die Impulsverteilung der Atome in der Falle zu. Die time-of-flight Methode ist besonders zuverlässig, wenn die expandierte Wolke sehr viel größer als die Anfangsgröße der Wolke in der Falle ist. Dann ist die räumliche Verteilung der expandierten Wolke direkt ein Maß für die Impulsverteilung.

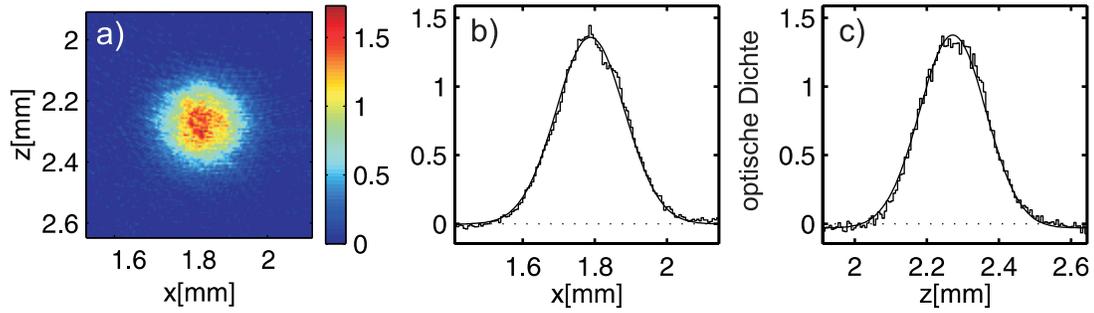
Abb. 2.14 zeigt eine time-of-flight Messung am Beispiel einer thermischen Wolke. Thermische Ensembles aus einer harmonischen Falle zeigen bei  $T \gg T_c$  eine gaußförmige Impulsverteilung. Aus den Breiten  $\sigma_{x,z}(t_{TOF})$  des Gauß-Fits nach der Fallzeit  $t_{TOF}$  läßt sich die Temperatur zu

$$\frac{3}{2}k_B T = \frac{1}{2}m (2v_x^2 + v_z^2), \quad v_i^2 = \frac{\sigma_i^2(t_{TOF}) - \sigma_i^2(0)}{4t_{TOF}^2} \quad (2.21)$$

bestimmen. Dabei sind  $\sigma_i(0)$  die Anfangsbreiten der Wolke in der Falle, die entweder direkt gemessen oder über Gl. 2.20 auf die Temperatur und die Fallenparameter zurückgeführt werden können, wenn das Aspektverhältnis  $\sigma_x = \sigma_y = \sqrt{8}\sigma_z$  der thermischen Wolke in der TOP-Falle als bekannt vorausgesetzt wird. Auf diese Weise wurde für die Wolke in Abb. 2.14 eine Temperatur von  $T = 222$  nK bestimmt. Die Expansion der Wolke fand aus einer adiabatisch entspannten Falle statt, vgl. Abschnitt 3.3. In dieser Falle ist  $T_c$  rund eine Größenordnung niedriger als in den Experimenten zur Bose-Einstein Kondensation aus Kapitel 3. Daher ist in der Messung aus Abb. 2.14  $T \gg T_c$  erfüllt. Die Gesamtzahl der Atome in der Wolke ergibt sich aus Gl. 2.18 zu  $N_t = 2.5 \times 10^6$ . Damit kann auf die Dichteverteilung der thermischen Atome in der Falle zurückgeschlossen werden:

$$n_{th}(x, y, z) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \frac{N_t}{\sigma_x^2(0)\sigma_z(0)} \exp\left[-\frac{2x^2}{\sigma_x^2(0)} - \frac{2y^2}{\sigma_x^2(0)} - \frac{2z^2}{\sigma_z^2(0)}\right]. \quad (2.22)$$

Für Abb. 2.14 ergibt sich  $n_{th}(0) = 3.0 \times 10^{12} \text{ cm}^{-3}$  als Dichte im Zentrum der



**Abbildung 2.14** : Beispiel für eine Time-of-flight Messung. (a) Absorptionsbild nach  $t_{TOF} = 18$  ms Fallzeit. Die Farben stehen für die optische Dichte  $OD(x, z)$  der Atome. (b) Schnitt in  $x$ -Richtung durch das Absorptionsbild und Gauß-Fit an die Daten. (c) Schnitt in  $z$ -Richtung durch das Absorptionsbild und Gauß-Fit an die Daten. Aus den Breiten  $\sigma_x = 190 \mu\text{m}$  und  $\sigma_z = 184 \mu\text{m}$  der Fits kann die Temperatur der Atome bestimmt werden.

Verteilung, dies führt auf eine Phasenraumdichte im Zentrum

$$\rho(0) = n(0)\lambda_{dB}^3(T) = 0.19, \quad (2.23)$$

ca. eine Größenordnung vom kritischen Wert  $\rho_c = 2.61$  für Bose-Einstein Kondensation entfernt.



# Kapitel 3

## Der Weg zum Bose-Einstein Kondensat

Der experimentelle Weg zum Bose-Einstein Kondensat als Quelle nichtlinearer Materiewellen wird in diesem Kapitel beschrieben. Er kann in mehrere Schritte unterteilt werden: zunächst muß die Magnetfalle mit Hilfe von Funnel, MOT und Polarisationsgradientenkühlung mit kalten Atomen geladen werden. Dann werden die Atome in der Magnetfalle evaporativ zum BEC gekühlt. Die Kondensate werden nachgewiesen, indem der plötzliche Anstieg der optischen Dichte, die bimodale Geschwindigkeitsverteilung des atomaren Ensembles und die anisotrope Expansion des Kondensats beobachtet werden. Zum Schluß wird das Kondensat in den Wellenleiter umgeladen und die Expansion des BECs in der eindimensionalen Geometrie untersucht. Dabei konnten Dipol- und Quadrupolschwingungen des atomaren Ensembles beobachtet werden.

### 3.1 Laden der Magnetfalle

Um einen guten Ausgangspunkt für die Verdampfungskühlung zu schaffen, muß die Magnetfalle mit möglichst vielen Atome bei möglichst hoher Dichte geladen werden. Dafür ist eine große Atomzahl in der MOT unerlässlich. Der Umladeprozess besteht aus Phasen der Kompression der MOT, Polarisationsgradientenkühlung, optischem Pumpen und „mode-matching“ beim Anschalten der Magnetfalle. Alle Parameter wurden dabei auf hohe Atomzahl und Dichte in der Magnetfalle hin optimiert. Eine ausführlichere Diskussion der einzelnen Schritte findet man in [Arl00].

#### Laden der MOT

Zu Beginn des Experiments wird die MOT in 30 s mit rund  $4 \times 10^8$  Atomen geladen. Die Laderate der MOT ist dabei vom Rb-Hintergrundgasdruck und damit vom Strom durch die Dispenser abhängig, typischerweise werden zwei

Rb-Dispenser mit einem Strom von je 3.0 A betrieben. Experimentelle Parameter von MOT und Funnel sind in Abschnitt 2.1.3 angegeben, Laderate, Lebensdauer und andere Größen wurden in [For01] bestimmt. Während des Ladens wird noch zusätzlich zur üblichen MOT-Konfiguration ein rotierendes Bias-Feld mit 3.0 G zugeschaltet. Dadurch konnte eine Verdopplung der maximalen Atomzahl in der MOT erreicht werden, gleichzeitig ist die atomare Wolke wesentlich ausgedehnter. Es stellte sich heraus, daß eine ausgedehnte MOT mit großer Atomzahl einer auf hohe Dichte hin optimierten MOT als Ausgangspunkt des Experiments vorzuziehen sind, da die Dichte auch direkt vor dem Umladen in die Magnetfalle transient erhöht werden kann.

### Kompression

Nach dem Laden wird die MOT komprimiert. Dies erhöht die Dichte der atomaren Wolke um rund eine Größenordnung. Zur Kompression wird zunächst das Bias-Feld abgeschaltet. Dann wird das Quadrupolfeld von  $B'_q = 2.8$  G/cm in 50 ms auf  $B'_q = 9.6$  G/cm linear hochgerampft. Gleichzeitig wird die Verstimmung der MOT-Laserstrahlen von  $\Delta = 1.4\Gamma$  auf  $\Delta = 5.2\Gamma$  erhöht, um dichtelimitierende Prozesse durch Reabsorption von Photonen in der MOT zu unterdrücken.

### Optische Melasse

Um die Temperatur der komprimierten atomaren Wolke zu senken und damit die Phasenraumdichte zu erhöhen, werden die Atome 9 ms lang durch Polarisationsgradientenkühlung auf eine Temperatur von  $T \simeq 40 \mu\text{K}$  abgekühlt. Dabei müssen alle Magnetfelder abgeschaltet werden und die Verstimmung der MOT-Laserstrahlen wird auf  $\Delta = 8.9\Gamma$  erhöht. Die Leistung in den Laserstrahlen wird zu Beginn der Polarisationsgradientenkühlung auf 65 % ihres Ausgangswertes abgesenkt und dann innerhalb 9 ms auf 20 % heruntergefahren.

### Optisches Pumpen

In der Magnetfalle sollen Atome im  $F = 2, m_F = 2$ -Zustand gefangen werden. Nach der Polarisationsgradientenkühlung liegen die Atome jedoch in einem Gemisch aller  $m_F$ -Niveaus des  $F = 2$ -Zustands vor. Daher müssen die Atome noch vor dem Anschalten der Magnetfalle durch optisches Pumpen in den  $m_F = 2$ -Zustand gebracht werden. Beim optischen Pumpen wird resonantes Licht auf dem  $F = 2 \rightarrow F' = 3$ -Übergang an den Atomen gestreut. Die Photonen haben  $\sigma^+$ -Polarisation und erhöhen damit bei Absorption den Drehimpuls in Quantisierungsrichtung. Gleichzeitig führt der Rückstoß der spontan emittierten Photonen zu einem Aufheizen des atomaren Ensembles. Um möglichst viele Atome bei niedriger Temperatur in die Magnetfalle zu laden, muß daher beim optischen Pumpen ein Kompromiß zwischen maximalem Transfer der atomaren Population nach  $m_F = 2$  einerseits und niedriger Temperatur andererseits eingegangen

werden. Da die Photonen-Rückstoßtemperatur  $T_r = 2 E_r/k_B$  auf der  $D_2$ -Linie von  $^{87}\text{Rb}$  nur 360 nK beträgt und damit sehr viel kleiner ist als die Temperatur der Atome nach der optischen Melasse, läßt sich eine Polarisation des atomaren Ensembles ohne großes Aufheizen erreichen.

Im Experiment wird zunächst ein Bias-Feld von  $B_0 = 3$  G eingeschaltet, um eine Quantisierungsachse vorzugeben. Dann wird ein Großteil der Atome durch fünf resonante Lichtpulse aus dem Abbildungslaserstrahl nach  $m_F = 2$  gepumpt. Die Pulse sind mit dem rotierenden Bias-Feld synchronisiert, haben eine Dauer von  $2.5 \mu\text{s}$  und eine Intensität von  $I \simeq I_{\text{sat}}$ . Intensität und Frequenz des Lichts werden letztlich auf maximale Umladeeffizienz in die Magnetfalle hin optimiert.

### Einschalten der Magnetfalle

Beim Einschalten der Magnetfalle ist auf zwei Dinge zu achten:

1. Die Größe der Falle, die durch den Radius  $r_0$  des „circle-of-death“ bestimmt ist, muß ausreichen, um alle Atome aus der kalten Wolke einzufangen. Da  $r_0 = B_0/B'_q$  ist, erfordert dies große Bias-Felder und kleine Gradienten.
2. Die Fallenfrequenzen  $\omega \sim B'_q/\sqrt{B_0}$  müssen der Impulsverteilung und der Größe der kalten Wolke angepaßt werden. Dadurch wird eine Dichtereduktion oder das Anregen von Oszillationen in der Wolke beim Umladen vermieden.

Sind beide Kriterien erfüllt, so ist die Falle „mode-matched“. Experimentell wird wieder auf maximale Umladeeffizienz und niedrige Temperatur hin optimiert. Wir legen einen Gradienten von  $B'_q = 72$  G/cm und ein Bias-Feld von  $B_0 = 23$  G beim Einschalten der Magnetfalle an. Dies entspricht einer radialen Fallenfrequenz von  $\omega_x = 2\pi \times 13.5$  Hz und einem „circle-of-death“-Radius von  $r_0 = 3.2$  mm. Mit diesen Parametern gelingt es,  $2 \times 10^8$  Atome in die Magnetfalle zu laden, dies sind etwa 50 % der anfangs in der MOT gefangenen Atome.

## 3.2 Verdampfungskühlung in der Magnetfalle

Das in der Magnetfalle gefangene Ensemble aus kalten Atomen soll nun durch Verdampfungskühlung zur Bose-Einstein Kondensation gebracht werden. Evaporatives Kühlen beruht darauf, selektiv heiße Atome aus der Falle zu entfernen. Die restlichen Atome rethermalisieren durch Stöße bei einer niedrigeren Temperatur. Evaporation tritt in Fallen endlicher Fallentiefe automatisch auf, da die heißesten Atome der thermischen Verteilung die Falle verlassen können. Im Experiment wird dieser Prozeß jedoch beschleunigt, indem heiße Atome aktiv aus der Falle entfernt werden („forced evaporation“). Dabei ist einerseits darauf zu achten, daß die Evaporation langsam genug erfolgt, damit die verbleibenden Atome rethermalisieren können. Zur Rethermalisierung ist eine hohe Rate elastischer

Stöße zwischen den Atomen nötig. Andererseits muß der gesamte Evaporationsprozeß schnell genug sein, um Verluste aufgrund der endlichen Lebensdauer der Atome in der Falle zu vermeiden. Verluste werden in der TOP-Falle bei hohen atomaren Dichten vor allem durch inelastische Stöße der Atome in der Falle hervorgerufen (Kollisionen mit dem Hintergrundgas sind dagegen bei dem in unserem Experiment vorherrschenden Druck vernachlässigbar). Evaporatives Kühlen setzt also ein günstiges Verhältnis von „guten“ zu „schlechten“, d.h. elastischen zu inelastischen Stößen voraus. Dieses Verhältnis ist bei  $^{87}\text{Rb}$  im Vergleich zu anderen Elementen sehr günstig, daher wird Rubidium in Experimenten zur Bose-Einstein Kondensation bevorzugt eingesetzt. Details zur Theorie der Verdampfungskühlung findet man in [Kv96].

In einem harmonischen Potential befinden sich heißere Atome mit höherer Wahrscheinlichkeit am Rand der Falle als kältere Atome. Verdampfungskühlung kann also implementiert werden, indem Atome bei hohen potentiellen Energien am Rand der Falle entfernt werden. Dies kann in der TOP-Falle auf zwei Arten geschehen:

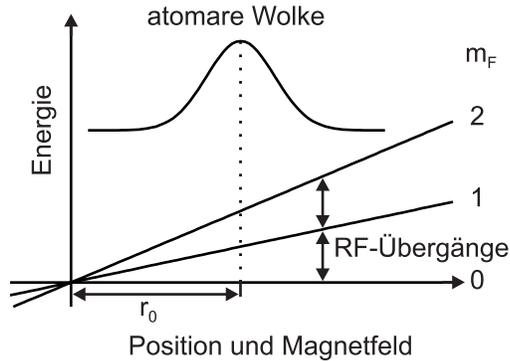
### „Circle-of-death“-Evaporation

Zum einen besteht die Möglichkeit der „circle-of-death“ (COD)-Evaporation. In einer TOP-Falle rotiert der Nullpunkt des instantanen Magnetfeldes auf einem Kreis mit Radius  $r_0 = B_0/B'_q$  in der  $xy$ -Ebene (vgl. Abschnitt 2.1.4). Atome innerhalb des COD sind in der Falle gefangen, auf dem COD führen Majorana-Übergänge in nicht gefangene  $m_F$ -Zustände zu einem Verlust von Atomen aus der Falle. Wird der Radius  $r_0$  des COD durch Verkleinerung des Bias-Feldes  $B_0$  langsam reduziert, können durch die Majorana-Übergänge selektiv heiße Atome vom Rand der Falle entfernt werden. Dieser „Schnitt“ in die Verteilung der Atome in der Falle erfolgt dabei nur auf einem Ring in der  $xy$ -Ebene. Durch die Reduktion des Bias-Feldes werden gleichzeitig die Fallenfrequenzen der TOP-Falle erhöht, dies führt zu höherer Dichte und damit höheren Stoßraten.

Das Bias-Feld kann nicht auf beliebig kleine Werte abgesenkt werden, da sonst Fluktuationen in den Magnetfeldern die TOP-Falle instabil werden lassen. Daher wird im Experiment noch eine zweite Methode zur Verdampfungskühlung eingesetzt:

### Radiofrequenz-Evaporation

Die RF-Evaporation beruht darauf, mit Hilfe von Radiofrequenz-Strahlung Übergänge in nicht gefangene  $m_F$ -Zustände zu treiben. Dabei wird ebenfalls die Ortsabhängigkeit der instantanen Magnetfelder in der TOP-Falle und damit die Ortsabhängigkeit der Zeeman-Aufspaltung ausgenutzt (Abb. 3.1). Atome am Rand der TOP-Falle erfahren periodisch höhere Magnetfelder als Atome im Zentrum. Über die Frequenz der RF-Strahlung kann eingestellt werden, welche Atome in der



**Abbildung 3.1** : RF-Evaporation in der TOP-Falle. Gezeigt ist die Energie der  $m_F$ -Zustände im instantanen Magnetfeld der TOP-Falle sowie die Position der atomaren Wolke. Bei den Magnetfeldern im Experiment ist die Zeeman-Verschiebung der Niveaus linear. Die durch die RF-Strahlung getriebenen Übergänge entfernen Atome selektiv vom Rand der Falle.

Falle resonant in andere  $m_F$ -Zustände überführt werden. Indem die RF-Strahlung von hohen Frequenzen her kommend langsam verkleinert wird, kann so ebenfalls von außen in die Wolke der Atome „hineingeschnitten“ werden. Die RF-Strahlung bezeichnet man daher auch als „RF-Messer“. Aufgrund der Geometrie der Magnetfelder und der Verschiebung der Ruhelage der atomaren Wolke in der Falle durch die Gravitation schneidet das RF-Messer auf einem Ellipsoid in die atomare Wolke. Der Schnitt ist damit höherdimensional als bei der COD-Evaporation.

Damit die RF-Evaporation im rotierenden Bias-Feld effektiv funktioniert, muß die Rabifrequenz  $\Omega_{RF} = \mu_B B_{RF} / \hbar$  für die RF-Übergänge sehr viel größer als die Rotationsfrequenz  $\omega_{bias} = 2\pi \times 9.8 \text{ kHz}$  des Bias-Feldes sein. Dies erfordert ausreichende RF-Leistung am Ort der Atome. Im Experiment ist typischerweise  $\Omega_{RF} \simeq 2\pi \times 100 \text{ kHz}$  und damit  $\Omega_{RF} \gg \omega_{bias}$ .

### Evaporation in der Dipolfalle

Im aktuellen Stadium des Experiments wird Bose-Einstein Kondensation in der gekreuzten Dipolfalle erreicht. In der Dipolfalle können COD- und RF-Evaporation nicht verwendet werden, da alle  $m_F$ -Zustände im optischen Potential gefangen werden. Daher wird eine dritte Evaporationstechnik eingesetzt: In der Dipolfalle können die Atome durch adiabatisches Absenken des Potentials und die damit einher gehende Reduktion der Falltiefe evaporativ gekühlt werden [BSC01]. In unserem Experiment wird dies durch langsame Reduktion der Leistung in den Dipolfallen-Laserstrahlen erreicht. Im folgenden wird nur auf die Evaporation in der Magnetfalle näher eingegangen, da diese Technik bei den meisten der in dieser Arbeit vorgestellten Messungen verwendet wurde. Lediglich bei einem der in

Kapitel 5 vorgestellten Experimente wurde Evaporation in der Dipolfalle eingesetzt (Abschnitt 5.2).

### 3.2.1 Verdampfungskühlung im Experiment

Nachdem die atomare Wolke in die Magnetfalle geladen wurde, wird die Falle komprimiert und in zwei Schritten Verdampfungskühlung bis zum BEC durchgeführt. Diese Schritte lehnen sich an andere Experimente zur Bose-Einstein Kondensation in TOP-Fallen an. Die genauen Parameter für unser Experiment wurden letztlich durch Ausprobieren ermittelt, sie haben sich seit der ersten Realisierung eines Kondensats in unserem Experiment nahezu nicht verändert.

1. Die Magnetfalle wird adiabatisch komprimiert. Bei konstanter Phasenraum-dichte werden dadurch die Dichte und Temperatur des atomaren Ensembles erhöht, dies führt zu höheren Stoßraten und damit besseren Voraussetzungen für Verdampfungskühlung. Zur adiabatischen Kompression werden  $B'_q$  von 72 G/cm auf 240 G/cm und  $B_0$  von 23 G auf 46 G innerhalb von 3 s linear hochgerampft. Die Fallenfrequenz erhöht sich dabei von  $\omega_x = 2\pi \times 13.5$  Hz auf  $\omega_x = 2\pi \times 32$  Hz, der Radius des COD verringert sich von 3.2 mm auf 1.9 mm. Am Ende der Kompression hat die atomare Wolke einen  $e^{-2}$ -Radius von  $\sigma_x = 1.38$  mm, d.h. der COD schneidet erst wenig in die Wolke hinein. Die atomare Dichte im Zentrum der Wolke ist  $n(0) = 1 \times 10^{11}$  cm $^{-3}$  und die Temperatur  $T = 230$   $\mu$ K. Dies entspricht einer Phasenraum-dichte von  $\rho = 2 \times 10^{-7}$ .
2. Als nächstes folgen 29 s der COD-Evaporation. Die Dauer dieser Evaporationsrampe ist neben dem Laden der MOT der längste Zeitschritt im Experiment, sie ist jedoch kürzer als die Lebensdauer der Atome in der TOP-Falle von rund 60 s. Während der COD-Evaporation wird der Quadrupol-Gradient konstant auf 240 G/cm gehalten, während das Bias-Feld linear auf 4.8 G heruntergefahren wird. Dadurch verringert sich der Radius des COD auf  $r_0 = 200$   $\mu$ m. Die Fallenfrequenz steigt auf  $\omega_x = 2\pi \times 99$  Hz an.
3. Im dritten Schritt wird bei konstanten Magnetfeldern ( $B'_q = 240$  G/cm,  $B_0 = 4.8$  G) RF-Evaporation durchgeführt. Dazu wird die RF-Strahlung mit einer Frequenz von 6 MHz eingeschaltet. Dies entspricht RF-Evaporation gerade innerhalb des COD. Die Frequenz wird dann in einer linearen Rampe innerhalb von 6.2 s auf eine variable Endfrequenz  $f_{end}$  heruntergefahren. Bose-Einstein Kondensation tritt in unserem Experiment typischerweise bei Endfrequenzen unterhalb von 3.85 MHz auf. Das RF-Messer ist dann rund 50  $\mu$ m vom Zentrum der Falle entfernt.

Der Erfolg des Verdampfungskühlens kann zunächst an der Entwicklung der Phasenraum-dichte während der einzelnen Evaporationsschritte gesehen werden.

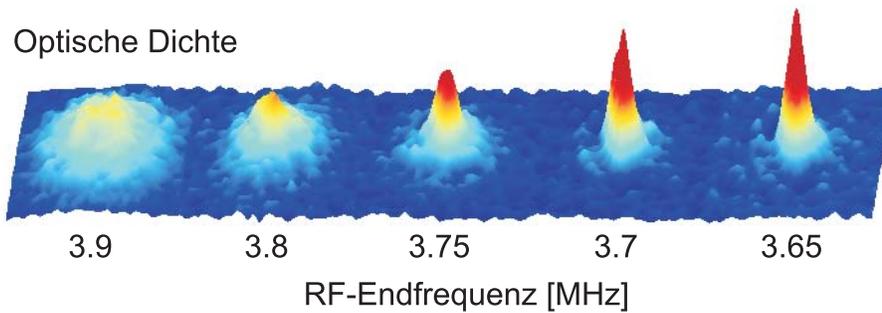
Dieser berechnete Wert ist jedoch mit Ungenauigkeiten behaftet, da vor allem die Bestimmung der Atomzahl aber auch die Bestimmung der Temperatur der atomaren Wolke in der Falle ungenau sind (vgl. Abschnitt 2.5). Direkt sichtbar wird das Einsetzen der Kondensation dagegen am Auftreten der charakteristischen experimentellen Signaturen, die im nächsten Kapitel beschrieben werden.

### 3.3 Signaturen der Bose-Einstein Kondensation

An der großen Faszination, die die experimentelle Beobachtung der Bose-Einstein Kondensation in verdünnten atomaren Gasen ausgelöst hat, haben die klaren experimentellen Signaturen dieses Phänomens einen nicht unwesentlichen Anteil. Mit der Kondensation geht eben nicht nur ein Anstieg der Phasenraumdicke über den kritischen Wert einher, sondern das Verhalten des atomaren Ensembles zeigt auch eine Reihe von dramatischen qualitativen Veränderungen. Dabei spielt eine wichtige Rolle, daß sich die Kondensation in einer harmonischen Falle nicht nur im Impulsraum, sondern auch im Ortsraum zeigt, d.h. sowohl die Impulsverteilung als auch die Dichteverteilung der Atome ändert sich stark. Dies stellt einen Unterschied zur Bose-Einstein Kondensation freier Teilchen dar. Bereits in den ersten Experimenten wurde der plötzliche Anstieg der optischen Dichte, die bimodale Geschwindigkeitsverteilung des atomaren Ensembles und die anisotrope Expansion des Kondensats beobachtet [DMA<sup>+</sup>95]. Diese Phänomene waren auch in unserem Experiment der überzeugende Nachweis der Bose-Einstein Kondensation.

Das Kondensat wird in einer Magnetfalle mit sehr hohen Fallenfrequenzen erzeugt. Um die Signaturen der Bose-Einstein Kondensation besser beobachten zu können, wird die Falle zunächst adiabatisch entspannt. Dadurch wird die atomare Dichte reduziert und damit die Expansion des Kondensats nach dem Abschalten der Magnetfalle verlangsamt. Wird bei der adiabatischen Entspannung die mittlere Fallenfrequenz von  $\omega$  auf  $\omega' = \gamma\omega$  reduziert, so erniedrigt sich die Temperatur ebenfalls um einen Faktor  $\gamma$ , während sich die Dichte wie  $\gamma^{3/2}$  verringert [Kv96]. Die Phasenraumdicke bleibt also konstant. Zur Entspannung der Falle wird nach Ende der RF-Evaporation der Quadrupol-Gradient innerhalb von 3.9 s linear auf 96 G/cm reduziert und gleichzeitig das Bias-Feld linear auf 40 G erhöht. Nach dieser Expansion beträgt die Fallenfrequenz  $\omega'_x = 2\pi \times 13.7$  Hz (dies entspricht  $\gamma = 0.14$ ), der Radius des COD ist mit  $r_0 = 4.2$  mm wieder viel größer als die atomare Wolke. Anschließend wird die Falle plötzlich ausgeschaltet, indem das Quadrupolfeld in weniger als 1 ms abgeschaltet wird. Das Bias-Feld bleibt unverändert. Alle in den folgenden Abschnitten diskutierten Phänomene wurden dann in time-of-flight-Bildern nach einer Fallzeit von 18 ms beobachtet.

Das Einsetzen der Bose-Einstein Kondensation ist in Abb. 3.2 gezeigt. Vor dem Hintergrund der thermischen Wolke bildet sich unterhalb einer RF-Endfrequenz von 3.85 MHz ein Kondensat. Dadurch nimmt die Größe der atomaren



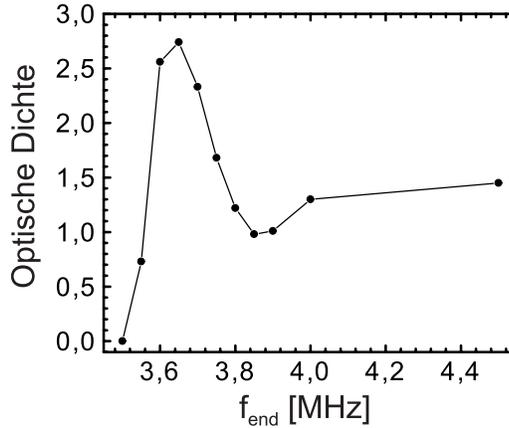
**Abbildung 3.2** : Die ersten Bose-Einstein Kondensate in unserem Experiment, aufgenommen am 7. Dezember 2001. Gezeigt ist die optische Dichte in den time-of-flight Bildern nach 18 ms Fallzeit für verschiedene RF-Endfrequenzen.

Wolke stark ab, während die optische Dichte ansteigt. Im folgenden werden diese Bilder weiter ausgewertet.

### 3.3.1 Plötzlicher Anstieg der optischen Dichte

Während des evaporativen Kühlens werden ständig Atome aus der Falle entfernt. Dabei kühlt das atomare Ensemble zwar ab und die Phasenraumdicke steigt an, die beobachtete optische Dichte in den time-of-flight Bildern ändert sich jedoch nur unwesentlich. Unterhalb der kritischen Temperatur  $T_c$  für Bose-Einstein Kondensation wird der Grundzustand des Fallenpotentials makroskopisch besetzt. Das Kondensat hat eine wesentlich schmalere Impulsverteilung als die thermische Wolke bei  $T \sim T_c$  (vgl. Abschnitt 3.3.2). Daher geht mit der Kondensation ein plötzlicher Anstieg der maximalen optischen Dichte in den time-of-flight Bildern einher. Abb. 3.3 zeigt den sprunghaften Anstieg der optischen Dichte für RF-Endfrequenzen  $f_{end} < 3.85$  MHz. Daraus schließen wir, daß die Kondensation bei  $f_{end} = 3.85$  MHz einsetzt, die atomare Wolke hat dann die kritische Temperatur gerade unterschritten. Aus dem Absorptionsbild für  $f_{end} = 3.85$  MHz wird die gesamte Atomzahl in der Wolke zu  $N_t = 2 \times 10^5$  bestimmt, die Temperatur der thermischen Wolke in der adiabatisch entspannten Falle zu  $T'_c = 37$  nK. Hieraus kann gemäß  $T_c = T'_c/\gamma$  die kritische Temperatur für die steile Falle bestimmt werden, in der die RF-Evaporation durchgeführt wurde. Es ergibt sich eine kritische Temperatur von  $T_c = 260$  nK. Die gemessene kritische Temperatur ist etwas niedriger als die für ein wechselwirkungsfreies Gas nach Gl. 1.19 aus  $N_t$  berechnete kritische Temperatur von  $T_c^0 = 360$  nK. Aufgrund der Wechselwirkung zwischen den Atomen wird in Übereinstimmung mit dem Experiment eine geringere kritische Temperatur erwartet [DGPS99].

Unterhalb von  $f_{end} = 3.6$  MHz nimmt die optische Dichte wieder ab, bis keine Atome mehr vorhanden sind. Bei diesen Frequenzen entfernt das RF-Messer bereits Atome aus dem Kondensat. Über den Wert von  $f_{end}$  läßt sich also innerhalb



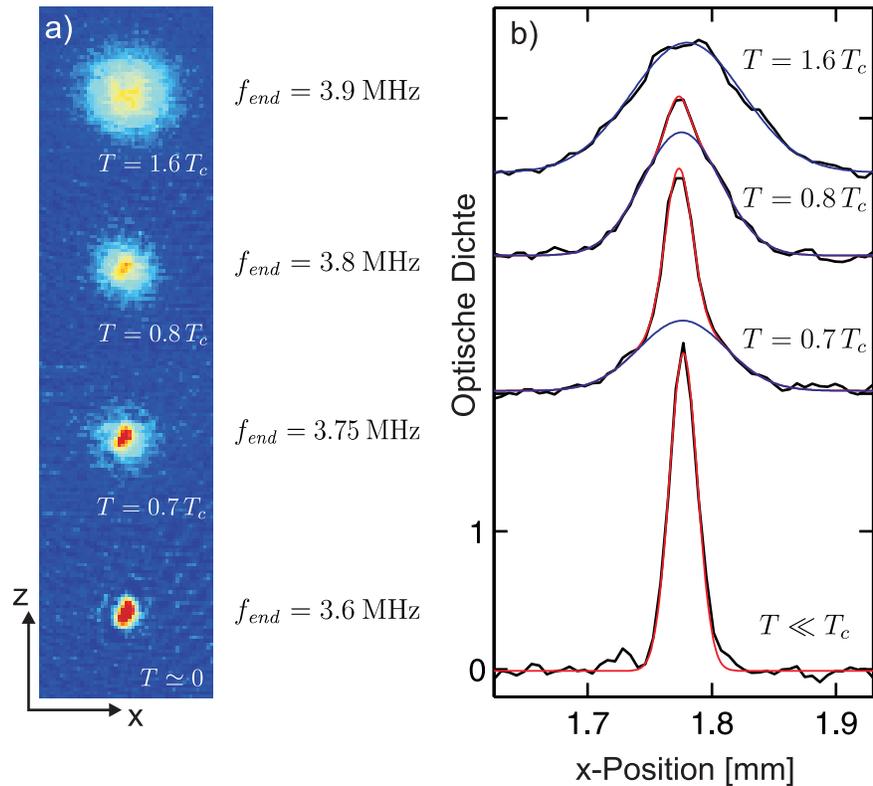
**Abbildung 3.3** : Optische Dichte im Zentrum der atomaren Wolke nach 18 ms Fallzeit als Funktion der RF-Endfrequenz  $f_{\text{end}}$ . Unterhalb von 3.85 MHz wird ein sprunghafter Anstieg der optischen Dichte beobachtet. Dies ist eine Signatur für Bose-Einstein Kondensation.

eines gewissen Bereichs die Atomzahl im Kondensat einstellen. Dies wird in den Experimenten zu atomaren Gittersolitonen eingesetzt, um kleine Kondensate mit Atomzahlen  $N_t \sim 10^3$  zu erzeugen (vgl. Kapitel 5).

### 3.3.2 Bimodale Geschwindigkeitsverteilung

Die time-of-flight Bilder geben die Geschwindigkeitsverteilung der Atome wieder. Abb. 3.4(b) zeigt Schnitte in  $x$ -Richtung durch die Bilder für verschiedene Temperaturen. Oberhalb von  $T_c$  ist die Geschwindigkeitsverteilung gaußförmig. Unterhalb der kritischen Temperatur wird eine bimodale Verteilung beobachtet, die für die Koexistenz von Kondensat und thermischer Wolke charakteristisch ist. Für  $T \ll T_c$  ist kein thermischer Anteil mehr zu erkennen, es liegt ein reines Kondensat vor. In unserem Experiment können reine Kondensate mit  $8 \times 10^4$  Atomen erzeugt werden.

In der thermischen Wolke nahe  $T'_c$  dominiert die kinetische Energie  $(3/2)k_B T'_c$  über die Wechselwirkungsenergie pro Teilchen  $\sim gn(0)/N$ . Daher expandiert die thermische Wolke isotrop mit einer Breite der Geschwindigkeitsverteilung, die durch die kinetische Energie bestimmt ist. Im Kondensat ist die Situation umgekehrt: Die kinetische Energie  $\sim \hbar^2/(2mR_{TF}^2)$  des Kondensats im Grundzustand der Falle ist durch die Größe  $R_{TF}$  der Thomas-Fermi Parabel gegeben. Sie ist typischerweise viel kleiner als die Wechselwirkungsenergie  $E_{ww} = (2/7)\mu$  in der Thomas-Fermi Näherung. Die Expansion des Kondensats wird daher durch die Wechselwirkungsenergie  $E_{ww}$  dominiert, die nach Abschalten der Falle in kinetische Energie umgesetzt wird. Da  $E_{ww} < (3/2)k_B T'_c$  ist, resultiert für Ensembles knapp unterhalb der kritischen Temperatur eine bimodale Geschwindigkeitsver-



**Abbildung 3.4** : Time-of-flight Bilder nach 18 ms Fallzeit für verschiedene RF-Endfrequenzen. (a) Oberhalb der kritischen Temperatur  $T_c$  expandiert die atomare Wolke isotrop. Unterhalb  $T_c$  zeigt der Kondensatanteil anisotrope Expansion. Das Aspektverhältnis des Kondensats ist  $\sigma_x/\sigma_z \simeq 0.6$ , die Kondensate scheinen leicht gekippt gegenüber den Achsen  $x, z$  der Magnetfalle. (b) Schnitte in  $x$ -Richtung durch die Bilder aus (a) (schwarz) sowie doppelter Gauß-Fit an die thermische Wolke (blau) und das Kondensat (rot). In den mittleren Bildern wird eine bimodale Geschwindigkeitsverteilung beobachtet. Aus dem Gauß-Fit an die thermische Wolke wird die Temperatur  $T$  bestimmt. Im untersten Bild ist kein thermischer Anteil mehr zu erkennen. Aus den Breiten der Gauß-Fits an das Kondensat in  $x$ -Richtung und entsprechende Fits in  $z$ -Richtung kann das Aspektverhältnis  $\sigma_x/\sigma_z$  bestimmt werden. Zur besseren Übersichtlichkeit wurden die oberen drei Bilder vertikal versetzt.

teilung, wobei der schmalere Teil dem Kondensat entspricht.

In unserem Experiment ist die kinetische Energie der thermischen Wolke bei  $T'_c$  rund 18 mal größer als die Wechselwirkungsenergie für ein reines Kondensat in der entspannten Falle. Daher erwartet man, daß die reinen Kondensate in den time-of-flight Bildern rund  $\sqrt{18} = 4.2$  mal kleiner sind als die thermische Wolke bei  $T'_c$ . Aus Abb. 3.4(b) ergibt sich mit 3.7 ein Verhältnis in der richtigen Größenordnung. Bei dieser Betrachtung wurde die Anisotropie der Expansion des Kondensats vernachlässigt.

### 3.3.3 Anisotrope Expansion

Die Kondensate in Abb. 3.4(a) haben eine anisotrope Form mit der längeren Achse in  $z$ -Richtung, während die thermische Wolke isotrop expandiert. Dabei ist das Aspektverhältnis der Kondensate gegenüber der Symmetrie der Magnetfalle gerade umgekehrt: in der Magnetfalle hat die atomare Wolke in  $z$ -Richtung eine um einen Faktor  $\sqrt{8}$  kleinere Ausdehnung. Die Expansion des Kondensats wird durch Kräfte bestimmt, die proportional zu den Dichtegradienten im Kondensat sind. Daher hat die Geschwindigkeitsverteilung der Kondensate gerade das umgekehrte Aspektverhältnis wie die räumliche Verteilung in der Falle. Aus den Bildern nach 18 ms Fallzeit in Abb. 3.4(a) und Gauß-Fits an die Daten liest man ein Aspektverhältnis von  $\sigma_x/\sigma_z \simeq 0.6$  ab. Dies entspricht nicht ganz dem erwarteten Verhältnis von  $1/\sqrt{8} = 0.35$ . Eventuell ist die Fallzeit mit 18 ms noch etwas zu kurz und die Form der Kondensate wird noch nicht vollständig von der Geschwindigkeitsverteilung bestimmt. Eine Fehlerquelle bei der experimentellen Bestimmung von  $\sigma_{x,z}$  im Experiment liegt außerdem in der leichten Verkipfung der Kondensate gegenüber den Symmetrieachsen  $x, z$  der Falle. Diese ist vermutlich auf Kräfte beim Abschalten der Magnetfalle oder Abbildungsfehler zurückzuführen.

## 3.4 Das Kondensat im Wellenleiter

Nach der Erzeugung der Bose-Einstein Kondensate in der Magnetfalle werden diese in den atomaren Wellenleiter umgeladen. Um dabei transversale Anregungen des Kondensats im Wellenleiter zu vermeiden, muß der Transfer adiabatisch erfolgen. Im Rahmen einer harmonischen Näherung der Potentiale kann der Transfer durch die Änderung der Fallenfrequenzen  $\omega_i$  beschrieben werden. Das Adiabazitätskriterium verlangt in diesen Fall, daß [KDS99]

$$\frac{d\omega_i}{dt} \ll \frac{2}{\pi} \omega_i^2. \quad (3.1)$$

Außerdem ist darauf zu achten, daß sich die durch die Gravitation bestimmte Ruhelage des Kondensats in der Falle nicht zu schnell verschiebt, da sonst Schwingungen in  $z$ -Richtung angeregt werden.

Aktion	Dauer	$\omega_x/2\pi$ [Hz]	$\omega_y/2\pi$ [Hz]	$\omega_z/2\pi$ [Hz]
Atome in Magnetfalle	–	21	21	59
Rampe Dipolfalle	450 ms	21	21 $\rightarrow$ 132	59 $\rightarrow$ 143
Rampe Magnetfalle	10 ms	21 $\rightarrow$ 7	132 $\rightarrow$ 130	143 $\rightarrow$ 131
Magnetfalle aus	< 1 ms	7 $\rightarrow$ 2.7	130 $\rightarrow$ 130	131 $\rightarrow$ 130

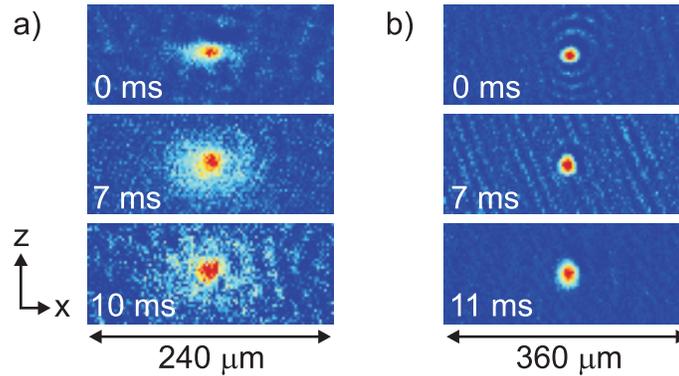
**Tabelle 3.1** : Änderung der Fallenfrequenzen beim Transfer der Atome in die Dipolfalle.

Der Transfer erfolgt aus einer Magnetfalle mit  $B'_q = 144$  G/cm und  $B_0 = 40$  G. Der Wellenleiter ist auf die Position der Atome in dieser Falle justiert. Das Umladen geschieht im einfachsten Fall in drei Schritten: Zunächst wird die Leistung im Wellenleiter (Dipolfalle 1) mit Hilfe des AOM linear innerhalb von 450 ms auf typischerweise 685 mW hochgerampft. Dann wird das Quadrupolfeld der Magnetfalle in einer linearen Rampe von 10 ms Dauer auf  $B'_q = 50$  G/cm reduziert. Am Ende der Rampe wird das Quadrupolfeld plötzlich abgeschaltet. Das Kondensat ist damit umgeladen und die atomaren Wellenpakete können sich entlang des Wellenleiters ausbreiten.

In Tabelle 3.1 ist die Änderung der Fallenfrequenzen während des Transfers angegeben. Die Fallenfrequenzen von Magnet- und Dipolfalle addieren sich dabei quadratisch. Beim Anschalten der Dipolfalle ist zu jedem Zeitpunkt  $d\omega_i/dt \leq 0.05\omega_i^2$ , d.h. das Adiabazitätskriterium ist erfüllt. Das Abschalten der Magnetfalle ist für die transversalen Zustände des Wellenleiters ebenfalls adiabatisch. Lediglich entlang des Wellenleiters in  $x$ -Richtung ändert sich die Fallenfrequenz plötzlich. Dies ist erwünscht, da die Atome so in einer durch die Magnetfalle definierten longitudinalen Anfangswellenfunktion in den Wellenleiter entlassen werden.

Die Adiabazität des Transfers wird experimentell überprüft, indem die Dauer der einzelnen Schritte variiert wird. Als Kriterium für einen erfolgreichen Transfer gilt dabei das Ausbleiben von transversalen Schwingungen des Kondensats im Wellenleiter sowie die Beobachtung anisotroper Expansion in time-of-flight Bildern nach plötzlichem Abschalten des Wellenleiters. Während transversale Schwingungen für die angegebenen Transferzeiten vermieden werden konnten, war in den time-of-flight Bildern immer ein großer Anteil thermischer Atome sichtbar, auch wenn in der Magnetfalle ein reines Kondensat erzeugt worden war (Abb. 3.5(a)). Dennoch konnten mit den so umgeladenen Kondensaten bereits eine Reihe von Experimenten durchgeführt werden. Reine Kondensate können im Wellenleiter erst präpariert werden, seit der letzte Schritt der Verdampfungskühlung zum BEC direkt in der gekreuzten Dipolfalle durchgeführt wird (Abb. 3.5(b)).

Bei dem beschriebenen direkten Transfer der Atome aus der Magnetfalle in den Wellenleiter trat ein weiteres Problem auf: Im Experiment wurde beobach-

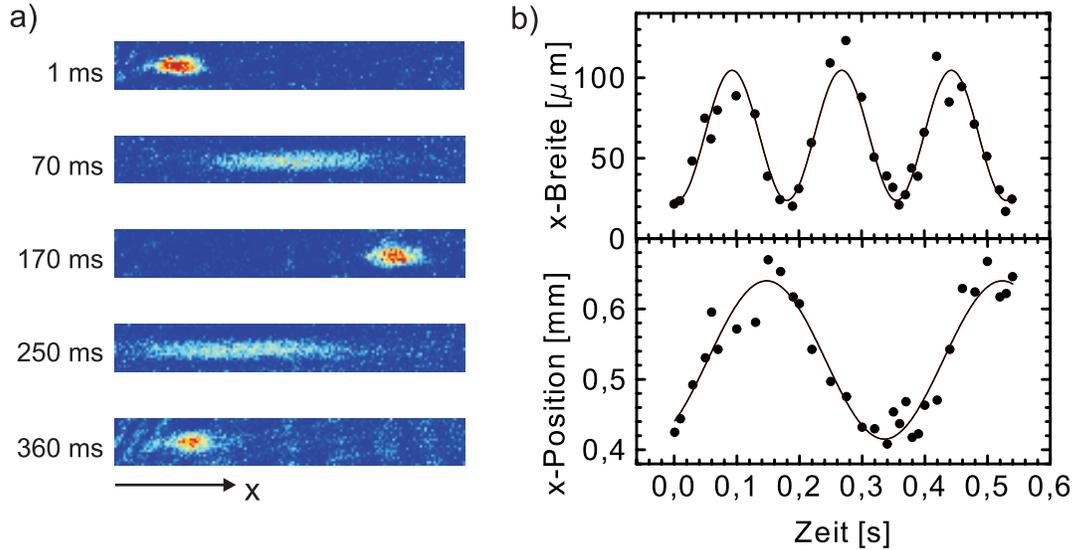


**Abbildung 3.5** : Expansion der Atome aus dem Wellenleiter. Gezeigt sind time-of-flight Bilder zu den angegebenen Zeiten nach Abschalten des Wellenleiters. (a) In der Magnetfalle wurde ein reines Kondensat erzeugt, dann werden die Atome in den Wellenleiter umgeladen. Direkt nach dem Umladen wird der Wellenleiter abgeschaltet. In der Expansion der Atome ist neben dem Kondensat ein großer Anteil thermischer Atome sichtbar. (b) Der letzte Schritt der Verdampfungskühlung wurde in der gekreuzten Dipolfalle durchgeführt. Auf diese Weise kann ein reines Kondensat im Wellenleiter präpariert werden. In der Expansion aus dem Wellenleiter sind keine thermischen Atome sichtbar.

tet, daß die Magnetfalle beim schnellen Abschalten auf die Atome Kräfte ausübt, die zu einem unkontrollierten Impulsübertrag entlang des Wellenleiters führen (vgl. Abschnitt 2.4.2). Ein langsames Ausschalten der Magnetfalle ist jedoch nicht möglich, da dann die Anfangsgröße der Wellenpakete in  $x$ -Richtung zu groß würde. Um den Impulsübertrag zu vermeiden, wurde die zweite Dipolfalle aufgebaut. Sie wird in einem verbesserten Transferschema zusammen mit dem Wellenleiter angeschaltet. Die optischen Potentiale schließen die Atome dann auch in  $x$ -Richtung mit einer Fallenfrequenz von über 50 Hz ein, während die Magnetfalle in 90 ms mit einer linearen Rampe ausgeschaltet wird. Nach vollständigem Abschalten der Magnetfalle wird die Leistung in der zweiten Dipolfalle zunächst mit dem AOM langsam reduziert, so daß die longitudinale Fallenfrequenz nur noch 20 Hz beträgt. Dann wird die zweite Dipolfalle plötzlich ausgeschaltet. Mit dieser Methode konnte der Impulsübertrag entlang des Wellenleiters vermieden werden.

### 3.4.1 Expansion des BECs im Wellenleiter

Um später den Erfolg des Dispersionsmanagements beurteilen zu können, soll zunächst die Expansion der Atome im Wellenleiter in Abwesenheit des optischen Gitters untersucht werden. Dazu werden Absorptionsbilder der Atome im Wellenleiter zu unterschiedlichen Zeiten nach dem Umladen aus der Magnetfalle



**Abbildung 3.6** : Longitudinale Oszillation der Atome im Wellenleiter. (a) Ausgewählte Absorptionbilder der atomaren Wolke im Wellenleiter zu verschiedenen Zeiten nach dem Ausschalten der Magnetfalle. (b) Mittenposition und Breite der Wolke in  $x$ -Richtung als Funktion der Zeit, ermittelt durch Gauß-Fits an die Absorptionbilder. Der sinusförmige Fit an die Daten ergibt für die Oszillation der Mittenposition eine Frequenz von  $2.66 \pm 0.06$  Hz, für die Breite eine Frequenz von  $5.71 \pm 0.07$  Hz. Die Breite oszilliert dabei mit einer Amplitude von  $A = 40 \mu\text{m}$  um einen Wert von  $C = 64 \mu\text{m}$ .

aufgenommen. Solche Messungen geben auch Aufschluß darüber, wie gut der Wellenleiter justiert und ob der longitudinale Einschluß der Atome wirklich vernachlässigbar ist: In einem idealen Wellenleiter würde man erwarten, daß das atomare Wellenpaket immer weiter zerfließt, während sich die Position seines Schwerpunkts nicht ändert.

Abb. 3.6 zeigt eine Messung der Expansion im Wellenleiter nach dem Umladen eines reinen Kondensats aus der Magnetfalle. Es fällt sofort ins Auge, daß die Mittenposition der atomaren Wolke oszilliert. Die Frequenz dieser Dipoloszillation ist  $\omega_{\parallel} = 2\pi \times 2.66$  Hz. Aus dem Auftreten von sinusförmigen Oszillationen läßt sich schließen, daß die Atome auch in  $x$ -Richtung in einem harmonischen Potential eingeschlossen sind. Die atomare Wolke befindet sich in diesem Potential nach Abschalten der Magnetfalle offenbar nicht in ihrer Ruhelage. Die beobachtete Frequenz der Dipoloszillation entspricht der Fallenfrequenz des Potentials, unabhängig davon, ob die atomare Wolke thermisch oder ein BEC ist [DGPS99].

Neben der Dipoloszillation zeigen die Wellenpakete außerdem eine Quadrupolschwingung, d.h. die Wellenpakete „atmen“, ihre Breite ändert sich periodisch. Die Quadrupoloszillation hat im Experiment eine Frequenz von  $\omega_q = 2\pi \times 5.71$  Hz,

einen Faktor 2.1 höher als die Frequenz der Dipolschwingung. Dies entspricht sehr gut dem für den wechselwirkungsfreien Fall erwarteten Verhältnis von  $\omega_q = 2\omega_{\parallel}$ . Für ein Bose-Einstein Kondensat sollte die Frequenz der Quadrupolschwingung durch die Wechselwirkung zwischen den Atomen modifiziert sein. In einer Falle mit unserem Aspektverhältnis ( $\omega_{\parallel} \ll \omega_{\perp}$ ) wird für eine relative Amplitude der Schwingung von  $A/C = 0.63$  (vgl. Abb. 3.6(b)) für die Frequenz der Quadrupolschwingung ein Wert von  $\omega_q = 1.64\omega_{\parallel}$  erwartet [DMP97, SKMI<sup>+</sup>98]. Die beobachtete Frequenz der Quadrupolschwingung ist ein weiteres Indiz dafür, daß die atomare Wolke nach dem Umladen in die Dipolfalle einen starken thermischen Anteil hat. Die Oszillation des Kondensatanteils kann vor dem Hintergrund der thermischen Wolke nicht aufgelöst werden. Der Einfluß der thermischen Wolke auf das Kondensat muß daher auch bei der Interpretation der Experimente zum Dispersionsmanagement berücksichtigt werden.

Die beobachtete longitudinale Fallenfrequenz im Wellenleiter ist rund eine Größenordnung höher als für die Parameter der Dipolfalle 1 erwartet (vgl. Abschnitt 2.4.1). Dies legt nahe, daß für den longitudinalen Einschluß nicht das optische Dipolpotential verantwortlich ist, sondern z.B. ein noch vorhandener Magnetfeldgradient am Ort der Atome nach Abschalten des Quadrupol-Feldes. In der Tat wurde im Experiment in anderem Zusammenhang beobachtet, daß magnetisierte Metallteile in der Nähe der Glaszelle zu Magnetfeldgradienten am Ort der Atome führen können. Ein weiterer Hinweis auf einen magnetischen Ursprung des Potentials ist, daß die Position des Potentialminimums eine Abhängigkeit von der Stärke des magnetischen Bias-Feldes zeigt. Experimentell konnte die Dipoloszillation der Atome dadurch unterdrückt werden, daß der Betrag des Bias-Feldes leicht verändert, der Wellenleiter leicht verkippt und der Fokus der Dipolfalle verschoben wurde, bis die Position der Atome im Wellenleiter mit der Ruhelage im longitudinalen Potential übereinstimmt. Die Quadrupoloszillation kann auf diese Weise jedoch nicht verhindert werden. Dies bedeutet, daß die Expansion der atomaren Wellenpakete nur für Zeiten  $t \ll 2\pi/\omega_{\parallel} = 376$  ms als frei angesehen werden kann. Dies stellt kein großes Problem dar, da der Einfluß des Dispersionsmanagements auf die Wellenpakete schon für Propagationszeiten unter 100 ms nachgewiesen werden konnte.



# Kapitel 4

## Dispersionsmanagement für Materiewellen

In den hier beschriebenen Experimenten wurde Dispersionsmanagement für Materiewellen erstmals demonstriert. Dabei wurde mit einem inkohärenten Ensemble von Atomen im linearen Regime gearbeitet. Diese Experimente stellen die Grundlage für die Untersuchung von Solitonen und anderen nichtlinearen Effekten mit Bose-Einstein Kondensaten im nächsten Kapitel dar.

Zunächst wurde die Bewegung des Schwerpunkts der atomaren Wellenpakete im periodischen Potential untersucht. Dabei wurden Bloch-Oszillationen und Landau-Zener-Tunneln beobachtet. Gleichzeitig konnte der Einfluß des periodischen Potentials auf die Einhüllende der Wellenpakete nachgewiesen werden: das Zerfließen der atomaren Wellenpakete kann über Vorzeichen und Betrag der effektiven Masse kontrolliert werden. Dabei treten z.T. stark von einer gaußförmigen Verteilung abweichende Formen der Wellenpakete auf. Dies konnte im Rahmen eines einfachen theoretischen Modells erklärt werden. Zum Schluß wird ein Experiment vorgestellt, in dem die Rolle der effektiven Masse besonders anschaulich gemacht werden kann. Dazu wird das Vorzeichen der effektiven Masse während der Propagation der Wellenpakete umgekehrt. Dies kehrt auch die Dynamik des Wellenpakets um, ein bereits auseinandergelassenes Wellenpaket läuft wieder zusammen.

### 4.1 Präparation der Atome

Die in diesem Kapitel beschriebenen Experimente wurden durchgeführt, als der Nd:YAG-Laser für den atomaren Wellenleiter noch nicht zur Verfügung stand. Daher weicht der experimentelle Aufbau von dem in Abschnitt 2.4 beschriebenen ab. In diesem Abschnitt wird auf die wesentlichen Unterschiede kurz eingegangen.

### 4.1.1 Verwendeter Aufbau für Wellenleiter und periodisches Potential

Sowohl für das periodische Potential als auch für den Wellenleiter wurde Licht von einem Ti:Sa-Laser bei einer Wellenlänge von 785.1 nm verwendet. Das Licht wurde in die Faser des optischen Gitters eingekoppelt. Der optische Aufbau nach der Faser entspricht dem in Abb. 2.7 dargestellten für das optische Gitter, mit dem Unterschied, daß sich in einem der Laserstrahlen noch eine Linse befindet. Dadurch wird der Strahl am Ort der Atome auf eine Taille von  $w_D = 70\mu\text{m}$  fokussiert. Bei einer Leistung von 54 mW erzeugt dieser Laserstrahl einen Wellenleiter mit der transversalen Fallenfrequenz  $\omega_{\perp} = 2\pi \times 185$  Hz.

Der zweite Laserstrahl, der unter einem kleinen Winkel durch die Seitenfläche der Glaszelle in die Vakuumkammer eintritt (vgl. Abb. 2.7), hat eine Strahltaile von 1.6 mm und variable Leistungen von wenigen mW. Daher ist der Einschluß der Atome durch diesen Strahl gegenüber dem Wellenleiter vernachlässigbar. Dieser zweite Laserstrahl wird mit dem Wellenleiter überlappt und interferiert mit diesem, da er die selbe Frequenz und Polarisation wie der Wellenleiter besitzt. Dadurch entsteht ein periodisches Potential entlang des Wellenleiters mit einer Modulationstiefe von  $V_0 \simeq E_r$ . Bei diesem Aufbau verschwindet der Winkel zwischen periodischem Potential und Wellenleiter. Daher müssen die mit der Periodizität verknüpften Größen nicht wie in Abschnitt 2.4.3 reskaliert werden. Allerdings steht der Laserstrahl der Absorptionsabbildung nun nicht mehr senkrecht auf dem Wellenleiter. Dadurch erscheinen Wellenpakete im Wellenleiter bei der Abbildung mit der Kamera in  $x$ -Richtung um einen Faktor  $\cos(\alpha) = 0.91$  verkürzt (vgl. Abb. 2.7). Dies muß bei der Auswertung der Absorptionsbilder berücksichtigt werden.

### 4.1.2 Dynamik der Atome im Wellenleiter

Die Photonen-Streurate im Wellenleiter ist mit  $\Gamma_s = 8.2$  Hz sehr hoch. Eine geringere Streurrate bei gleichbleibender Geometrie des Wellenleiters könnte nur durch Erhöhung der Verstimmung des Ti:Sa-Lasers von der Resonanz bei gleichzeitiger Erhöhung seiner Leistung erreicht werden. Dies war jedoch nicht möglich, da die Leistung des verfügbaren Lichtes nicht ausreichte. Um dennoch Streuung von Photonen zu vermeiden, muß das gesamte Experiment vom Einschalten des Wellenleiters bis zur Abbildung der Wellenpakete in  $t \ll \Gamma_s^{-1} = 122$  ms abgeschlossen sein. Dies bedeutet, daß für ein adiabatisches Umladen der Atome aus der Magnetfalle in den Grundzustand des Wellenleiters keine Zeit bleibt. Der Wellenleiter ist bei den hier beschriebenen Experimenten also nicht „single-mode“.

In den Experimenten wurde zunächst ein Bose-Einstein Kondensat in der Magnetfalle erzeugt. Dann wurde der Wellenleiter in 6 ms mit einer linearen Rampe angeschaltet, bevor die Magnetfalle in  $< 1$  ms abgeschaltet wurde. Da der Transfer nicht adiabatisch erfolgt, werden im Wellenleiter transversal angeregte

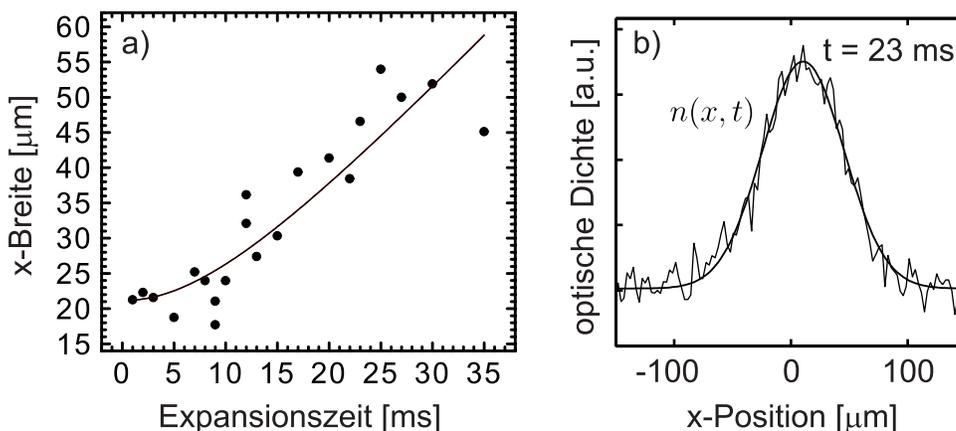
Zustände bevölkert. Wir beobachten, daß das atomare Ensemble beim Umladen aufgeheizt wird. Damit stellt sich die Frage, wie das atomare Ensemble im Wellenleiter zu beschreiben ist. Es ist a priori nicht klar, ob die Atome nach dem Umladen noch durch die makroskopische Wellenfunktion eines BECs beschrieben werden können oder ob die Dynamik eher der eines inkohärenten Ensembles einzelner Teilchen entspricht. Ebenso ist es schwierig abzuschätzen, welchen Einfluß die Wechselwirkung der Atome auf die Dynamik haben wird.

Es stellte sich heraus, daß die im Experiment beobachtete Dynamik der Atome sehr gut unter der Annahme beschrieben werden kann, daß es sich um ein inkohärentes Ensemble im linearen Regime handelt, d.h. die Wechselwirkung der Atome hat nur einen geringen Einfluß auf die Dynamik. In Abschnitt 4.4 wird ein theoretisches Modell zur Beschreibung des atomaren Ensembles vorgestellt. Das Ensemble ist dabei durch statistische Verteilungen im Orts- und Impulsraum nach dem Umladen in den Wellenleiter charakterisiert. Diese können aus einer Messung der Expansion des Ensembles im Wellenleiter bestimmt werden. Abb. 4.1 zeigt eine solche Messung. Es befinden sich dabei ca.  $2 \times 10^4$  Atome im Wellenleiter. Die Verteilung  $n(x, t)$  der Atome in  $x$ -Richtung bleibt während der ganzen Zeit gaußförmig. Aus der Messung liest man ab, daß das Ensemble eine gaußförmige Anfangsverteilung im Ortsraum  $n(x, 0)$  mit einer halben  $e^{-2}$ -Breite von  $\Delta x = 21 \pm 2 \mu\text{m}$  und eine gaußförmige Impulsverteilung der Breite  $\Delta p = m\Delta v = 0.27 \pm 0.02 \hbar k_L$  hat. Die in Abb. 4.1(a) sichtbare Streuung der Meßpunkte mit einer relativen Standardabweichung von rund 10 % muß bei der Auswertung der Daten zum Dispersionsmanagement beachtet werden (vgl. Abschnitt 4.4).

### 4.1.3 Präparation im periodischen Potential

Sofort nach dem Umladen der Atome in den Wellenleiter wird das periodische Potential eingeschaltet. Dabei werden Modulationstiefe und Bewegungszustand des Potentials über die Intensität und die Frequenz des dem Wellenleiter entgegen laufenden Laserstrahls kontrolliert. Zur Präparation der Wellenpakete beim gewünschten Quasiimpuls  $k_0$  im optischen Gitter wird wie in Abschnitt 1.2.3 und 1.6.2 beschrieben vorgegangen. Die gaußförmige Impulsverteilung der Atome im Wellenleiter wird dabei zu einer gaußförmigen Quasiimpulsverteilung  $w(k)$  der Breite  $\Delta k = \Delta p/\hbar$  im optischen Gitter.

Bei der Interpretation der Experimente muß berücksichtigt werden, daß den Atomen beim Ausschalten der Magnetfalle ein experimentell nicht kontrollierbarer Impuls der Größenordnung  $|p_{kick}| \sim 0.1 \hbar k_L$  übertragen wird (vgl. Abschnitt 2.4.2). Daher wird im folgenden unterschieden zwischen dem über die Frequenzdifferenz  $\Delta\omega$  zwischen den Laserstrahlen eingestellten Bewegungszustand des optischen Gitters, charakterisiert durch einen Quasiimpuls  $k_{exp} = -(\Delta\omega/4\omega_r)k_L$ , und dem tatsächlichen Quasiimpuls der Atome im optischen Gitter,  $k_0 = k_{exp} + p_{kick}/\hbar$ . Nur für  $p_{kick} = 0$  ist dann  $k_0 = k_{exp}$ , ansonsten muß aus



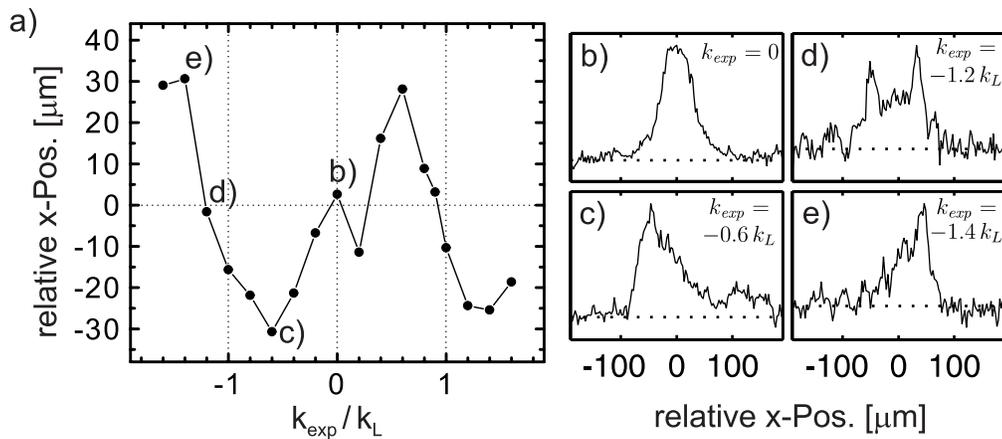
**Abbildung 4.1** : Expansion des atomaren Ensembles im Wellenleiter. (a) Breite des Wellenpakets in  $x$ -Richtung in Abhängigkeit von der Expansionszeit (schwarze Punkte). Die Breiten wurden wie in (b) bestimmt. Der Fit mit der Funktion  $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta v^2 t^2}$  ergibt eine Anfangsbreite des Ensembles im Ortsraum von  $\Delta x = 21 \pm 2 \mu\text{m}$  und eine Breite der Geschwindigkeitsverteilung von  $\Delta v = 1.57 \pm 0.10 \text{ mm/s}$ . (b) Dichteverteilung  $n(x, t)$  der atomare Wolke nach  $t = 23 \text{ ms}$  Expansion. Ein gaußförmiger Fit ergibt eine halbe  $e^{-2}$ -Breite des Wellenpakets von  $46.6 \mu\text{m}$ .

der beobachteten Dynamik der Wellenpakete auf  $k_0$  zurückgeschlossen werden. Dabei wird ausgenutzt, daß die Bewegung des Schwerpunkts des Wellenpakets aufgrund der Abhängigkeit  $v_g(k_0)$  Information über  $k_0$  enthält. Der daraus bestimmte Wert von  $k_0$  wird dann zur Interpretation der beobachteten Dispersion der Einhüllenden der Wellenpakete verwendet. Besonders am Rand der Brillouinzone ist diese Art der Bestimmung von  $k_0$  sehr empfindlich, da sich dort  $v_g(k_0)$  stark mit  $k_0$  ändert. In der Nähe der Punkte mit  $m_{eff} = \infty$  ist  $k_0$  dagegen nicht eindeutig aus  $v_g(k_0)$  abzulesen.

## 4.2 Bloch-Oszillationen

Zunächst wurde der Einfluß des optischen Gitters auf die Bewegung der Schwerpunkte der atomaren Wellenpakete untersucht. Bei einer konstanten Modulationstiefe  $V_0$  des periodischen Potentials wurden identische Wellenpakete bei verschiedenen Quasiimpulsen  $k_{exp}$  präpariert. Nach einer Propagationszeit von  $t = 16.8 \text{ ms}$  wurden die Wellenpakete abgebildet. Abb. 4.2(a) zeigt das Resultat einer solchen Messung. Die Position des Schwerpunkts der atomaren Wellenpakete im bewegten Bezugssystem des optischen Gitters ändert sich periodisch mit  $k_{exp}$ , die Atome vollführen Bloch-Oszillationen.

Die gemessene Position  $x$  des Schwerpunktes ist jeweils ein Maß für die Gruppengeschwindigkeit  $v_g(k_{exp}) = x/t$  der Wellenpakete im periodischen Potential.



**Abbildung 4.2** : Dynamik der Materiewellenpakete in Abhängigkeit vom experimentell eingestellten Quasiimpuls  $k_{exp}$  in einem periodischen Potential der Modulationstiefe  $V_0 = 1.7 E_r$ . (a) Position des Schwerpunkts der Wellenpakete im bewegten Bezugssystem des periodischen Potentials nach 16.8 ms Propagation (schwarze Punkte). Die Position ändert sich periodisch mit  $k_{exp}$ , die Atome vollführen Bloch-Oszillationen. (b-e) Für ausgewählte Werte von  $k_{exp}$  (siehe (a)) ist die  $x$ -Abhängigkeit des atomaren Wellenpakets  $n(x, t)$  gezeigt. Dazu wurden die Absorptionen transversal zum Wellenleiter ( $z$ -Richtung) integriert. Während die Form der Wellenpakete für  $k_{exp} = 0$  nach wie vor gaußförmig ist, spiegelt die Form am Rand der Brillouinzone die Abhängigkeit der effektiven Masse vom Quasiimpuls wieder.

Zentrum und Rand der Brillouinzone sind durch die Punkte mit  $x = 0$  bestimmt. Es fällt auf, daß die Abhängigkeit der Gruppengeschwindigkeit vom Quasiimpuls gegenüber der theoretischen Kurve (vgl. Abb. 1.3(b)) systematisch zu kleinerem  $k_{exp}$  hin verschoben ist. Dies läßt sich durch die Differenz  $k_0 - k_{exp} = p_{kick}/\hbar$  erklären. Offenbar schwankt  $p_{kick}$  auch von Schuß zu Schuß, wie man aus der deutlichen Abweichung einzelner Punkte vom erwarteten Verlauf erkennen kann.

Aus Abb. 4.2(a) kann auch die maximale gemessene Gruppengeschwindigkeit  $v_g^{max} = x_{max}/t = 0.31 v_r$  ablesen. Sie ist kleiner als der für  $V_0 = 1.7 E_r$  erwartete Wert von  $v_g^{max} = 0.52 v_r$ . Diese Diskrepanz läßt sich dadurch erklären, daß die mit  $\Delta k = 0.27 k_L$  im Vergleich zur Ausdehnung der ersten Brillouinzone nicht sehr schmale Quasiimpulsverteilung der atomaren Wolke die Modulation der Gruppengeschwindigkeit in der ersten Brillouinzone etwas glättet.

Neben Bloch-Oszillationen wurde im Experiment auch Landau-Zener-Tunneln beobachtet. Landau-Zener-Tunneln tritt dann auf, wenn die Bedingung 1.16 für adiabatische Präparation der Atome am Rand der Brillouinzone nicht mehr erfüllt ist. Dies ist für zu kurze Präparationszeiten  $\tau_2$  oder zu kleine Modulationstiefen  $V_0$  des periodischen Potentials der Fall (vgl. Abschnitt 1.2.3). Ein Teil der Atome tunnelt dann am Rand der Brillouinzone über die Energielücke hinweg in das nächsthöhere Energieband. Im Experiment wird dies dadurch sichtbar, daß sich die Atome nicht mit dem optischen Gitter mitbewegen, sondern im Laborsystem ruhend zurückbleiben. Bevor die Experimente zum Dispersionsmanagement durchgeführt wurden, wurde sichergestellt, daß für die gewählten Parameter des Präparationsprozesses kein Landau-Zener-Tunneln auftritt. Der Vergleich mit dem Adiabazitätskriterium aus Abschnitt 1.2.3 liefert dann auch Information darüber, ob die nach Gl. 1.63 berechnete Modulationstiefe  $V_0$  des periodischen Potentials das optische Gitter richtig beschreibt.

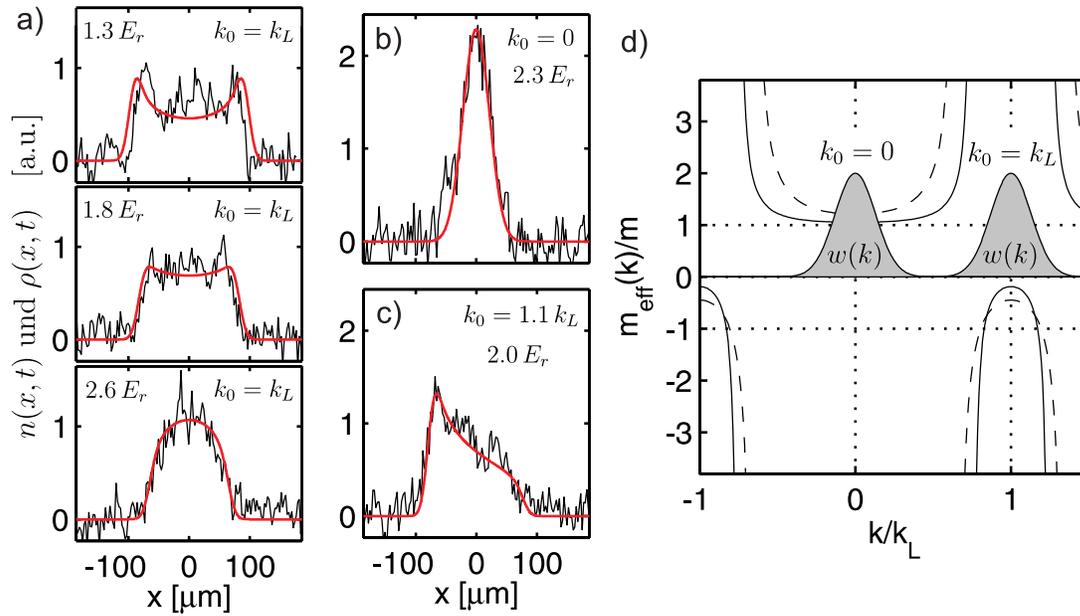
### 4.3 Materiewellen mit anomaler Dispersion

Dispersionsmanagement wird im Einfluß des periodischen Potentials auf das Zerfließen der Einhüllenden der atomaren Wellenpakete sichtbar. In Abb. 4.2(b-e) ist dazu die beobachtete Form der atomaren Wellenpakete nach der Propagationszeit  $t = 16.8$  ms in einem optischen Gitter mit  $V_0 = 1.7 E_r$  für ausgewählte Werte von  $k_{exp}$  gezeigt. Die Bilder geben die Einhüllenden der atomaren Wellenpakete wieder, da die Oszillationen der Blochfunktionen mit der Gitterperiode von unserem Abbildungssystem nicht aufgelöst werden können. Im Zentrum der Brillouinzone (b) ist das Wellenpaket gaußförmig. Am Rand der Brillouinzone (d) ist das Wellenpaket nicht nur breiter, ein Hinweis auf den kleineren Betrag der effektiven Masse dort, sondern seine Form weicht auch stark von einer gaußförmigen Verteilung ab. Dies deutet darauf hin, daß die effektive Masse für das Wellenpaket nicht als konstant angenommen werden kann, die Abhängigkeit  $m_{eff}(k)$  muß berücksichtigt werden. Insbesondere entsprechen die beiden „Spitzen“ des

Wellenpakets den Punkten mit  $|m_{eff}| = \infty$ , bei denen die Dispersion stark unterdrückt ist (vgl. Abb. 4.3(d)). Zwischen Rand und Zentrum der Brillouinzone ((c) und (e) in Abb. 4.2) ist die Form der Wellenpakete asymmetrisch, da die Dispersionsrelation dort ebenfalls nicht symmetrisch um  $k_0$  ist.

Der Betrag der effektiven Masse ist insbesondere am Rand der Brillouinzone stark von der Modulationstiefe  $V_0$  des periodischen Potentials abhängig. Um dies zu demonstrieren wurden für unterschiedliche Werte von  $V_0$  identische Wellenpakete bei  $k_{exp} = 0.9 k_L$  präpariert. Nach Ende der Präparation propagieren die Wellenpakete für 26.8 ms am Rand der Brillouinzone. Abb. 4.3(a) zeigt das Ergebnis einer solchen Messung, dabei wurden Wellenpakete mit  $k_0 = k_L$  selektiert: Je kleiner  $V_0$ , desto kleiner der Betrag der effektiven Masse und desto schneller zerfließt das Wellenpaket. Über die Modulationstiefe des periodischen Potentials kann also die Dispersion der Wellenpakete kontrolliert werden. Weiterhin fällt auf, daß die Abweichung der Form der Wellenpakete von einer Gaußverteilung für kleine Werte von  $V_0$  besonders stark ist. Dies läßt sich anhand von Abb. 4.3(d) erklären: Die Quasiimpulsverteilung des atomaren Ensembles ist breiter als der Bereich annähernd konstanter effektiver Masse am Rand der Brillouinzone, daher ändert sich während der Propagation die Form der Wellenpakete. Je kleiner  $V_0$ , desto schmaler ist der Bereich mit  $m_{eff}(k) \simeq \text{const.}$ , desto stärker also die Verzerrung der Wellenpakete. Zum Vergleich ist in Abb. 4.3(b) ein Wellenpaket nach 26.8 ms Propagation im Zentrum der Brillouinzone gezeigt. Das Wellenpaket ist gaußförmig, da die Quasiimpulsverteilung im Zentrum der Brillouinzone vollständig in den Bereich mit  $m_{eff}(k) \simeq \text{const.}$  fällt. Außerdem ist das Wellenpaket schmaler als am Rand der Brillouinzone, da  $|m_{eff}(0)| > |m_{eff}(k_L)|$  ist.

In Abb. 4.3 ist neben den experimentellen Daten auch die Vorhersage der Theorie aus Abschnitt 4.4 für die Form der Wellenpakete gezeigt. Sie stimmt sehr gut mit der Beobachtung überein, auch die asymmetrische Form der Wellenpakete zwischen Zentrum und Rand der Brillouinzone kann erklärt werden (Abb. 4.3(c)). Es soll betont werden, daß die Theorie keine freien Parameter enthält. Lediglich gemessene Größen und experimentell kontrollierte Parameter gehen in die Simulation der Dynamik des atomaren Ensembles ein. Dies rechtfertigt die in Abschnitt 4.4 gemachten Annahmen zur Beschreibung der Atome als ein inkohärentes Ensemble ohne Wechselwirkung. Lediglich im obersten Bild von Abb. 4.3(a) ist eine gewisse Abweichung zu erkennen, die möglicherweise auf nichtlineare Effekte zurückzuführen ist.



**Abbildung 4.3** : Kontrolle der Dispersion durch die Modulationstiefe  $V_0$  des optischen Gitters. Gezeigt ist die Form der atomaren Wellenpakete  $t = 26.8$  ms nach Ende der Präparation beim jeweiligen Quasiimpuls. (a) Beobachtete Wellenpakete  $n(x, t)$  (schwarz) am Rand der Brillouinzone für drei verschiedene Modulationstiefen des periodischen Potentials ( $V_0$ , im Bild als Vielfache von  $E_r$  angegeben). In rot ist die Vorhersage  $\rho(x, t)$  der linearen Theorie aus Abschnitt 4.4 gezeigt. (b) Zum Vergleich ein Wellenpaket nach der selben Propagationszeit im Zentrum der Brillouinzone. (c) Asymmetrisches Wellenpaket für  $k_0 = 1.1 k_L$ . Die Position in  $x$ -Richtung ist in allen Bildern auf das bewegte Bezugssystem des optischen Gitters bezogen. (d) Abhängigkeit der effektiven Masse vom Quasiimpuls,  $m_{\text{eff}}(k)$ , für  $V_0 = 1.3 E_r$  (durchgezogen) und  $V_0 = 2.6 E_r$  (gestrichelt) sowie die gemessenen Quasiimpulsverteilungen  $w(k)$  der atomaren Ensembles im Zentrum und am Rand der Brillouinzone. Bei  $k_0 = k_L$  kann  $m_{\text{eff}}(k)$  nicht als konstant über die gesamte Breite von  $w(k)$  angesehen werden. Für kleine Werte von  $V_0$  überlappt die Quasiimpulsverteilung sogar mit den Punkten, an denen  $|m_{\text{eff}}| = \infty$  ist.

## 4.4 Ein theoretisches Modell zur Beschreibung des Experiments

Die in den vorangegangenen Abschnitten vorgestellten experimentellen Beobachtungen können im Rahmen eines einfachen theoretischen Modells beschrieben werden. Dabei wird angenommen, daß sich die wie in Abschnitt 4.1 präparierten Atome im optischen Gitter als ein inkohärentes Ensemble nicht wechselwirkender quantenmechanischer Wellenpakete beschreiben lassen. Weiterhin wird analog zu einer effektive-Masse-Näherung angenommen, daß die Oszillation der Blochfunktionen mit der Gitterperiode bei der Dynamik der Einhüllenden des atomaren Ensembles keine Rolle spielt, obwohl die Quasiimpulsverteilung der Atome in den Experimenten mit  $\Delta k = 0.27 k_L$  nicht sehr viel schmaler als die Ausdehnung der ersten Brillouinzone von  $2 k_L$  ist (Abb. 4.3(d)). Die Dynamik der Atome wird nur entlang des Wellenleiters in  $x$ -Richtung beschrieben, über die transversalen Freiheitsgrade wird integriert. Dies ist gerechtfertigt, da in Abwesenheit von Nichtlinearität die Dynamik der einzelnen Freiheitsgrade entkoppelt ist.

Unter diesen Annahmen läßt sich das atomare Ensemble durch einen Dichteoperator

$$\hat{\rho}(t) = \int \int g(x_1) h(k_1) |A_{x_1, k_1}(t)\rangle \langle A_{x_1, k_1}(t)| dx_1 dk_1 \quad (4.1)$$

beschreiben. Dabei ist

$$g(x_1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\lambda} \exp \left[ -\frac{2(x_1 - x_0)^2}{\lambda^2} \right] \quad (4.2)$$

eine gaußförmige Wahrscheinlichkeitsverteilung im Ortsraum um  $x_0$  der Breite  $\lambda$  und

$$h(k_1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\kappa} \exp \left[ -\frac{2(k_1 - k_0)^2}{\kappa^2} \right] \quad (4.3)$$

eine Wahrscheinlichkeitsverteilung der Quasiimpulse um  $k_0$  der Breite  $\kappa$ . Beide Verteilungen sind in Abwesenheit von Wechselwirkungen der Atome untereinander zeitunabhängig. Die Dynamik ist in den Einhüllenden der einzelnen Wellenpakete enthalten: Jedes einzelne Atom wird durch eine Einhüllende  $A_{x_1, k_1}(x, t) = \langle x | A_{x_1, k_1}(t) \rangle$  am Ort  $x_1$  mit Quasiimpuls  $k_1$  beschrieben, die zu Beginn der Propagation ( $t = 0$ ) gaußförmig ist:

$$A_{x_1, k_1}(x, 0) = \left( \frac{2}{\pi} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \exp \left[ -\frac{(x - x_1)^2}{\sigma^2} + ik_1(x - x_1) \right]. \quad (4.4)$$

Die Breiten  $\sigma$ ,  $\lambda$  und  $\kappa$  der verschiedenen Verteilungen werden so gewählt, daß die Bedingungen

$$\Delta x^2 = \sigma^2 + \lambda^2 \quad \text{und} \quad \Delta k^2 = \frac{4}{\sigma^2} + \kappa^2 \quad (4.5)$$

erfüllt sind. Diese Wahl garantiert, daß zur Zeit  $t = 0$  die im Rahmen des theoretischen Modells angenommene Dichteverteilung der Atome  $\rho(x, 0) = \langle x | \hat{\rho}(0) | x \rangle$  mit der experimentell bestimmten Verteilung  $n(x, 0)$  der Breite  $\Delta x$  übereinstimmt (vgl. Abb. 4.1). Ebenso entspricht die Quasiimpulsverteilung  $\langle k | \hat{\rho}(0) | k \rangle$  im theoretischen Modell dann der gemessenen Verteilung  $w(k)$  der Breite  $\Delta k$ . Die Anfangsbedingungen werden also durch die experimentell bestimmten Verteilungen festgelegt.

Zur Beschreibung der Dynamik der Atome wird nun  $x_0$  mit der Anfangsposition der atomaren Wolke und  $k_0$  mit dem zentralen Quasiimpuls der Atome nach der Präparation im optischen Gitter identifiziert, d.h. der Präparationsprozeß wird vernachlässigt. Der Dichteoperator zur Zeit  $t$  wird dann berechnet, indem die Einhüllenden  $A_{x_1, k_1}(x, 0)$  mit der Dispersionsrelation im niedrigsten Energieband des Gitters,  $E_0(k)$ , propagiert werden:

$$A_{x_1, k_1}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int A_{x_1, k_1}(k, 0) e^{-\frac{i}{\hbar} E_0(k)t} e^{ikx} dk. \quad (4.6)$$

Dabei sind  $A_{x_1, k_1}(k, 0)$  die Fouriertransformierten der Einhüllenden zur Zeit  $t = 0$ .

Im Rahmen der Näherung konstanter effektiver Masse würde die Propagation wie in Abschnitt 1.2.2 diskutiert mit einer Entwicklung von  $E_0(k)$  bis zum quadratischen Term durchgeführt (Gl. 1.12). Da die Quasiimpulsverteilung  $w(k)$  der Atome im Experiment relativ breit ist, müssen hier jedoch höhere Terme in der Entwicklung berücksichtigt werden, ansonsten können die beobachteten Formen der atomaren Dichteverteilung nicht beschrieben werden. Da die Bandstruktur für gegebenes  $V_0$  numerisch bestimmt werden kann (vgl. Abschnitt 1.5.1), wird hier mit dem vollständigen Ausdruck für  $E_0(k)$  propagiert. Dennoch ist die Beschreibung nicht exakt: wie in der effektive-Masse-Näherung werden alle Atome durch die selbe Gitterfunktion  $u_{0, k_0}(x)$  beschrieben. Die atomaren Wellenfunktionen sind durch  $\Psi_{x_1, k_1}(x) = u_{0, k_0}(x) A_{x_1, k_1}(x)$  gegeben. Dem liegt die Annahme zugrunde, daß die Abhängigkeit von  $u_{0, k}(x)$  vom Quasiimpuls  $k$  vernachlässigt werden kann, obwohl eine solche Näherung für  $E_0(k)$  nicht gemacht werden kann.

Eine zweite Bemerkung betrifft die Wahl der Breiten  $\sigma$ ,  $\lambda$  und  $\kappa$  nach den Bedingungen 4.5. Obwohl diese Parameter durch 4.5 nicht eindeutig bestimmt sind, ist die Dichteverteilung der Atome  $\rho(x, t)$  unabhängig vom Wert der Breiten, solange 4.5 erfüllt und alle Anfangsverteilungen gaußförmig sind. Wird außerdem die Breite  $\sigma$  der Einhüllenden so gewählt, daß  $\sigma \ll \lambda$  und  $2/\sigma \ll \kappa$ , dann ist  $\rho(x, t)$  auch nahezu unabhängig von der genauen Form der Einhüllenden  $A(x, 0)$ .

Mit diesen Einschränkungen ist die Dynamik der atomaren Ensembles im Rahmen des hier vorgestellten Modells durch die Modulationstiefe  $V_0$  des periodischen Potentials, die Positionen  $x_0$  und  $k_0$  der Anfangsverteilungen im Orts- und Quasiimpulsraum sowie deren Breiten  $\Delta x$  und  $\Delta k$  vollständig bestimmt. Alle diese Parameter können mit einer relativen Standardabweichung von rund 10 % gemessen bzw. mit entsprechender Genauigkeit experimentell eingestellt werden (vgl. Messungen in Abb. 4.1 und 4.2). Bis auf diese 10 % Toleranz enthält die

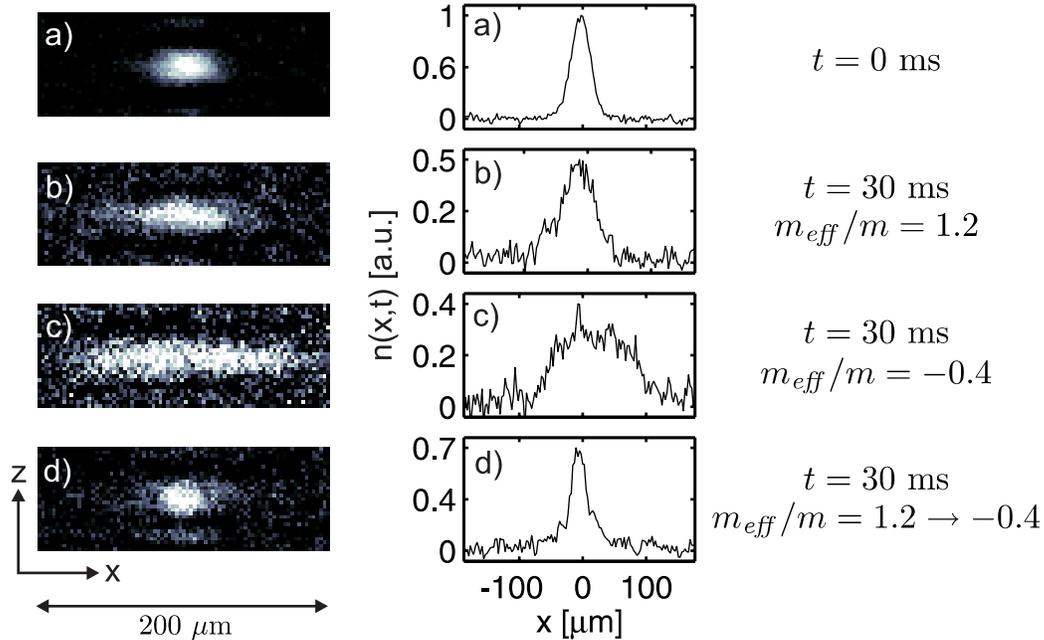
Theorie keine freien Parameter. In Abb. 4.3 ist die berechnete Dichteverteilung  $\rho(x, t)$  für verschiedene Werte von  $V_0$  und  $k_0$  zusammen mit der gemessenen Verteilung  $n(x, t)$  gezeigt. Die Übereinstimmung ist sehr gut.

## 4.5 Direkter Nachweis der negativen effektiven Masse

Im theoretischen Teil dieser Diplomarbeit (Abschnitt 1.1.2) wurde die Idee des Dispersionsmanagements anhand eines gaußförmigen Wellenpakets erläutert. Die effektive Masse wurde als ein Parameter vorgestellt, mit dem das Auseinanderfließen der Wellenpakete kontrolliert werden kann. Dies soll hier experimentell demonstriert werden, indem Vorzeichen und Betrag von  $m_{eff}$  während der Propagation der Wellenpakete verändert werden. Dadurch wird gleichzeitig ein direkter Nachweis des negativen Vorzeichens der effektiven Masse am Rand der Brillouinzone erbracht.

Damit das Experiment im Rahmen der Näherung konstanter effektiver Masse interpretiert werden kann, wird die Modulationstiefe des periodischen Potentials mit  $V_0 = 2.3 E_r$  relativ groß gewählt. Abb. 4.4(a) zeigt das Wellenpaket zum Zeitpunkt  $t = 0$  in diesem Potential. Seine Breite ist  $\Delta x(0) = 31 \mu\text{m}$ . Nun wird das Wellenpaket für  $t = 30$  ms bei unterschiedlichen Werten von  $m_{eff}$  propagiert. Es werden dabei genau die in Abb. 1.2 dargestellten Fälle realisiert:

- Nach 30 ms Propagation mit  $m_{eff} = 1.2 m$  im Zentrum der Brillouinzone zerfließt das Wellenpaket auf eine Breite von  $\Delta x(t) = 56 \mu\text{m}$  (Abb. 4.4(b)). Theoretisch würde man bei einer Quasiimpulsverteilung mit  $\Delta k = 0.27 k_L$  eine Breite von  $\Delta x(t) = \sqrt{(\Delta x(0))^2 + (\hbar \Delta k t / m_{eff})^2} = 50 \mu\text{m}$  erwarten.
- Am Rand der Brillouinzone ist  $m_{eff} = -0.4 m$ , das Wellenpaket zerfließt schneller (Abb. 4.4(c)). Die gemessene Breite ist  $\Delta x(t) = 116 \mu\text{m}$ , theoretisch würden  $123 \mu\text{m}$  erwartet. Sowohl positive als auch negative Werte von  $m_{eff}$  führen also zu einem Zerfließen des Wellenpakets.
- In Abb. 4.4(d) wurde das Vorzeichen der effektiven Masse während der Propagation umgekehrt. Dies kehrt auch die Dynamik der Atome um: das Wellenpaket fließt wieder zusammen und erreicht nach insgesamt 30 ms Propagation seine Anfangsgröße. Die Dispersion mit positiver und negativer Masse heben sich gegenseitig auf. Da der Betrag der effektiven Masse am Rand der Brillouinzone kleiner als im Zentrum ist, ist dort auch die Dynamik schneller. Das Zusammenfließen braucht nur rund 9 ms, während das Wellenpaket zuvor 21 ms im Zentrum der Brillouinzone auseinandergeflossen ist. Dies entspricht nicht ganz dem erwarteten Verhältnis von  $|m_{eff}(0)/m_{eff}(k_L)| = 3$  aufgrund der unterschiedlichen effektiven Massen.



**Abbildung 4.4** : Dispersionsmanagement für Materiewellen durch Kontrolle von Betrag und Vorzeichen der effektiven Masse. Gezeigt ist jeweils ganz links das Absorptionsbild der Atome, in der Mitte die durch Integration in  $z$ -Richtung bestimmte atomare Dichteverteilung entlang des Wellenleiters  $n(x, t)$  sowie rechts die Werte von  $m_{eff}$  während der Propagation. (a) Gaußförmiges Anfangswellenpaket der halben  $e^{-2}$ -Breite  $31 \mu\text{m}$ . (b) Wellenpaket nach 30 ms Propagation im Zentrum der Brillouinzone. Das Wellenpaket ist auseinander geflossen, die Breite beträgt nun  $56 \mu\text{m}$ . (c) Wellenpaket der Breite  $116 \mu\text{m}$  nach 30 ms Propagation am Rand der Brillouinzone. Da  $|m_{eff}|$  hier kleiner als im Zentrum der Brillouinzone ist, zerfließt das Wellenpaket schneller. (d) Nach 18.6 ms Propagation im Zentrum der Brillouinzone ( $m_{eff} > 0$ ) wird das Wellenpaket innerhalb von 2.6 ms am Rand der Brillouinzone präpariert. Nach weiteren 8.8 ms der Propagation mit  $m_{eff} < 0$  refokussiert das Wellenpaket und erreicht mit  $30 \mu\text{m}$  wieder seine Ausgangsbreite. Die Atomzahl in den atomaren Wolken schwankt von Schuß zu Schuß um  $\sim 40\%$ . Die Position in  $x$ -Richtung ist auf das bewegte Bezugssystem des optischen Gitters bezogen.

Dieses Experiment zeigt, daß das periodische Potential erfolgreich zur Kontrolle der Dispersion der Wellenpakete eingesetzt werden kann. Gleichzeitig wird das Konzept der effektiven Masse, das aus jedem Lehrbuch zur Festkörperphysik bekannt ist, mit Atomen im optischen Gitter direkt veranschaulicht. Der Einfluß des Vorzeichens der effektiven Masse auf die „Richtung“ der Dynamik ist evident (vgl. Abschnitt 1.1.2).

## 4.6 Was ist neu an diesen Experimenten?

Die Dynamik von Materiewellen in optischen Gittern wurde in den letzten Jahren von mehreren Forschungsgruppen untersucht. Im Zusammenhang mit dieser Diplomarbeit sind insbesondere die Experimente zu Transportprozessen mit thermischen Atomen [RSN97] und Bose-Einstein Kondensaten [MMC<sup>+</sup>01] von Bedeutung. In den zitierten Arbeiten konnten Phänomene der Festkörperphysik wie Bloch-Oszillationen und Landau-Zener-Tunneln mit Hilfe von Atomen in den experimentell gut kontrollierbaren optischen Gittern erstmals direkt beobachtet werden. Dazu wurden kalte Atome für kurze Zeit einem beschleunigten optischen Gitter ausgesetzt. Da die Atome entweder in einer dreidimensionalen Falle eingeschlossen waren oder sich im freien Fall befanden, war die Wechselwirkungszeit mit dem Gitter auf wenige Millisekunden begrenzt. Nach dem Ausschalten des Gitters wurde die Impulsverteilung der Atome durch geschwindigkeitsselektive Raman-Übergänge oder die time-of-flight Methode gemessen. Aus der Impulsverteilung konnte dann auf die Dynamik des Schwerpunkts der Wellenpakete im optischen Gitter zurückgeschlossen werden.

In den Experimenten dieser Diplomarbeit kann die Dynamik der Materiewellen dagegen direkt im Ortsraum beobachtet werden, während sich die Atome noch im optischen Gitter befinden. Die Propagationszeit im Gitter kann bis zu einigen Hundert Millisekunden betragen, da die Atome in einem Wellenleiter gegen die Gravitation gehalten werden. Dies ermöglicht es, erstmals auch die Dispersion der Einhüllenden der Wellenpakete im optischen Gitter zu beobachten und über die effektive Masse zu kontrollieren. Mit dem Ziel, das Gitter zur kontrollierten Manipulation der Dispersion einzusetzen, gehen die Experimente dabei ebenfalls über die in den Systemen der Festkörperphysik gegebenen Möglichkeiten hinaus und stehen eher in der Tradition der Faseroptik [LKC80, ES96]. Nachdem in diesem Kapitel Dispersionsmanagement im linearen Regime demonstriert wurde, soll diese Technik nun zur Untersuchung von nichtlinearen Effekten eingesetzt werden.



# Kapitel 5

## Nichtlineare Effekte: Atomare Gittersolitonen

In diesem Kapitel werden Experimente vorgestellt, bei denen Dispersionsmanagement auf ein Bose-Einstein Kondensat im atomaren Wellenleiter angewandt wurde. Durch die Präparation des Kondensats mit negativer effektiver Masse konnte das Auseinanderfließen des atomaren Wellenpakets verhindert werden, obwohl die Wechselwirkung zwischen den Atomen im Kondensat repulsiv ist. Dies ist ein starker Hinweis auf die Entstehung von atomaren Gittersolitonen. In einer numerischen Simulation der Dynamik des Kondensats im periodischen Potential wurde für die Parameter des Experiments ebenfalls die Entstehung eines Gittersolitons beobachtet. Die Erzeugung der Gittersolitonen im Experiment war mit der in Abschnitt 5.1.1 beschriebenen Methode nicht sehr reproduzierbar. Ein Grund könnte der große Anteil thermischer Atome im Wellenleiter sein, die beim Umladen der Kondensate aus der Magnetfalle entstanden. Daher wurden in einem weiteren Experiment reine Kondensate im Wellenleiter erzeugt, indem Verdampfungskühlung in der gekreuzten Dipolfalle durchgeführt wurde. Nach Präparation des Kondensats im optischen Gitter konnten so reproduzierbare Experimente zu Gittersolitonen durchgeführt werden.

### 5.1 Erste Experimente zu Gittersolitonen

Im folgenden soll die erste Generation von Experimenten zu atomaren Gittersolitonen vorgestellt werden. In den Experimenten wurde die im theoretischen Teil dieser Arbeit (Kapitel 1) formulierte Strategie zur Erzeugung der Gittersolitonen in schwachen periodischen Potentialen ( $V_0 \simeq E_r$ ) verfolgt. Die wesentlichen Anforderungen an das Experiment sind hier noch einmal dargestellt:

1. Die Ausdehnung  $\sigma_x$  der atomaren Wellenpakete muß groß gegenüber der Periode des optischen Gitters sein (vgl. Abschnitt 1.2.2). Im Experiment

ist die Anfangsgröße typischerweise  $\sigma_x \simeq 20 \mu\text{m}$  und diese Bedingung damit erfüllt.

2. Die Wellenpakete müssen adiabatisch am Rand der Brillouinzone ( $k_0 = k_L$ ) mit negativer effektiver Masse präpariert werden (Abschnitt 1.2.3). Die Experimente in Kapitel 4 haben gezeigt, daß dies möglich ist. Lediglich der unkontrollierte Impulsübertrag beim Abschalten der Magnetfalle verursacht noch Probleme.
3. Der Einschluß der Atome entlang des Wellenleiters sollte vernachlässigbar sein. Dies ist angesichts der gemessenen longitudinalen Fallenfrequenz von 2.7 Hz (Abschnitt 3.4.1) nur für Propagationszeiten im Bereich von einigen zehn Millisekunden der Fall.
4. Im Grundzustand des Wellenleiters müssen Kondensate mit kleiner Atomzahl präpariert werden. Dies ist notwendig, um die Bedingungen für Eindimensionalität (Abschnitt 1.3.3) und die Einschränkung der Dynamik auf das niedrigste Energieband (Abschnitt 1.4.1) zu erfüllen. Konkret bedeutet dies, daß die Atomzahl für typische Parameter des Experiments ( $\sigma_x \simeq 20 \mu\text{m}$ ,  $\omega_\perp \simeq 2\pi \times 130 \text{ Hz}$ ) nicht wesentlich größer als  $N_t \sim 5 \times 10^3$  Atome sein sollte.
5. Soll ein Soliton erster Ordnung erzeugt werden, muß nach Abschnitt 1.4.2 die Atomzahl mit  $N_t \sim 10^2$  noch rund eine Größenordnung geringer sein.
6. Das Kondensat sollte möglichst rein sein, um eine Störung der Dynamik durch Wechselwirkung mit thermischen Atomen zu vermeiden. Der Einfluß thermischer Atome ist in der auf der Gross-Pitaevskii Gleichung basierenden Theorie aus Kapitel 1 nicht enthalten.

In unserem Experiment stellen die letzten vier Bedingungen die größte Herausforderung dar, wie im folgenden deutlich wird.

### 5.1.1 Präparation der Atome

Die in diesem Abschnitt vorgestellten Experimente wurden mit dem Aufbau aus Kapitel 2 durchgeführt. Der Nd:YAG-Laser diente als Wellenleiter für die Atome, das optische Gitter wird durch die reskalierten Größen  $k_L^\alpha$ ,  $E_r^\alpha$  und  $v_r^\alpha$  aus Abschnitt 2.4.3 beschrieben. Das Bose-Einstein Kondensat wurde gemäß Kapitel 3 durch Verdampfungskühlung in der Magnetfalle hergestellt und in den Wellenleiter umgeladen. Dabei war die zweite Dipolfalle noch nicht verfügbar, d.h. die in Abschnitt 3.4 diskutierten Probleme durch den Impulsübertrag beim Abschalten der Magnetfalle bestanden nach wie vor. Wie in den Experimenten zum Dispersionsmanagement im linearen Regime (Kapitel 4) wird daher zwischen dem durch  $k_{exp}$  charakterisierten Bewegungszustand des optischen Gitters und dem

tatsächlichen Quasiimpuls  $k_0$  der Atome unterschieden, wobei in den hier vorgestellten Experimenten  $|k_0 - k_{exp}| \leq 0.2 k_L^\alpha$  ist. Die Präparation der Atome im optischen Gitter erfolgte wie in den Abschnitten 1.2.3 und 1.6.2 beschrieben.

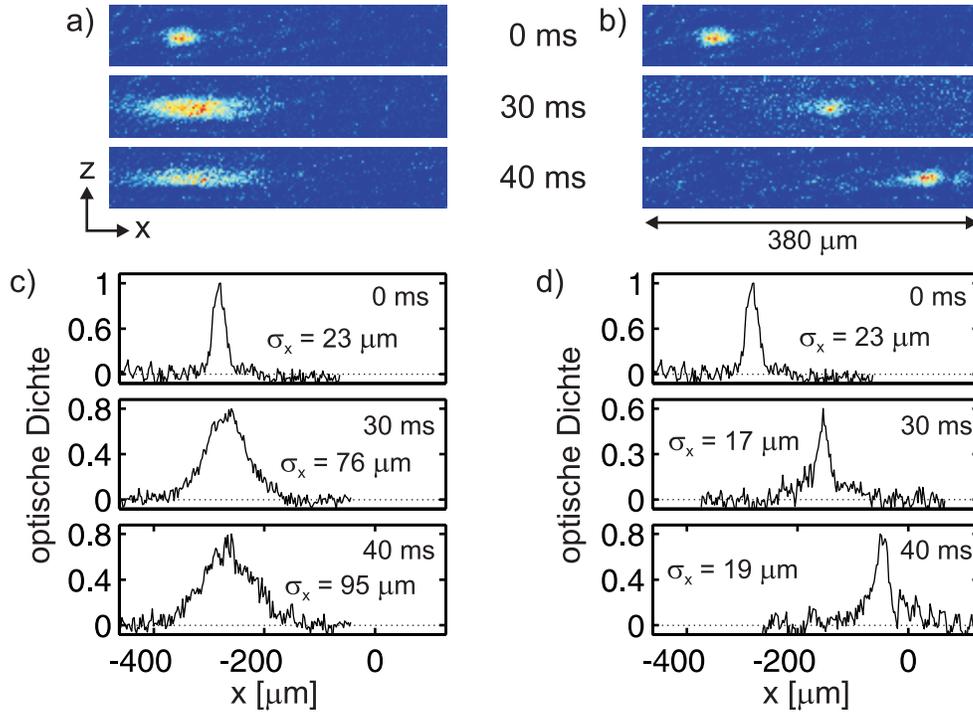
Die Atomzahl im Bose-Einstein-Kondensat wurde kontrolliert, indem die Endfrequenz  $f_{end}$  der RF-Frequenzrampe im letzten Schritt der Verdampfungskühlung variiert wurde (vgl. Abschnitt 3.3.1). Auf diese Weise lassen sich in unserem Experiment Kondensate mit  $N_t \simeq 2 \times 10^3$  Atomen herstellen, in den Wellenleiter umladen und zuverlässig über Absorptionsabbildung nachweisen. Die Atomzahl  $N_t$  fluktuiert dabei jedoch umso stärker, je kleiner  $N_t$  ist. Für  $N_t \simeq 2 \times 10^3$  schwankt die Atomzahl von Schuß zu Schuß um einen Faktor 2–3. Kondensate mit Atomzahlen in der Größenordnung von  $N_t \sim 10^2$  konnten nicht zuverlässig generiert werden. Die hier angegebenen Werte für  $N_t$  beziehen sich dabei immer auf die gesamte Atomzahl von Kondensat und einem eventuell vorhandenen thermischen Anteil nach dem Umladen in den Wellenleiter.

Die realisierbaren Atomzahlen liegen an der Grenze dessen, was nach Bedingung 4 des letzten Abschnitts zulässig ist. Für ein Soliton erster Ordnung im niedrigsten Energieband ist die Atomzahl dagegen deutlich zu hoch (vgl. Bedingung 5). Zusätzlich muß mit einem großen Anteil thermischer Atome im Wellenleiter gerechnet werden, wie die in Abb. 3.5 und 3.6 dargestellten Messungen zeigen. Trotz dieser experimentellen Probleme wurden im Experiment starke Hinweise auf die Entstehung von atomaren Gittersolitonen beobachtet.

### 5.1.2 Ein Wellenpaket, das nicht zerfließt

Um den Einfluß des optischen Gitters auf die nichtlineare Dynamik der Bose-Einstein Kondensate zu untersuchen, wurde die Propagation der Atome am Rand der Brillouinzone mit der im Zentrum der Brillouinzone verglichen. In Abb. 5.1 sind Absorptionsbilder der Atome zu unterschiedlichen Zeiten nach der Präparation im optischen Gitter gezeigt. Während die Breite des atomaren Wellenpakets im Zentrum der Brillouinzone mit der Zeit deutlich sichtbar zunimmt (Abb. 5.1(a),(c)), zeigt das Wellenpaket am Rand der Brillouinzone keine Dispersion (Abb. 5.1(b),(d)). Die Modulationstiefe des optischen Gitters war dabei mit  $V_0 \simeq E_r^\alpha$  im Zentrum und am Rand der Brillouinzone gleich. Dieses Verhalten steht in starkem Kontrast zu den Messungen im linearen Regime aus Kapitel 4: Dort war die Dispersion am Rand der Brillouinzone deutlich stärker als im Zentrum ( $k_0 = 0$ ), bedingt durch den kleineren Betrag der effektiven Masse bei  $k_0 = k_L^\alpha$ .

Das Ausbleiben der Dispersion für Bose-Einstein Kondensate am Rand der Brillouinzone ist ein deutliches Anzeichen für nichtlineare Dynamik und die Entstehung von Gittersolitonen. Am Rand der Brillouinzone ist die Dispersion anomal ( $m_{eff} < 0$ ) und kann daher durch die repulsive Nichtlinearität ( $g > 0$ ) kompensiert werden (vgl. Abschnitt 1.4.2). Dies äußert sich darin, daß die Breite des Wellenpakets auch nach 40 ms Propagationszeit nicht zugenommen hat. Im



**Abbildung 5.1** : Nichtlineare Dynamik der Atome in einem periodischen Potential der Modulationstiefe  $V_0 \simeq E_r^\alpha$  in Abhängigkeit vom Quasimpuls  $k_0$ . (a) Absorptionbilder der Atome nach unterschiedlichen Propagationszeiten im Zentrum der Brillouinzone ( $k_0 \simeq k_{exp} = 0$ ). Die Atomzahl im obersten Bild ist  $N_t = 5 \times 10^3$ , in den beiden unteren Bildern  $N_t = 1 \times 10^4$ . (b) Absorptionbilder nach Propagation der Atome am Rand der Brillouinzone mit Propagationszeiten wie in (a). Das optische Gitter bewegt sich im Laborsystem nach rechts, die Atome bewegen sich aufgrund von  $v_g(k_L^\alpha) = 0$  mit dem Gitter mit. Die Bilder wurden anhand der Position der Atome relativ zum optischen Gitter selektiert, so daß in allen Bildern  $k_0 \simeq k_L^\alpha$  ist. Der Wert von  $k_{exp}$  und damit die Geschwindigkeit des Gitters im Laborsystem unterscheidet sich leicht. Die Atomzahl ist im oberen Bild  $N_t = 5 \times 10^3$ , im mittleren Bild  $N_t = 3 \times 10^3$  und im unteren Bild  $N_t = 8 \times 10^3$ . (c) Schnitte in  $x$ -Richtung durch die Bilder aus (a).  $\sigma_x$  ist die halbe  $e^{-2}$ -Breite eines Gauß-Fits an die Daten. (d) Schnitte in  $x$ -Richtung durch die Bilder aus (b). In den beiden unteren Bildern ist um das Wellenpaket herum ein breiterer Untergrund zu erkennen, daher wurde die Breite  $\sigma_x$  des Wellenpakets durch einen bimodalen Gauß-Fit an die Daten bestimmt. Die Position in  $x$ -Richtung ist bei allen Bildern im Laborsystem angegeben.

Zentrum der Brillouinzone ist eine solche Kompensation nicht möglich. Dort ist die Dispersion normal ( $m_{eff} > 0$ ) und die Wellenpakete zerfließen.

Leider waren die hier dargestellten Ergebnisse nicht sehr reproduzierbar. Für identische experimentelle Parameter wurde nur in ca. 30 % der Fälle beobachtet, daß die Wellenpakete am Rand der Brillouinzone nicht zerfließen. Im Zentrum der Brillouinzone trat dieser Fall jedoch nie auf, es wurde immer Dispersion beobachtet. Die meisten Messungen wurden dabei mit Propagationszeiten von 20–40 ms durchgeführt. Für längere Propagationszeiten wurde auch am Rand der Brillouinzone ein Zerfließen der Wellenpakete beobachtet. Bei kürzeren Propagationszeiten ist die gemessene Größe des Wellenpakets noch zu stark von der Anfangsgröße dominiert und es kann noch keine Aussage über die Dispersion getroffen werden. Die Wellenpakete am Rand der Brillouinzone wiesen in den Absorptionbildern zudem oft einen starken Hintergrund auf, was die Analyse der Daten zusätzlich erschwerte. Auch in Abb. 5.1(d) ist dieser Hintergrund ansatzweise zu erkennen. Eine mögliche Erklärung für den Hintergrund sind thermische Atome im Wellenleiter oder das „Abstrahlen“ eines Teils der Atome, wie es in den Simulationen aus Abschnitt 5.1.3 auftritt.

Es gibt mehrere mögliche Ursachen für die schlechte Reproduzierbarkeit der Experimente und die Tatsache, daß für Propagationszeiten über 40 ms immer Dispersion beobachtet wurde. Einerseits wird nach dem Umladen aus der Magnetfalle ein hoher Anteil thermischer Atome im Wellenleiter beobachtet, der die Propagation eines Gittersolitons stören könnte. Unter Umständen wird auch das Kondensat selbst beim Umladen transversal angeregt. Andererseits schwankt die Atomzahl von Schuß zu Schuß. Dies ist auch in Abb. 5.1 zu erkennen. Die Atomzahlen in den Bildern liegen zwischen  $N_t = 3 \times 10^3$  und  $N_t = 1 \times 10^4$ . Zu hohe Atomzahlen führen jedoch zu starken Nichtlinearitäten und damit ebenfalls zu transversalen Anregungen im Wellenleiter (vgl. Abschnitt 1.3.3). In zweidimensionalen Simulationen wurde gezeigt, daß transversale Anregungen zur Instabilität der Gittersolitonen führen können [Hil01]. Entsprechend wurde im Experiment für Atomzahlen  $N_t > 2 \times 10^4$  immer Dispersion beobachtet.

Neben der Atomzahl schwankt auch der Quasiimpuls  $k_0$  der Atome von Schuß zu Schuß. Für einen gegebenen Wert von  $k_{exp}$  muß daher erwartet werden, daß die Atome nicht immer genau bei  $k_0 = k_L^\alpha$  präpariert werden. Es ist denkbar, daß die Bildung von Gittersolitonen kritisch vom genauen Wert von  $m_{eff}$  und damit von  $k_0$  abhängt, obwohl die effektive Masse für  $V_0 \simeq E_r^\alpha$  in einem Bereich  $0.8 k_L^\alpha \leq k_0 \leq 1.2 k_L^\alpha$  um den Rand der Brillouinzone herum negativ ist. Der Bereich annähernd konstanter effektiver Masse ( $|m_{eff}(k_0)| < 2 |m_{eff}(k_L^\alpha)|$ ) ist mit  $0.9 k_L^\alpha < k_0 < 1.1 k_L^\alpha$  noch schmaler. Hinzu kommt, daß sich das atomare Wellenpaket im Laborsystem bewegt und daher gegen das longitudinale harmonische Potential im Wellenleiter anläuft. Die dabei auf die Atome wirkende Kraft verschiebt die Quasiimpulsverteilung des Wellenpakets im Laufe der Zeit vom Rand der Brillouinzone weg. Selbst wenn die Atome zunächst bei  $k_0 = k_L^\alpha$  präpariert waren, werden sie nach einiger Zeit den Bereich mit  $m_{eff} > 0$  erreichen. Auch

dies könnte eine Erklärung dafür sein, daß für Propagationszeiten über 40 ms immer Dispersion beobachtet wurde. Bereits vorher wird erwartet, daß ein Teil der Atome aus dem Gittersoliton abgestrahlt wird, da sich  $|m_{eff}|$  und damit die Stärker der Dispersion ändert.

Aufgrund der beschriebenen Schwierigkeiten waren systematische Messungen mit dem hier verwendeten experimentellen Aufbau nicht möglich. In Abschnitt 5.2 werden neuere Ergebnisse zu Gittersolitonen in einem optimierten Aufbau dargestellt.

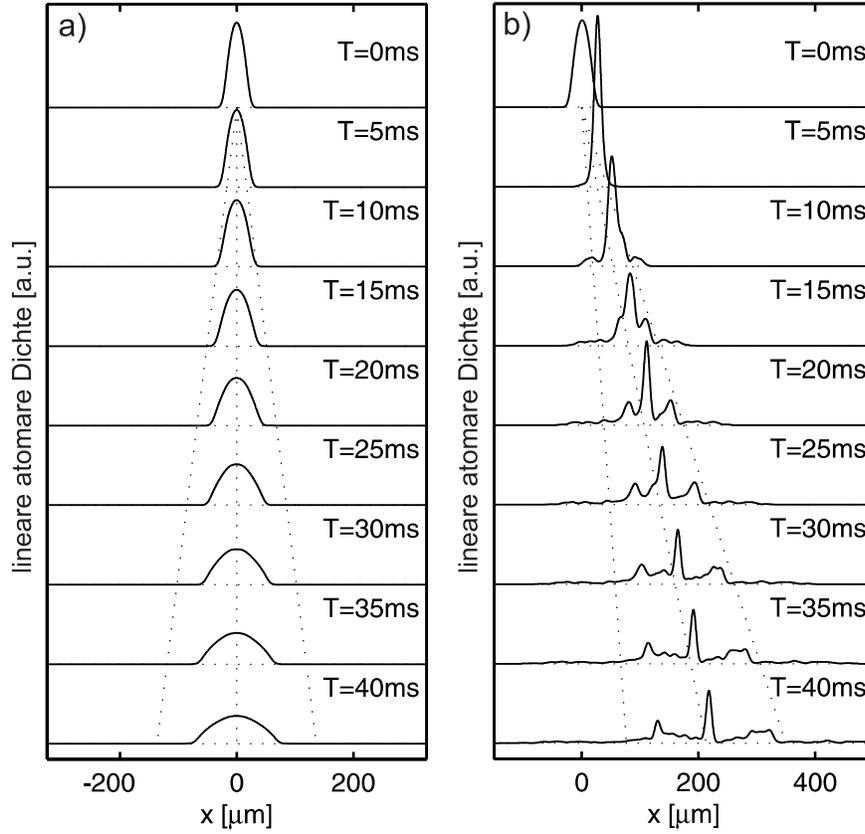
### 5.1.3 Diskussion und numerische Simulation

Trotz der schlechten Reproduzierbarkeit der Experimente sollen die Beobachtungen aus Abb. 5.1 mit den Erwartungen der Theorie aus Kapitel 1 verglichen werden. Für die Parameter des Anfangswellenpakets ( $N_t = 5 \times 10^3$ ,  $\sigma_x = 23 \mu\text{m}$ ) ist die lineare atomare Dichte entlang des Wellenleiters 170 Atome/ $\mu\text{m}$ . Damit ist die Nichtlinearität im Anfangswellenpaket zwar rund sechs mal kleiner als die Bandlücke  $\Delta E \simeq V_0/2$  (Gl. 1.35 mit  $V_0 = E_r^\alpha$ ,  $\omega_\perp = 2\pi \times 130 \text{ Hz}$ ), jedoch rund zwei mal so groß wie die transversale Oszillatorenergie  $\hbar\omega_\perp$  (Gl. 1.30). Daher muß unter Umständen mit transversalen Anregungen im Wellenleiter gerechnet werden.

Befinden sich alle  $5 \times 10^3$  Atome im Kondensat, so würde nach Gl. 1.40 die Entstehung eines Gittersolitons der Ordnung  $\mathcal{N} \simeq 12$  erwartet. Selbst bei einem großen thermischen Anteil in der atomaren Wolke ist  $\mathcal{N} \gg 1$ . Die Entstehung eines Solitons der Ordnung  $\mathcal{N} \gg 1$  ist jedoch im Rahmen der in Kapitel 1 vorgestellten Theorie unrealistisch. Solitonen höherer Ordnung gehen zu Anfang der Propagation durch eine Phase starker Kompression (vgl. 1.7(c)). Dabei verbreitert sich das Spektrum der Quasiimpulse und die Nichtlinearität im Zentrum des Wellenpakets nimmt stark zu. Dies führt zu transversalen Anregungen im Wellenleiter, zu einer Kopplung der Energiebänder über die Energielücke hinweg und zum Zusammenbruch der Näherung konstanter effektiver Masse. Die Voraussetzungen für eine Beschreibung im Rahmen der in Kapitel 1 vorgestellten Theorie sind damit nicht mehr gegeben.

Es ist jedoch möglich, die Dynamik des Bose-Einstein Kondensats im periodischen Potential numerisch zu simulieren. Die in Abschnitt 1.5.2 vorgestellten Simulationen sind von den Voraussetzungen der effektive-Masse-Theorie unabhängig, ebenso wurden keine Einschränkungen bezüglich der Kopplung von Energiebändern gemacht. Lediglich die Voraussetzung des transversalen Einschusses im Grundzustand des Wellenleiters muß bei den hier vorgestellten eindimensionalen Simulationen noch gemacht werden.

Abb. 5.2 zeigt das Ergebnis einer numerischen Simulation mit den in diesem Abschnitt genannten Parametern des Experiments. Während das Wellenpaket im Zentrum der Brillouinzone normale Dispersion zeigt (Abb. 5.2(a)), ist die Dynamik am Rand der Brillouinzone komplizierter (Abb. 5.2(b)): Zunächst geht das



**Abbildung 5.2** : Eindimensionale Simulation der Dynamik eines Bose-Einstein Kondensats im optischen Gitter (vgl. Abschnitt 1.5.2) für die Parameter des Experiments aus Abb. 5.1 ( $N_t = 5 \times 10^3$ ,  $\sigma_x = 23 \mu\text{m}$ ,  $V_0 = E_r^\alpha$ ,  $\omega_\perp = 2\pi \times 130 \text{ Hz}$ ). Zum Vergleich mit dem Experiment wurden die Wellenfunktionen in der Darstellung mit der Auflösung der Absorptionsabbildung von  $9 \mu\text{m}$  geglättet. Daher sind die Oszillationen der Blochfunktionen nicht zu erkennen. (a) Einhüllende des Wellenpakets für unterschiedliche Propagationszeiten im Zentrum der Brillouinzone nach Ende des Präparationsprozesses. Das Wellenpaket zerfließt. (b) Wellenpaket bei Propagation am Rand der Brillouinzone. Nach einer anfänglichen Phase der Kompression bildet ein Teil der Atome ein Gittersoliton, das sich mit  $v_g(k_L^\alpha) = 0$  bewegt. Die restlichen Atome befinden sich in Wellenpaketen um das Gittersoliton herum. Die Position in  $x$ -Richtung ist im Laborsystem angegeben. Die gestrichelten Linien markieren die Position von Atomen mit  $v_g = -v_g^{max}$ ,  $v_g = 0$  und  $v_g = +v_g^{max}$ , wobei  $v_g^{max} = 0.65 v_r^\alpha$  die maximale Gruppengeschwindigkeit in einem periodischen Potential mit  $V_0 = E_r^\alpha$  ist.

Wellenpaket durch eine Phase der Kompression. Danach bildet ein Teil der Atome ein Gittersoliton, das sich mit  $v_g = 0$  mit dem Gitter mitbewegt. Die restlichen Atome befinden sich in langsam zerfließenden Wellenpaketen um das Gittersoliton herum. Während die Struktur dieser zerfließenden Wellenpakete sehr stark von der genauen Wahl der Simulationsparameter abhängt, wurde die Ausbildung von Gittersolitonen in den Simulationen für einen weiten Parameterbereich beobachtet. Dabei traten für bestimmte Parameter auch mehrere Gittersolitonen auf. Dies kann auf das Phänomen der Modulationsinstabilität zurückgeführt werden [Agr95, CEL02].

Während der anfänglichen Kompression des Wellenpakets wird die nicht-lineare Energie größer als die Bandlücke (die maximale Dichte der Atome ist noch deutlich höher als in Abb. 5.2(b) zu sehen ist, da das Wellenpaket für die Darstellung mit der Auflösung der Absorptionsabbildung im Experiment geglättet wurde). Daher ist es wahrscheinlich, daß die anomale Dispersion des Gittersolitons nicht durch die negative effektive Masse im niedrigsten Energieband hervorgerufen wird, sondern durch die Kopplung der Energiebänder über die Energielücke hinweg. Eine theoretische Beschreibung müßte daher im Rahmen einer sog. „coupled-mode“-Theorie möglich sein (vgl. Abschnitt 1.4.4 und [SZ98, ZPMW99]).

Die Gittersolitonen sind in den Simulationen auch für lange Propagationszeiten stabil. Im Experiment kann damit nicht gerechnet werden, da die im Laufe der Propagation auftretenden Nichtlinearitäten zu transversalen Anregungen im Wellenleiter führen. In dieser Hinsicht sind eindimensionale Simulationen nicht realistisch. Um das Experiment noch realistischer zu simulieren, werden derzeit zweidimensionale Simulationen durchgeführt (siehe auch [Hil01]). Auch das longitudinale Potential im Wellenleiter kann zu Instabilitäten führen.

## 5.2 Dispersionsmanagement mit einem reinen Kondensat im Wellenleiter

In den bisher beschriebenen Experimenten zu atomaren Gittersolitonen (Abschnitt 5.1.2) trat eine Reihe von Problemen auf, die zu einer schlechten Reproduzierbarkeit der Ergebnisse führten. Um diese Probleme zu lösen und so die Reproduzierbarkeit der Experimente zu verbessern wurde die Prozedur zur Präparation der Bose-Einstein Kondensate im Wellenleiter verändert. In diesem Abschnitt wird kurz auf die Erzeugung reiner Bose-Einstein Kondensate im Wellenleiter nach dem derzeit verwendeten Schema eingegangen. Erste Ergebnisse zur Erzeugung atomarer Gittersolitonen mit diesem Schema werden vorgestellt.

Aktion	Dauer	$B'_q$ [G/cm]	$B_0$ [G]	$f_{RF}$ [MHz]	$P_1$ [mW]	$P_2$ [mW]
COD-Evap.	29 s	240	46 $\rightarrow$ 4.8	–	–	–
RF-Evap.	8 s	240	4.8	7.5 $\rightarrow$ 4.5	–	–
X-DT an	1 s	240	4.8	–	0 $\rightarrow$ 620	0 $\rightarrow$ 50
MT aus	900 ms	240 $\rightarrow$ 0	4.8	–	620	50
Evap. in X-DT	5 s	–	4.8	–	620 $\rightarrow$ 460	50 $\rightarrow$ 20
Entsp. Dipol 2	400 ms	–	5.6	–	460 $\rightarrow$ 500	20 $\rightarrow$ 10
Dipol 2 aus	$\sim 1 \mu\text{s}$	–	5.6	–	500	10 $\rightarrow$ 0

**Tabelle 5.1** : Verdampfungskühlung zum BEC unter Einsatz der gekreuzten Dipolfalle (X-DT, Details zum Aufbau der Dipolfallen in Abschnitt 2.4). Gezeigt sind die Werte für Quadrupol-Magnetfeldgradient  $B'_q$ , Bias-Feld  $B_0$ , Frequenz der RF-Strahlung  $f_{RF}$  sowie die Leistung in den beiden Dipolfallen,  $P_1$  und  $P_2$ , während der einzelnen experimentellen Schritte: Zunächst werden COD-Evaporation und RF-Evaporation in der Magnetfalle (MT) durchgeführt (analog zum Vorgehen in Kapitel 3). Dann werden die noch thermischen Atome in die gekreuzte Dipolfalle umgeladen. Dazu wird die X-DT adiabatisch angeschaltet und anschließend die MT adiabatisch ausgeschaltet. Im nächsten Schritt wird durch Absenkung der Leistung in den Laserstrahlen in der X-DT Verdampfungskühlung zum BEC durchgeführt. Anschließend wird die Dipolfalle 2 weiter entspannt um die Größe des Anfangswellenpakets einzustellen. Am Schluß wird die Dipolfalle 2 rasch abgeschaltet.

### 5.2.1 Präparation der Atome

Um die in Abschnitt 5.1.2 genannten experimentellen Probleme zu lösen, wurde zunächst die zweite Dipolfalle aufgebaut (siehe Abschnitt 2.4.2). Damit besteht die Möglichkeit, die Atome in einer gekreuzten Dipolfalle in drei Dimensionen einzuschließen. Dann wurde ein Schema zur Verdampfungskühlung in der gekreuzten Dipolfalle implementiert (vgl. Abschnitt 3.2). Tabelle 5.1 zeigt die Änderung der wichtigsten experimentellen Parameter während der Verdampfungskühlung. Auf diese Weise konnte Bose-Einstein Kondensation direkt im optischen Potential erreicht werden.

Dieses neue Schema zur Präparation der Bose-Einstein Kondensate im Grundzustand des Wellenleiters löst zwei Hauptprobleme der bisherigen Experimente:

- Es konnten erstmals reine Bose-Einstein Kondensate im Wellenleiter präpariert werden. Dies ist aus Abb. 3.5(b) zu ersehen: In der Expansion der Atome aus dem Wellenleiter ist kein Anteil thermischer Atome sichtbar. Im alten Aufbau war beim Umladen des Kondensats in den Wellenleiter immer ein großer Teil der Atome thermisch angeregt worden (Abb. 3.5(a)).
- Nach Erzeugung des Kondensats muß nur noch die zweite Dipolfalle abgeschaltet werden, um die Materiewellen zur Propagation in den Wellenleiter zu entlassen. Die Magnetfalle wird schon vor der Kondensation langsam

abgeschaltet. Dadurch konnten die Probleme durch den unkontrollierten Impulsübertrag beim schnellen Abschalten der Magnetfalle vermieden werden (vgl. Abschnitt 2.4.2). Der zentrale Quasiimpuls  $k_0$  der Materiewellen nach Präparation im optischen Gitter ist damit viel besser definiert.

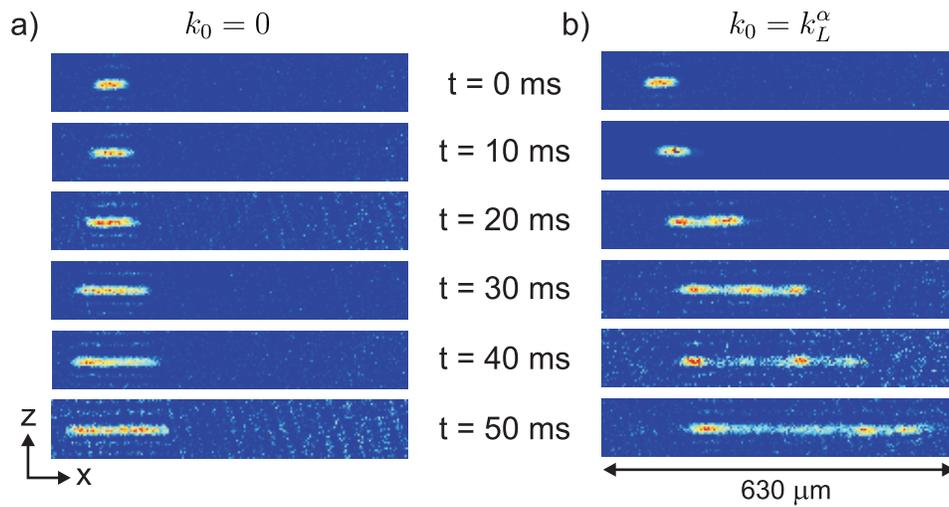
Aufgrund dieser Vorteile waren die in diesem Abschnitt beschriebenen Experimente reproduzierbar. Lediglich die Atomzahl in den Kondensaten schwankt nach wie vor von Schuß zu Schuß um ca. 50 %. Die Erzeugung von Kondensaten mit Atomzahlen  $N_t < 10^3$  sind immer noch nicht möglich.

### 5.2.2 Neue Ergebnisse zu atomaren Gittersolitonen

Nachdem das Bose-Einstein Kondensat in der gekreuzten Dipolfalle erzeugt wurde, expandiert es nach Abschalten der zweiten Dipolfalle im Wellenleiter. Durch die Nichtlinearität wird die anfänglich sehr schmale Impulsverteilung des Kondensats verbreitert und das atomare Wellenpaket expandiert im Wellenleiter sehr schnell. In einer Messung der Expansion von Kondensaten mit  $N_t \simeq 1 \times 10^4$  Atomen im Wellenleiter wurde eine halbe  $e^{-2}$ -Breite der Impulsverteilung von  $\Delta p \sim 0.5 \hbar k_L^\alpha$  ermittelt. Auch bei dieser Messung war der Einschluß der Atome in ein longitudinales Potential der Fallenfrequenz  $\omega_{\parallel} = 2\pi \times 2.9$  Hz sichtbar (vgl. Abschnitt 3.4.1). Der angegebene Wert für  $\Delta p$  bezieht sich auf die Expansion der Atome auf Zeitskalen  $t \ll 2\pi/\omega_{\parallel}$ , bevor das longitudinale Potential die Impulsverteilung verändert.

Gleichzeitig mit dem Abschalten der zweiten Dipolfalle beginnt die Präparation im periodischen Potential, die dem in den Abschnitten 1.2.3 und 1.6.2 beschriebenen Schema folgt. Wie in der ersten Generation der Experimente zu atomaren Gittersolitonen (Abschnitt 5.1.2) soll nun die Dynamik der Atome am Rand der Brillouinzone mit der im Zentrum der Brillouinzone verglichen werden.

Abb. 5.3(a) zeigt Absorptionsbilder der Expansion von Bose-Einstein Kondensaten mit  $N_t \simeq 5 \times 10^3$  Atomen im Wellenleiter. Die Atome befinden sich dabei im Zentrum der ersten Brillouinzone eines periodischen Potentials der Modulationstiefe  $V_0 \simeq 1.7 E_r^\alpha$ . Das Materiewellenpaket zeigt Dispersion. In Abb. 5.4(a) ist für die selben Absorptionsbilder die atomare Dichteverteilung entlang des Wellenleiters gezeigt: die Wellenpakete haben steile Flanken. Eine mögliche Erklärung könnte die breite Quasiimpulsverteilung  $\Delta k = \Delta p/\hbar \sim 0.5 \hbar k_L^\alpha$  der Atome im Gitter sein: auch bei Propagation im Zentrum der Brillouinzone macht sich bereits die Abweichung des niedrigsten Energiebandes  $E_0(k)$  von einer quadratischen Dispersionsrelation bemerkbar. In den Experimenten aus Abschnitt 5.1.2 waren solche Effekte nicht beobachtet worden. Dort war die Quasiimpulsverteilung etwas schmaler. Eine andere mögliche Erklärung sind nichtlineare Effekte: auch diese können bei normaler Dispersion zu steilen Flanken der Wellenpakete führen (vgl. das Phänomen des „optical wave breaking“ in der Faseroptik mit Laserpulsen [Agr95]).

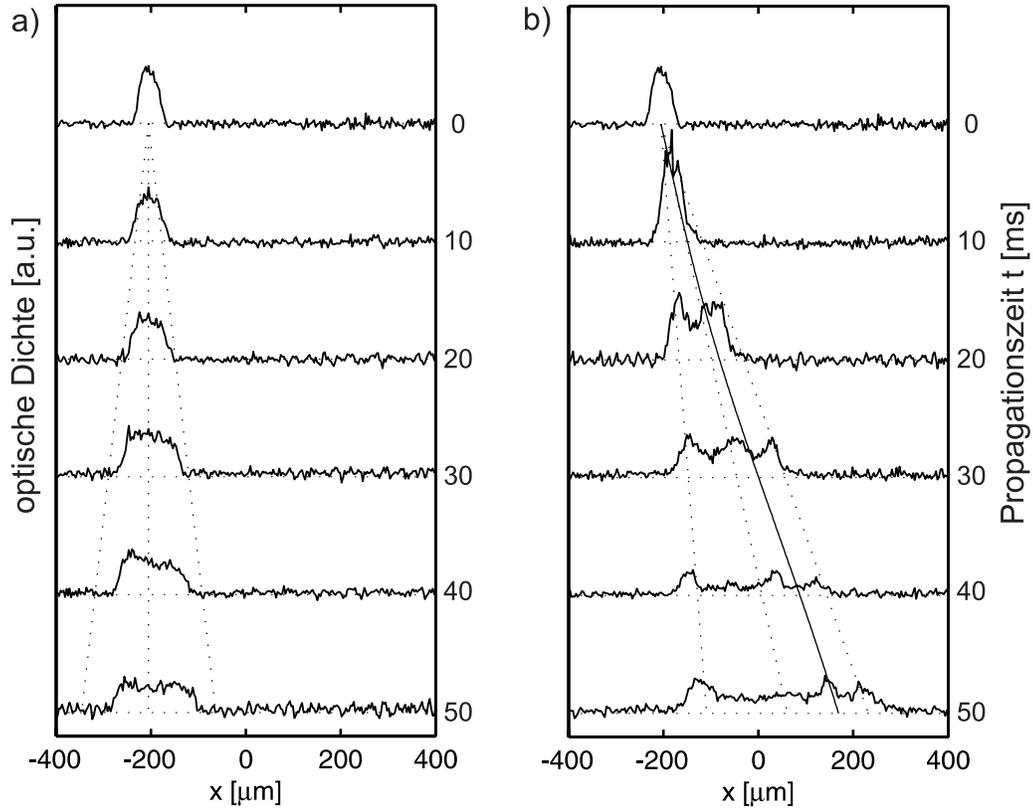


**Abbildung 5.3** : Nichtlineare Dynamik eines Bose-Einstein Kondensats mit  $N_t \simeq 5 \times 10^3$  Atomen im periodischen Potential in Abhängigkeit vom Quasiimpuls  $k_0$ . Es ist immer derselbe Bildausschnitt im Laborsystem gezeigt. (a) Absorptionsbilder der Atome nach unterschiedlichen Propagationszeiten im Zentrum der Brillouinzone ( $k_0 = 0$ ). Das atomare Wellenpaket fließt mit der Zeit auseinander. Die Modulationstiefe des Potentials ist  $V_0 = 1.7 E_r^\alpha$ . (b) Absorptionsbilder nach Propagation am Rand der Brillouinzone ( $k_0 = k_L^\alpha$ ) mit Propagationszeiten wie in (a). Nach  $t = 10$  ms ist das Wellenpaket etwas schmäler als zu Beginn der Propagation. Danach expandiert das Wellenpaket und man erkennt drei einzelne Spitzen der Dichteverteilung. Die mittlere Spitze scheint sich vor dem Hintergrund der beiden anderen nach rechts zu bewegen. Die Modulationstiefe des periodischen Potentials ist  $V_0 = 1.1 E_r^\alpha$ .

Abb. 5.3(b) zeigt Absorptionsbilder von Bose-Einstein Kondensaten der selben Atomzahl bei Expansion am Rand der Brillouinzone. Zu Beginn der Propagation komprimiert sich das Wellenpaket etwas. In der darauf folgenden Expansion sind drei einzelne Spitzen der atomaren Dichteverteilung auf einem breiten Hintergrund deutlich zu erkennen. In Abb. 5.4(b) sind die zugehörigen Dichteverteilungen in  $x$ -Richtung gezeigt. Die beiden äußeren Spitzen bewegen sich mit maximaler Gruppengeschwindigkeit  $\pm v_g^{max}$  im periodischen Potential. Daher liegt die Interpretation nahe, daß es sich um Atome mit einem Quasiimpuls bei  $|m_{eff}| = \infty$  handelt. Bei  $|m_{eff}| = \infty$  ist die Dispersion stark unterdrückt. Dieser Effekt wurde auch schon im linearen Regime beobachtet (vgl. Abschnitt 4.3). Die mittlere Spitze kann durch lineare Effekte nicht erklärt werden. Offenbar bewegt sie sich zunächst mit  $v_g \simeq 0$ , d.h. die betreffenden Atome haben einen Quasiimpuls  $k_0 \simeq k_L^\alpha$  am Rand der Brillouinzone und damit eine negative effektive Masse. In der Spitze befinden sich rund 500 Atome, dies sind 10 % der gesamten Atomzahl. Die Interpretation liegt nahe, daß es sich bei der mittleren Spitze um ein Gittersoliton handelt.

Die Modulationstiefe des periodischen Potentials ist in Abb. 5.3(b) und 5.4(b) mit  $V_0 \simeq 1.1 E_r^\alpha$  etwas niedriger als in Abb. 5.3(a) und 5.4(a). Dieser geringe Unterschied äußert sich vor allem in etwas unterschiedlichen Werten für  $v_g^{max}$ . Er kann jedoch nicht für das qualitativ unterschiedliche Verhalten der Kondensate am Rand im Gegensatz zum Zentrum der Brillouinzone verantwortlich sein.

In Abb. 5.4(b) fällt auf, daß die mittlere Spitze im Laufe der Zeit nach rechts beschleunigt wird. Dies könnte auf den Einfluß des longitudinalen Potentials im Wellenleiter zurückzuführen sein. Experimentell wurde das Minimum des longitudinalen Potentials mit der Anfangsposition  $x_0$  der atomaren Wellenpakete überlappt. Da sich das optische Gitter im Laborsystem in positive  $x$ -Richtung bewegt und die Gruppengeschwindigkeit am Rand der Brillouinzone  $v_g = 0$  ist, laufen die bei  $k_0 = k_L^\alpha$  präparierten Atome in der mittleren Spitze gegen das longitudinale Potential an. Im Rahmen einer harmonischen Näherung des Potentials wirkt auf die Atome also eine rücktreibende Kraft  $F(x) = -m\omega_{||}^2(x - x_0)$ , wobei  $\omega_{||}$  die longitudinale Fallenfrequenz ist. Für Atome mit einer positiven effektiven Masse würde dies zu einer Beschleunigung in negative  $x$ -Richtung führen. Da die effektive Masse bei  $k_0 = k_L^\alpha$  jedoch *negativ* ist, beschleunigt das Wellenpaket in *positive*  $x$ -Richtung, entgegengesetzt zur wirkenden Kraft. Dies führt in Übereinstimmung mit der experimentellen Beobachtung dazu, daß das Wellenpaket nach einiger Zeit sichtbar schneller als das optische Gitter nach rechts läuft. Diese Beobachtung ist ein weiteres Indiz dafür, daß die Atome in der mittleren Spitze eine negative effektive Masse haben. Die Dynamik der beiden äußeren Spitzen scheint dagegen durch das longitudinale Potential nicht beeinflusst zu sein. Wenn es sich um Atome bei  $|m_{eff}| = \infty$  handelt, ist dies zu erwarten: bei  $|m_{eff}| = \infty$  ändert sich die Gruppengeschwindigkeit in erster Näherung unter dem Einfluß der Kraft nicht.



**Abbildung 5.4** : Schnitte in  $x$ -Richtung durch die Absorptionbilder aus Abb. 5.3. (a) Expansion im Zentrum der Brillouinzone ( $k_0 = 0$ ). Die Wellenpakete haben steile Flanken. (b) Expansion am Rand der Brillouinzone ( $k_0 = k_L^\alpha$ ). Deutlich ist die anfängliche Kompression des Wellenpakets und die darauf folgende Dynamik der drei Spitzen atomarer Dichte vor einem breiten Hintergrund zu sehen. Während sich die beiden äußeren Spitzen mit  $\pm v_g^{max}$  im optischen Gitter bewegen, scheint die mittlere Spitze nach rechts beschleunigt zu werden. Die gestrichelten Linien markieren die Position von Atomen mit  $v_g = -v_g^{max}$ ,  $v_g = 0$  und  $v_g = +v_g^{max}$ , wobei  $v_g^{max}$  die maximale Gruppengeschwindigkeit in einem periodischen Potential der Modulationstiefe  $V_0$  ist. Die Linie für  $v_g = 0$  gibt gleichzeitig die Position des optischen Gitters im Laborsystem an. Die durchgezogene Linie beschreibt die Bewegung  $x(t)$  des Schwerpunkts eines bei  $k_0 = k_L^\alpha$  präparierten Wellenpakets unter dem Einfluß eines im Laborsystem ruhenden harmonischen Potentials (siehe Text). Die Position in  $x$ -Richtung ist bei allen Bildern im Laborsystem angegeben.

Etwas formaler kann die Bewegung eines Wellenpakets im optischen Gitter unter dem Einfluß einer äußeren Kraft im Rahmen einer semiklassischen Näherung beschrieben werden, wie sie in der Festkörperphysik für die Beschreibung der Elektronendynamik verwendet wird [AM01]. Im Rahmen dieses Modells werden der zentrale Quasiimpuls  $k_0(t)$  und die Position  $x_s(t)$  des Schwerpunkts eines Wellenpakets im Bezugssystem des periodischen Potentials durch die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}\hbar \dot{k}_0(t) &= F(x_s(t)) = -m\omega_{\parallel}^2 (v_l t + x_s(t) - x_0) \\ \dot{x}_s(t) &= v_g(k_0(t))\end{aligned}\quad (5.1)$$

beschrieben. Im Ausdruck für die Kraft  $F(x_s(t))$  wurde dabei ein im Laborsystem ortsfestes harmonisches Potential angenommen.  $v_l$  bezeichnet die zeitlich konstante Geschwindigkeit des optischen Gitters im Laborsystem. Die Position des Wellenpakets im Laborsystem ist damit  $x(t) = v_l t + x_s(t)$ . Die Bandstruktur im periodischen Potential geht über die Gruppengeschwindigkeit  $v_g(k_0(t))$  im niedrigsten Energieband in die Gleichungen ein. Die Bewegungsgleichungen 5.1 wurden unter Verwendung der numerisch bestimmten Bandstruktur (vgl. Abschnitt 1.5.1) integriert. Dabei wurden die experimentellen Parameter  $\omega_{\parallel} = 2\pi \times 2.9$  Hz,  $v_l = v_r^{\alpha}$  und die Anfangsbedingungen  $k_0(0) = k_L^{\alpha}$ ,  $x_s(0) = 0$  verwendet. In Abb. 5.4(b) ist die Trajektorie  $x(t)$  des Wellenpakets eingezeichnet. Sie stimmt annähernd mit der Position der Atome in der mittleren Spitze überein.

Im semiklassischen Modell wird die Dispersion der Einhüllenden der Wellenpakete vernachlässigt. Zum Vergleich mit dem Experiment muß jedoch berücksichtigt werden, daß sich der zentrale Quasiimpuls der Atome unter dem Einfluß der externen Kraft mit der Zeit gemäß  $k_0(t)$  verschiebt. Dies bedeutet, daß das Wellenpaket nach einiger Zeit den Bereich mit  $m_{eff} < 0$  verläßt. Für die Parameter des Experiments aus Abb. 5.4(b) ist dies bereits nach 33 ms der Fall. Dann befindet sich das Wellenpaket jedoch zunächst bei  $|m_{eff}| \gg m$ . Daher wird nur ein langsames Zerfließen des Wellenpakets erwartet.

Es ist nicht auszuschließen, daß auch die Wellenpakete in den Experimenten aus Abschnitt 5.1.2 durch das longitudinale Potential im Wellenleiter beschleunigt wurden. In diesen Experimenten konnte jedoch insbesondere wegen des von Schuß zu Schuß schwankenden Quasiimpulses des Anfangswellenpakets  $k_0$  die Trajektorie der Wellenpakete nicht sehr genau vermessen werden.

Ob es sich bei der mittleren Spitze in Abb. 5.4(b) tatsächlich um ein Gittersoliton handelt, kann noch nicht abschließend entschieden werden. Zunächst muß in systematischen Messungen geklärt werden, welchen Einfluß die Werte der verschiedenen experimentellen Parameter wie  $\omega_{\perp}$ ,  $\omega_{\parallel}$ ,  $N_t$  und  $V_0$  auf die Dynamik der nichtlinearen Materiewellen haben. Zwei- oder dreidimensionale numerische Simulationen der Dynamik der Bose-Einstein Kondensate wären zum Vergleich mit den Messungen ebenfalls hilfreich. Falls es sich tatsächlich um ein Gittersoliton handeln sollte, ist auch noch zu klären, ob sich dieses im Rahmen der Theorie

aus Kapitel 1 beschreiben läßt. Da die Experimente durch die Umstellung auf Verdampfungskühlung in der gekreuzten Dipolfalle gut reproduzierbar geworden sind, werden sich diese Fragen in weiteren Messungen beantworten lassen.



# Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde Dispersionsmanagement für Materiewellen erstmals experimentell demonstriert. Mit Hilfe eines optischen Gitters konnte die Dispersionsrelation der Materiewellen gezielt manipuliert werden. Diese neue Technik wurde in Experimenten zur nichtlinearen Atomoptik auf ein Bose-Einstein Kondensat in einem atomaren Wellenleiter angewandt. Dabei wurden starke Hinweise auf die Erzeugung von Gittersolitonen beobachtet.

Zu Beginn der Diplomarbeit wurde eine Apparatur zur Bose-Einstein Kondensation von  $^{87}\text{Rb}$  fertiggestellt. Aufbauend auf den in [For01] beschriebenen Vorarbeiten wurde in einer magnetischen TOP-Falle Verdampfungskühlung durchgeführt. Unterhalb einer kritischen Temperatur von  $T_c = 260$  nK konnte Bose-Einstein Kondensation in einem verdünnten Gas von  $2 \times 10^5$  Rb-Atomen beobachtet werden.

Die Kondensate wurden durch adiabatische Fallenänderung in das optische Dipolpotential eines weit von Resonanz verstimmten, fokussierten Laserstrahls transferiert, der als Wellenleiter für die Materiewellen dient. Damit wurde ein zur nichtlinearen Faseroptik mit Laserpulsen analoges System realisiert: Der fokussierte Laserstrahl übernimmt die Rolle der Faser, die Bose-Einstein Kondensate entsprechen den Laserpulsen. Die Propagation der Kondensate in dem Wellenleiter wurde untersucht. Es konnten Dipol- und Quadrupolschwingungen des atomaren Ensembles beobachtet werden. Dabei war neben dem Kondensat immer ein großer Anteil thermischer Atome im Wellenleiter sichtbar.

In einem verbesserten Aufbau wurde Verdampfungskühlung direkt im optischen Potential des Wellenleiters und einer zweiten Dipolfalle durchgeführt. Auf diese Weise konnten reine Kondensate mit  $10^3$ – $10^4$  Atomen im Grundzustand des Wellenleiters präpariert werden. In der Expansion der Kondensate waren keine thermischen Atome mehr sichtbar.

Die Dispersion der Materiewellen im Wellenleiter wurde mit Hilfe eines optischen Gitters gezielt manipuliert. Das optische Gitter wird von einer stehenden Lichtwelle erzeugt, deren Amplitude und Phase experimentell sehr genau kontrolliert werden können. Dadurch läßt sich die effektive Masse der Atome im Gitter und damit die Dispersion der Materiewellen einstellen.

In einem Experiment mit einem inkohärenten atomaren Ensemble im linearen Regime wurden Bloch-Oszillationen und Landau-Zener-Tunneln der Atome in dem optischen Gitter beobachtet. Diese aus der Festkörperphysik bekannten Phänomene konnten in den hier vorgestellten Experimenten erstmals direkt im Ortsraum beobachtet werden, während sich die Atome noch im Gitter befanden. Gleichzeitig wurde erstmals die Dispersion der Einhüllenden der Wellenpakete im Gitter beobachtet und über die effektive Masse kontrolliert. Es konnte gezeigt werden, daß die atomaren Wellenpakete im linearen Regime umso schneller zerfließen, je kleiner der experimentell eingestellte Betrag der effektiven Masse war. Während der Propagation änderte sich auch die Form der Wellenpakete. Dies konnte mit Hilfe eines einfachen theoretischen Modells auf die Abhängigkeit der effektiven Masse vom Quasiimpuls zurückgeführt werden.

In einem weiteren Experiment wurde der Einfluß des Vorzeichens der effektiven Masse auf die Dynamik der Wellenpakete gezeigt. Das Umschalten von positiver auf negative effektive Masse entspricht im linearen Regime einer Zeitumkehr: ein bereits auseinandergeflossenes Wellenpaket läuft wieder zusammen.

Nachdem durch die Experimente im linearen Regime erwiesen war, daß Dispersionsmanagement für Materiewellen möglich ist, wurde diese Technik auf Bose-Einstein Kondensate mit  $5 \times 10^3$  Atomen im Wellenleiter angewandt. Das Zusammenspiel von Nichtlinearität und Dispersion konnte damit untersucht werden:

Bei positiven effektiven Massen zeigen die Materiewellen im Experiment immer Dispersion. Das Zerfließen der Wellenpakete wird durch die repulsive Wechselwirkung zwischen den Atomen sogar noch verstärkt, so daß sich die Breite der Wellenpakete nach weniger als 20 ms Propagation verdoppelt.

Im Gegensatz dazu konnte durch die Präparation der Kondensate bei negativer effektiver Masse ein Zerfließen der Wellenpakete verhindert werden. Obwohl die Wechselwirkung zwischen den Atomen repulsiv ist, hatte das Wellenpaket seine Breite nach 40 ms noch nicht verändert. Dies ist ein starker Hinweis auf die Erzeugung von atomaren Gittersolitonen im Experiment. Weitere Tests in einem optimierten experimentellen Aufbau werden derzeit durchgeführt. Atomare Gittersolitonen wurden bereits in zahlreichen theoretischen Arbeiten untersucht [ZPMW99, SZ98, TS01, ABD<sup>+</sup>01, Mey01, CEL02], jedoch noch nie beobachtet. Im Rahmen dieser Diplomarbeit wurde in einer numerischen Simulation der Dynamik des Bose-Einstein Kondensats im optischen Gitter für die Parameter des Experiments ebenfalls die Entstehung eines Gittersolitons beobachtet.

Die in dieser Diplomarbeit vorgestellten Experimente mit atomaren Bose-Einstein Kondensaten sind ein Beispiel dafür, wie Konzepte aus einem Teilgebiet der Physik erfolgreich in ein anderes Teilgebiet übernommen werden können. Motiviert wurden die Experimente durch die Beobachtung von Gittersolitonen in der nichtlinearen Faseroptik mit Laserpulsen [ES96]. Das Konzept der effektiven Masse stammt dagegen aus der Festkörperphysik [AM01].

## Ausblick

In der näheren Zukunft des Experiments wird in weiteren Tests zu klären sein, ob es sich bei den nicht zerfließenden Wellenpaketen mit negativer effektiver Masse tatsächlich um Gittersolitonen handelt. Dabei ist anzustreben, noch kleinere Kondensate mit nur wenigen Hundert Atomen im Wellenleiter zu präparieren und nachzuweisen. In Kondensaten mit geringerer Atomzahl verbreitert die Nichtlinearität die Quasiimpulsverteilung nicht so stark. Dies sollte die Beobachtung von Gittersolitonen in reiner Form vereinfachen.

Die Technik des Dispersionsmanagements soll in Zukunft auch in Experimenten zur Pulscompression mit Materiewellen Verwendung finden. Hierzu wurden in dieser Arbeit bereits numerische Simulationen durchgeführt.

Mit Gittersolitonen könnte eine Reihe von weiterführenden Experimenten durchgeführt werden. Zunächst wäre die Untersuchung von Kollisionen zwischen zwei Gittersolitonen interessant. Gittersolitonen sind im mathematisch strengen Sinne sogenannte „solitäre Wellen“. Dies äußert sich unter anderem darin, daß nach einer Kollision zweier Solitonen eine leichte Änderung ihrer Form auftreten sollte [CEL02]. In unserem Experiment ließen sich Kollisionen zwischen Gittersolitonen nach einer geringfügigen Modifikation des derzeitigen Aufbaus untersuchen.

Solitonen finden in der Optik in Experimenten zur Erzeugung von amplitudengequetschtem Licht Verwendung [FMW<sup>+</sup>96]. Analog könnten Gittersolitonen eingesetzt werden, um Zustände mit reduzierten Atomzahlfluktuationen herzustellen. Diese Zustände könnten dann in einem Atominterferometer zur Erhöhung der Auflösung eingesetzt werden.

Das im Rahmen dieser Diplomarbeit fertiggestellte System zur Erzeugung von Bose-Einstein Kondensaten in einem Wellenleiter läßt sich mit nur geringen Modifikationen auch für andere Experimente einsetzen. Die Kondensate im Wellenleiter stellen generell einen guten Ausgangspunkt für die Untersuchung der Propagation von Materiewellen in einer Dimension dar. Wird beispielsweise anstelle des periodischen Potentials ein Zufallspotential angelegt, könnten Experimente zur Lokalisierung von Materiewellen durchgeführt werden. Das Zufallspotential ließe sich z.B. durch Abbildung eines optischen „speckle“-Musters erzeugen. Diese Möglichkeiten lassen erwarten, daß in Zukunft noch einige interessante Experimente mit dem hier vorgestellten System durchgeführt werden.



# Anhang: Spektroskopische Daten von $^{87}\text{Rb}$

Wellenlänge (Vakuum)	$\lambda_L$	780.246 nm
Wellenzahl	$k_L = 2\pi/\lambda_L$	$8.053 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$
Linienbreite	$\Gamma$	$2\pi \times 5.76 \text{ MHz}$
Sättigungsintensität ( $\sigma^+$ -polarisiertes Licht, $ F = 2, m_F = 2\rangle \rightarrow  F' = 3, m'_F = 3\rangle$ -Übergang)	$I_{sat}$	1.67 mW/cm <sup>2</sup>
Photonen-Rückstoßenergie	$E_r = \hbar^2 k_L^2 / 2m$	$2.499 \times 10^{-30} \text{ J}$
Photonen-Rückstoßfrequenz	$\omega_r = E_r / \hbar$	$2\pi \times 3.771 \text{ kHz}$
Photonen-Rückstoßgeschwindigkeit	$v_r = \hbar k_L / m$	5.885 mm/s

**Tabelle 2** : Spektroskopische Daten der  $D_2$ -Linie von  $^{87}\text{Rb}$ . Die Sättigungsintensität  $I_{sat}$  ist für den betrachteten atomaren Übergang so definiert, daß sich ein Atom im Mittel 1/4 der Zeit im angeregten Zustand befindet, wenn der Übergang mit  $I = I_{sat}$  auf Resonanz (Verstimmung  $\Delta = 0$ ) getrieben wird.



# Literaturverzeichnis

- [ABD<sup>+</sup>01] F.Kh. Abdullaev, B.B. Baizakov, S.A. Darmanyan, V.V. Konotop, and M. Salerno. Nonlinear excitations in arrays of Bose-Einstein condensates. *Physical Review A*, 64(4):043606–1–10, September 2001.
- [AEM<sup>+</sup>95] M. Anderson, J. Ensher, M. Matthews, C. Wieman, and E. Cornell. Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor. *Science*, 269:198, 1995.
- [Agr95] G.P. Agrawal. *Nonlinear Fiber Optics*. Academic Press, San Diego, second edition, 1995.
- [AM01] N.J. Ashcroft and N.D. Mermin. *Festkörperphysik*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag, München, 2001.
- [AMH<sup>+</sup>99] J. Arlt, O. Maragò, S.A. Hopkins, G. Hechenblaikner, S. Webster, and C.J. Foot. Bose-Einstein condensation in a rotating anisotropic top trap. *Journal of Physics B*, 32:5861–69, 1999.
- [AR97] C.S. Adams and E. Riis. Laser cooling and trapping of neutral atoms. *Progress in Quantum Electronics*, 21:1, 1997.
- [Arl00] J. Arlt. *Experiments on Bose-Einstein Condensation*. PhD thesis, University of Oxford, 2000.
- [BBD<sup>+</sup>99] S. Burger, K. Bongs, S. Dettmer, W. Ertmer, and K. Sengstock. Dark solitons in Bose-Einstein condensates. *Physical Review Letters*, 83(25):5198, 1999.
- [BC80] R.K. Bullough and P.J. Caudrey, editors. *Solitons*. Springer Verlag, Berlin, 1980.
- [Bos24] S. Bose. Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese. *Z.Phys.*, 26(6):178, 1924.
- [Bro24] L. de Broglie. *Recherches sur la théorie des quanta*. PhD thesis, Faculté des Sciences de Paris, 1924.

- [BSC01] M.D. Barrett, J.A. Sauer, and M.S. Chapman. All-optical formation of an atomic Bose-Einstein condensate. *Physical Review Letters*, 87(1):101404:1–4, July 2001.
- [BSTH95] C.C. Bradley, C.A. Sackett, J.J. Tollet, and R.G. Hulet. Evidence of Bose-Einstein condensation in an atomic gas with attractive interactions. *Physical Review Letters*, 75:1687, 1995.
- [BTR<sup>+</sup>97] N.G.R. Broderick, D. Taverner, D.J. Richardson, M. Ibsen, and R.I. Laming. Optical pulse compression in fiber Bragg gratings. *Physical Review Letters*, 79(23):4566, 1997.
- [Cal91] J. Callaway. *Quantum Theory of the Solid State*. Academic Press, San Diego, second edition, 1991.
- [CEL02] I. Carusotto, D. Embriaco, and G.C. La Rocca. Nonlinear atom optics and bright-gap-soliton generation in finite optical lattices. *Physical Review A*, 65:053611, 2002.
- [CMJ<sup>+</sup>02] M. Cristiani, O. Morsch, Mueller J.H., D. Ciampini, and E. Arimondo. Experimental properties of Bose-Einstein condensates in 1d optical lattices: Bloch oscillations, landau-zener tunneling and mean-field effects. *cond-mat/0202053*, February 2002.
- [CPT00] M.L. Chiofalo, M. Polini, and M.P. Tosi. Collective excitations of a periodic Bose condensate in the Wannier representation. *Eur.Phys.J.D*, 11:371, 2000.
- [Dav28] C.J. Davisson. Are electrons waves? *Franklin Institute Journal*, 205:597, 1928.
- [DCC<sup>+</sup>01] E.A. Donley, N.R. Claussen, S.L. Cornish, J.L. Roberts, E.A. Cornell, and C.E. Wieman. Dynamics of collapsing and exploding Bose-Einstein condensates. *Journal of research of the National Institute of standards and Technology*, 412:295, 2001.
- [DCT89] J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji. Laser cooling below the Doppler limit by polarization gradients: simple theoretical models. *J. Opt. Soc. Am. B*, 6(11):2023–45, November 1989.
- [DGPS99] F. Dalfovo, S. Giorgini, L.P. Pitaevskii, and S. Stringari. Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases. *Rev. Mod. Phys.*, 71(3):463, 1999.
- [DJPS02] D. Diakonov, L.M. Jensen, C.J. Pethick, and H. Smith. Loop structure of the lowest Bloch band for a Bose-Einstein condensate. *Physical Review A*, 66:013604, 2002.

- [DMA<sup>+</sup>95] K. Davis, M.-O. Mewes, M. Andrews, N. van Druten, N. Durfee, D. Kurn, and W. Ketterle. Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms. *Physical Review Letters*, 75:3969, 1995.
- [DMP97] F. Dalfovo, C. Minniti, and L.P. Pitaevskii. Frequency shift and mode coupling in the nonlinear dynamics of a Bose-condensed gas. *Physical Review A*, 56(6):4855, 1997.
- [DPR<sup>+</sup>96] M.B. Dahan, E. Peik, J. Reichel, Y. Castin, and C. Salomon. Bloch oscillations of atoms in an optical potential. *Physical Review Letters*, 76(24):4508–11, June 1996.
- [DSF<sup>+</sup>00] J. Denschlag, J.E. Simsarian, D.L. Feder, C.W. Clark, L.A. Collins, J. Cubizolles, L. Deng, E.W. Hagley, K. Helmerson, W.P. Reinhardt, S.L. Rolston, B.I. Schneider, and Phillips W.D. Generating solitons by phase engineering of a Bose-Einstein condensate. *Science*, 287:97, 2000.
- [DSWW98] K. Dieckmann, R.J.C. Spreeuw, M. Weidemüller, and J.T.M Walraven. Two-dimensional magneto-optical trap as a source of slow atoms. *Physical Review A*, 58(5):3891–95, November 1998.
- [Ein24] A. Einstein. Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. *Sitzungsber.Preuss.Akad.Wiss.*, 1924:261, 1924.
- [Ein25] A. Einstein. Quantentheorie des einatomigen idealen Gases: Zweite Abhandlung. *Sitzungsber.Preuss.Akad.Wiss.*, 1925:3, 1925.
- [Ens98] J.R. Ensher. *The First Experiments with Bose-Einstein Condensation of <sup>87</sup>Rb*. PhD thesis, University of Colorado at Boulder, 1998.
- [ES96] B.J. Eggleton and R.E. Slusher. Bragg grating solitons. *Physical Review Letters*, 76(10):1627, 1996.
- [FBBS87] R.L. Fork, C.H. Brito Cruz, P.C. Becker, and C.V. Shank. Compression of optical pulses to six femtoseconds by using cubic phase compensation. *Opt. Lett.*, 12:483, 1987.
- [Fil00] A.T. Filippov, editor. *The Versatile Soliton*. Birkhäuser, Boston, 2000.
- [FMW<sup>+</sup>96] S.R. Friberg, S. Machida, M.J. Werner, A. Levanon, and T. Mukai. Observation of optical soliton photon-number squeezing. *Physical Review Letters*, 77(18):3775, 1996.

- [For01] K. Forberich. Aufbau einer Quelle für nichtlineare Atomoptik. Master's thesis, Universität Konstanz, 2001.
- [GME<sup>+</sup>02] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. Hänsch, and I. Bloch. Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms. *Nature*, 415:39–44, January 2002.
- [Gro61] E.P. Gross. Structure of a quantized vortex in boson systems. *Nuovo Cimento*, 20:454, 1961.
- [Gro63] E.P. Gross. Hydrodynamics of a superfluid condensate. *J. Math. Phys.*, 4:195, 1963.
- [Has90] A. Hasegawa. *Optical Solitons in Fibers*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1990.
- [HH89] P. Horowitz and W. Hill. *The Art of Electronics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1989.
- [Hil01] K.M. Hilligsøe. Bright atomic solitons in Bose-Einstein condensates. Master's thesis, University of Aarhus, Universität Konstanz, 2001.
- [IAS<sup>+</sup>98] S. Inouye, M.R. Andrews, J. Stenger, H.-J. Miesner, D.M. Stamper-Kurn, and W. Ketterle. Observation of Feshbach resonances in a Bose-Einstein condensate. *Nature*, 392:151, 1998.
- [JD96] P.S. Jessen and I.H. Deutsch. Optical lattices. *Adv. At. Mol. Opt. Phys.*, 37:95, 1996.
- [KDS99] W. Ketterle, D.S. Durfee, and D.M. Stamper-Kurn. Making, probing and understanding Bose-Einstein condensates. In M. Inguscio, S. Stringari, and C. Wieman, editors, *Bose-Einstein Condensation in Atomic Gases*, Amsterdam: IOS Press, 1999. Società Italiana di Fisica.
- [KSF<sup>+</sup>02] L. Khaykovich, F. Schreck, G. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles, L. Carr, Y. Castin, and C. Salomon. Formation of a matter-wave bright soliton. *Science*, 296:1290, 2002.
- [Kv96] W. Ketterle and N.J. van Druten. Evaporative cooling of trapped atoms. *Adv. At. Mol. Opt. Phys.*, 37:181, 1996.
- [Lam80] G.R. Lamb, Jr., editor. *Elements of Soliton Theory*. Wiley, New York, 1980.

- [LKC80] C. Lin, H. Kogelnik, and L.G. Cohen. Optical-pulse equalization of low-dispersion transmission in single-mode fibers in the 1.3 – 1.7 $\mu\text{m}$  spectral region. 5(11):476, 1980.
- [McL64] N.W. McLachlan. *Theory and Applications of Mathieu Functions*. Dover Publications, New York, 1964.
- [Mes90] A. Messiah, editor. *Quantenmechanik*, volume 2. de Gruyter, Berlin, third edition, 1990.
- [Mey01] P. Meystre. *Atom Optics*. Springer Verlag, New York, 2001.
- [MLH<sup>+</sup>92] L.F. Mollenauer, E. Lichtman, G.T. Harvey, M.J. Neubelt, and B.M. Nyman. *Electron. Lett.*, 28:792, 1992.
- [MMC<sup>+</sup>01] O. Morsch, J.H. Müller, M. Cristiani, D. Ciampini, and E. Arimondo. Bloch oscillations and mean-field effects of Bose-Einstein condensates in 1D optical lattices. *Physical Review Letters*, 87(14):140402,1–4, October 2001.
- [MSG80] L.F. Mollenauer, R.H. Stolen, and J.P. Gordon. Experimental observation of picosecond pulse narrowing and solitons in optical fibers. *Physical Review Letters*, 45:1095, 1980.
- [Mv99] H.J. Metcalf and P. van der Straten. *Laser Cooling and Trapping*. Springer Verlag, 1999, 1999.
- [MvLvdHS99] A.E. Muryshev, H.B. van Linden van den Heuvell, and G. V. Shlyapnikov. Stability of standing matter waves in a trap. *Physical Review A*, 60(4):R2665–R2668, October 1999.
- [Nat02] Nature insight: Ultracold matter. Reprinted from *Nature*, Vol. **416**, no. 6877, March 2002.
- [OTF<sup>+</sup>01] C. Orzel, A.K. Tuchmann, M.L. Fenselau, M. Yasuda, and M.A. Kasevich. Squeezed states in a Bose-Einstein condensate. *Science*, 291:2386–89, March 2001.
- [PAEC95] W. Petrich, M. Anderson, J. Ensher, and E. Cornell. Stable, tightly confining magnetic trap for evaporative cooling of neutral atoms. *Physical Review Letters*, 74(17):3352–55, April 1995.
- [PBB<sup>+</sup>97] E. Peik, M. Ben Dahan, I. Bouchoule, Y. Castin, and C. Salomon. Bloch oscillations of atoms, adiabatic rapid passage, and monokinetic atomic beams. *Physical Review A*, 55(4):2989, April 1997.

- [Pit61] L.P. Pitaevskii. Vortex lines in an imperfect Bose gas. *Sov. Phys. JETP*, 13:451, 1961.
- [Rem94] M. Remoissenet, editor. *Waves Called Solitons*. Springer Verlag, Berlin, 1994.
- [RPC<sup>+</sup>87] E.L. Raab, M. Prentiss, A. Cable, S. Chu, and D.E. Pritchard. Trapping of neutral sodium atoms with radiation pressure. *Physical Review Letters*, 59(23):2631–34, Dezember 1987.
- [RSN97] M. Raizen, C. Salomon, and Q. Niu. New light on quantum transport. *Physics Today*, 50(7):30, July 1997.
- [Rus44] J.S. Russel. Report on waves, 1844.
- [Sak94] J.J. Sakurai, editor. *Modern quantum mechanics*. Addison-Wesley, New York, revised edition, 1994.
- [SKMI<sup>+</sup>98] D.M. Stamper-Kurn, H.-J. Miesner, S. Inouye, M.R. Andrews, and W. Ketterle. Collisionless and hydrodynamic excitations of a Bose-Einstein condensate. *Physical Review Letters*, 81(3):500, 1998.
- [SPTH02] K.E. Strecker, G.B. Patridge, A.G. Truscott, and R.G. Hulet. Formation and propagation of matter-wave soliton trains. *Nature*, 417:150, 2002.
- [SS86] C.M. de Sterke and J.E. Sipe. Application of the split operator fourier transform method to the solution of the nonlinear Schrödinger equation. In *AIP Conference Proceedings*, volume 160, page 269, 1986.
- [SS94] C.M. de Sterke and J.E. Sipe. Gap solitons. In E. Wolf, editor, *Progress in Optics*, volume XXXIII, page 203, Amsterdam, 1994. North-Holland.
- [SSS96] C.M. de Sterke, D.G. Salinas, and J.E. Sipe. Coupled-mode theory for light propagation through deep nonlinear gratings. *Physical Review E*, 54(2):1969, August 1996.
- [ST91] B.E.A. Saleh and M.C. Teich. *Fundamentals of Photonics*. Wiley, New York, 1991.
- [ST97] E.G. Shapiro and S.K. Turitsyn. Enhanced power breathing soliton in communication systems with dispersion management. *Physical Review E*, 56(5):4951, 1997.

- [SZ98] M.J. Steel and W. Zhang. Bloch function description of a Bose-Einstein condensate in a finite optical lattice. *cond-mat/9810284*, 1998.
- [TS01] A. Trombettoni and A. Smerzi. Discrete solitons and breathers with dilute Bose-Einstein condensates. *Physical Review Letters*, 86(11):2353–56, March 2001.
- [WDN02] B. Wu, R.B. Diener, and Q. Niu. Bloch waves and Bloch bands of Bose-Einstein condensates in optical lattices. *Physical Review A*, 65:025601, 2002.
- [ZPMW99] O. Zobay, S. Pötting, P. Meystre, and E.M. Wright. Creation of gap solitons in Bose-Einstein condensates. *Physical Review A*, 59(1):643, 1999.



# Danksagung

Mein herzlicher Dank gilt allen, die mich bei dieser Arbeit unterstützt haben.

Ich danke Markus Oberthaler für die Aufnahme in seine Arbeitsgruppe und für die Möglichkeit, unter ausgezeichneten Bedingungen an einem spannenden Experiment zu arbeiten. Die hervorragende Betreuung, die vielen Diskussionen und seine Begeisterung für die Physik werden mir genauso in Erinnerung bleiben wie mancher Abend beim clubbing.

Herrn Prof. Maret danke ich für die Bereitschaft zur Übernahme der offiziellen Betreuung dieser Diplomarbeit.

Bernd Eiermann, Thomas Anker und Michael Albiez, den drei Doktoranden im Team der „Bernd-Eiermann Condensation“ (BEC), danke ich für die Betreuung, viele Diskussionen, gemeinsam durchwachte Labornächte und diverse außerphysikalische Aktivitäten. Ich habe viel gelernt und Spaß gehabt. Auf daß es noch viel kondensiert, propagiert, kickt und lokalisiert!

Anja Habenicht, Dirk Jürgens, Martin Störzer, Matthias Taglieber, Ralf Stützle und unserem Gast Edwin te Sligte danke ich für die immer gute Atmosphäre in der Arbeitsgruppe.

Karl-Peter Marzlin danke ich für hilfreiche Kommentare zu den numerischen Simulationen.

Ute Hentzen, Stefan Eggert und Stefan Hahn danke ich für die Hilfestellung bei organisatorischen, elektronischen und mechanischen Problemen aller Art.

Dem Forschungszentrum für den wissenschaftlichen Nachwuchs an der Universität Konstanz danke ich für die ideelle und materielle Unterstützung während meiner Diplomarbeit.

Ohne Elke Schlote, meine Freunde und meine Eltern wäre aus all dem nichts geworden. Deshalb danke ich ihnen ganz besonders.