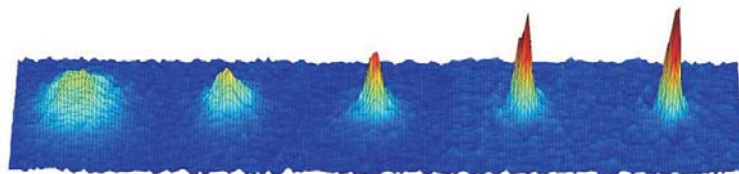


Kohärente nichtlineare Materiewellendynamik - Helle atomare Solitonen -



Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades des
Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

an der Universität Konstanz
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Sektion
Fachbereich Physik

vorgelegt von
Bernd Eiermann
Februar 2004

Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit war die Untersuchung der kohärenten Wellenpaketdynamik eines Bose-Einstein Kondensats (BEC) aus ^{87}Rb Atomen. Diese wird durch die lineare Dispersion, auf Grund der endlichen Impulsbreite der Materiewelle, und durch die nicht-lineare Wechselwirkung zwischen den Atomen durch s-Wellenstreuung bestimmt. Das besondere Interesse bestand dabei an der experimentellen Erzeugung heller atomarer Solitonen. Sie entstehen falls sich die Effekte der Dispersion und der Nichtlinearität kompensieren. Es bildet sich eine lokalisierte Materiewelle mit zeitunabhängiger Dichteverteilung aus. In einem BEC mit repulsiver Wechselwirkung, wie es für ^{87}Rb der Fall ist, erfordert dies eine anomale Dispersion des Ensembles. Die Dispersion der Wellenpakete kann sowohl in der Größe als auch im Vorzeichen geändert werden, indem man das BEC einem periodischen Potential kontrollierbarer Tiefe aussetzt und den Quasiimpuls gezielt verändert.

Es wurde zunächst eine Apparatur zur Erzeugung von Bose-Einstein Kondensaten aus ^{87}Rb Atomen, als Quelle kohärenter Materiewellen, errichtet und charakterisiert: Man fängt durch die Methode der Laserkühlung eine kalte atomare Wolke in einer magneto-optischen Falle, welche sich im Inneren einer Ultrahochvakuumkammer befindet. Nach dem Transfer in eine nicht dissipative Falle, erfolgt die notwendige weitere Kühlung des Ensembles durch selektive Entfernung hochenergetischer Teilchen. Der Phasenübergang zum Bose-Einstein Kondensat wurde sowohl in einer rein magnetischen Falle als auch in einer konservativen optischen Dipolfalle beobachtet. Die Atomzahl innerhalb des Kondensats kann durch Variation der experimentellen Parameter im Bereich zwischen 10^3 und 10^5 Teilchen eingestellt werden. Die Experimente zur Untersuchung der Materiewellendynamik wurden in einer zweidimensionalen optischen Dipolfalle durchgeführt. Diese kann die Atome gegen die Gravitation halten, erlaubt aber gleichzeitig die freie Propagation entlang der Strahlachse. Das periodische Potential zur Beeinflussung der Dispersion entsteht durch Interferenz zweier gegenläufiger Laserstrahlen, die der Dipolfalle räumlich überlagert sind. Durch diese Kombination wurde es erstmals möglich, die freie Dynamik von Materiewellen in optischen Gittern direkt im Ortsraum für „lange“ Zeiten zu beobachten.

In einer ersten Reihe von Experimenten wurde demonstriert, dass durch Variation des atomaren Quasiimpulses im periodischen Potential, die lineare Dispersion gezielt beeinflusst werden kann. Insbesondere erreicht man die, für helle atomare Solitonen notwendige, anomale Dispersion für Quasiimpulse im Bereich der Bandkante der Brillouinzone. Dieses Verhalten, das demjenigen eines Teilchens mit negativer effektiver Masse entspricht, konnte durch Umkehr der zeitlichen Entwicklung eines Wellenpakets auf eindruckliche Weise nachgewiesen werden.

Die besprochene Demonstration der negativen Masse eines Wellenpakets, war die wesentliche Voraussetzung zur Erzeugung atomarer Solitonen. Deren Entstehung konnte beobachtet werden, nachdem es gelungen ist, Bose-Einstein Kondensate mit einer Teilchenzahl im Bereich von 1000 Atomen zu präparieren. Es handelt sich dabei um die ersten Solitonen für repulsiv wechselwirkende Atome. Es wurde eine Reihe von systematischen Messungen durchgeführt, die das solitonische Verhalten der Wellenpakete bestätigten.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
Bose, Einstein und eine Vorhersage	1
Bose-Einstein Kondensation, na und?	2
Kohärente Materie in periodischen Potentialen	3
Gliederung dieser Arbeit	4
I Erzeugung eines Bose-Einstein Kondensats aus ^{87}Rb Atomen	5
1 Experimenteller Aufbau	9
1.1 Das Vakuumsystem und die Rubidiumquelle	11
1.1.1 Die Vakuumkammer	11
1.1.2 Die Dispenser - Quellen atomaren Rubidiums	13
1.2 Laserkühlung - Kühlen und Fangen der Atome	13
1.2.1 Das Prinzip der Laserkühlung	13
1.2.2 Das Lasersystem	14
1.2.3 Funnel und 3d-MOT	16
1.3 Die magnetische TOP-Falle	18
1.4 Optische Dipolpotentiale	21
1.4.1 Wellenleiter und Haltestrahl	22
1.4.2 Das eindimensionale optische Gitter	23
1.4.3 Aufbau um die Glaszelle	25
1.5 Absorptionsabbildung von kalten Atomen	25
1.6 Steuerung des Experiments	34
1.7 Diskussion des Aufbaus	34
2 Erzeugung und Nachweis eines BEC	37
2.1 Experimenteller Ablauf	37
2.1.1 Laden der MOT durch den kalten Atomstrahl	38
2.1.2 Kompression	38
2.1.3 Optische Melasse	39
2.1.4 Optisches Pumpen	39
2.1.5 Einschalten der Magnetfalle	40
2.1.6 Verdampfungskühlung in der TOP-Falle	41
2.2 Signaturen der Bose-Einstein Kondensation	43
2.2.1 Plötzlicher Anstieg der optischen Dichte	44

2.2.2	Bimodale Geschwindigkeitsverteilung	45
2.2.3	Anisotrope Expansion	46
2.3	Kondensation in der Dipolfalle	46
2.4	Charakterisierung der Fallenfrequenzen	51
II Dynamik kohärenter Materiewellen in periodischen Potentialen		55
3	Theorie	57
3.1	Bose-Einstein Kondensation	57
3.1.1	Grundlegendes zur Kondensation	57
3.1.2	Die Dynamik kohärenter Wellenpakete	60
3.1.3	Der Grundzustand eines BEC in einer harmonischen Falle	63
3.2	Beeinflussung der Dynamik	67
3.2.1	Dispersion freier Teilchen	67
3.2.2	Modifikation der Dispersionsrelation	68
3.2.3	Stationäre Lösungen im periodischen Potential	69
3.2.4	Eine vereinfachte Bewegungsgleichung zur Beschreibung der Dynamik	70
3.2.5	Lineare Dynamik im periodischen Potential	72
3.2.6	Präparation der Wellenpakete im Quasiimpulsraum	74
3.3	Nichtlineare Dynamik kohärenter Wellenpakete	76
3.3.1	Analogie zur nichtlinearen Optik	76
3.3.2	Dunkle Solitonen	77
3.3.3	Helle Solitonen	78
3.4	Numerische Lösungen	80
3.4.1	Die Split-Step Fouriemethode	80
3.4.2	Grundzustandsberechnung - Propagation in imaginärer Zeit	81
4	Kohärente Wellenpaketdynamik	83
4.1	Messungen zur Charakterisierung des Aufbaus	83
4.1.1	Bestimmung des Winkels zwischen der Dipolfalle und der Fokalebene der Abbildung	83
4.1.2	Eichung der Potentialtiefe des periodischen Potentials	84
4.1.3	Konsistenzprüfung und Messung der Impulsbreite	87
4.2	Dispersionsmanagement	89
4.2.1	Publikation: „Dispersion Management for atomic matter waves“	90
4.2.2	Kontinuierliches Dispersionsmanagement	95
4.3	Atomare Gap-Solitonen	96
4.3.1	Übergang ins Regime der Eindimensionalität	98
4.3.2	Beobachtung des Gap-Solitons	99
5	Resümee und Ausblick	111
5.1	Resümee	111
5.2	Ausblick	113
Literaturverzeichnis		I

Einleitung

Bose, Einstein und eine Vorhersage

Auf einer Idee Satyendra Nath Boses [1] aufbauend, sagte Albert Einstein schon 1925 einen Phasenübergang für ein aus ununterscheidbaren Teilchen bestehendes ideales Gas voraus. Dieser Übergang ist heute als Bose-Einstein Kondensation (BEC) von Teilchen mit ganzzahligem Spin bekannt [2]. Die Grundaussage seiner Arbeit bestand in der „Behauptung“, dass die Atome eines homogenen Gases den Grundzustand ihres Systems makroskopisch besetzen können, selbst wenn die thermische Energie des Ensembles den Abstand der möglichen Energieniveaus bei weitem übersteigt. Dies ist der Fall, wenn der mittlere Abstand der Atome in den Bereich der thermischen de Broglie Wellenlänge λ_{dB} [3] gelangt, bzw. wenn die Phasenraumdichte Ω den kritischen Wert

$$\Omega := \rho \lambda_{dB}^3 = \rho \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T} \right)^{3/2} > 2.612 \quad (1)$$

übersteigt. Hierbei bezeichnen m die Masse der Atome, T die Temperatur, ρ die Dichte und k_B die Boltzmann-Konstante. Es handelt sich dabei um einen rein quantenstatistischen Effekt, d.h. es sind keine anziehenden Kräfte zwischen den Atomen notwendig. Es war damals schon bekannt, dass mit zunehmender Atom-Atom-Wechselwirkung die Kondensation des Bosegases immer mehr „verschleiert“ wird. Erwin Schrödinger zweifelte daran, dass eine eindeutige experimentelle Bestätigung dieses Effekts jemals möglich sein würde [4]:

„Um eine signifikante Abweichung [vom klassischen Verhalten] aufzuweisen, benötigt man so hohe Dichten und so kleine Temperaturen, dass die van-der-Waals-Korrekturen und die Effekte einer möglichen Entartung von der gleichen Größenordnung sein werden, und es besteht wenig Aussicht dafür, dass die beiden Arten von Effekten sich jemals trennen lassen.“

Er sollte Unrecht behalten: Man kann zeigen, dass die Atom-Atom-Wechselwirkung den Kondensationsprozess nicht wesentlich verändert, solange die Dichte des Ensembles limitiert bleibt [5]:

$$na^3 \ll 1. \quad (2)$$

Man spricht bei der Erfüllung dieser Bedingung von einem schwach wechselwirkenden oder verdünnten Gas. Die Größe a stellt die Streulänge für s-Wellenstreuung dar, welche die Wechselwirkung zwischen den Atomen für genügend kleine Temperaturen vollständig charakterisiert¹. Durch diese Dichtelimitierung bleibt nach Gl. 1 nur die Möglichkeit,

¹Bei allen gegenwärtigen BEC-Experimenten ist die Temperatur so niedrig, dass die Streuung höherer Partialwellen eingefroren ist.

das Gas unter eine kritische Temperatur, welche in der Größenordnung von $1\mu K$ liegt, abzukühlen. Es dauerte 70 Jahre, bis es 1995 schließlich mehreren Gruppen in den USA gelang, die Schwierigkeiten zu überwinden, die das Abkühlen eines Gases auf solch tiefe Temperaturen verhindert hatten [6, 7, 8].

Bose-Einstein Kondensation, na und?

Wäre es allein um die Bestätigung einer 70 Jahre alten „Theorie“ und die Überwindung technischer Schwierigkeiten gegangen, so hätte die Nachricht von der ersten Erzeugung eines Bose-Einstein Kondensats 1995 wohl nicht weltweites Aufsehen und einen „Boom“ in der Physik ultrakalter Atome ausgelöst. Es waren die besonderen Eigenschaften dieses neuen Materiezustands, die die Phantasie der Forscher beflügelten:

- Da sich alle Atome im selben Zustand befinden, sind die Orts- und Impulsunschärfe des Ensembles nur durch das Heisenberglimit begrenzt, man hat die „ultimative“ Kontrolle über Position und Bewegung der Atome [9].
- Bose-Einstein Kondensate sind interferenzfähig, sie sind Quellen **kohärenter** atomarer Materiewellen. Oft vergleicht man den Übergang von der thermischen Wolke zum Kondensat mit dem Unterschied zwischen thermischem Licht und Laserlicht.
- zur Faszination dieses Gebiets trägt sicherlich auch die Tatsache bei, dass die Größe des BEC für typische experimentelle Situationen im Bereich von $\sim 1 - 500 \mu m$ liegt. Die Wellenfunktion besitzt eine makroskopische Ausdehnung, sie wird damit von einer unanschaulichen Rechengröße zu einem beobachtbaren „Objekt“.
- Im Gegensatz zu den Quantenflüssigkeiten 3He und 4He ist die Wechselwirkung zwischen den Atomen eines verdünnten Gases so schwach, dass die Statik und Dynamik der Kondensate durch eine „einfache“ Gleichung beschrieben wird, die einen Vergleich zwischen Experiment und Theorie ermöglicht.

Den Aufschwung, den dieses Gebiet seit Anfang der 90er Jahre des letzten Jahrhunderts genommen hat, wird eindrucksvoll durch die Anzahl der Veröffentlichungen, die zum Thema Bose-Einstein Kondensation erschienen sind, belegt. Sie stieg von etwa 20 pro Jahr auf einige Veröffentlichungen **pro Tag!** Einen umfassenden geschichtlichen Überblick über die Entwicklung der Physik kalter Atome zwischen 1924 und 1995 gibt ein Buch von Griffin et al. [10], während die moderne Theorie dazu von Dalfovo und Giorgini [5], sowie Pitaevskii und Stringari [11] behandelt wird. Eine Zusammenfassung experimenteller Techniken und Arbeiten ist in den Übersichtsartikeln von Ketterle [9] bzw. Cornell [12], sowie einem Buch von Pethick und Smith [13] zu lesen.

Von der Vielzahl an Experimenten, die mittlerweile durchgeführt wurden, seien hier stellvertretend nur einige wenige genannt, die direkt mit den oben genannten Eigenschaften der Kondensate in Beziehung stehen. Die ersten Arbeiten mit entarteten Alkaligasen konzentrierten sich auf die makroskopischen Eigenschaften des BEC [14, 15, 16, 17], bevor in einer Reihe von eindrucksvollen Experimenten auch die Interferenzfähigkeit der Kondensate demonstriert wurde [18, 19]. Schließlich gelang die Realisierung so genannter „Atomlaser“ [20, 21, 22]. Bei diesen Experimenten werden aus dem Reservoir BEC, gepulst oder kontinuierlich, kohärente Materiewellen ausgekoppelt. Sie stellen das Analogon zum optischen Laser dar.

Blättert man an dieser Stelle auf das Deckblatt der Arbeit zurück, so sind zumindest zwei der ersten drei Worte des Titels erklärt. Die Arbeit mit Bosekondensierten Atomen bedeutet die Beobachtung kohärenter Materiewellen. Zur Reichhaltigkeit dieses Gebiets hat zudem beigetragen, dass die schon angesprochene Wechselwirkung zwischen den Atomen zu Effekten führt, die im idealen Gas nicht beobachtbar wären. Ein Zitat von Eric Cornell, in dessen Gruppe das erste BEC erzeugt wurde, drückt diesen Umstand noch deutlicher aus [12]:

„The overall picture [of BEC theory in an ideal gas] is sufficiently easy to understand that, if the system truly were an ideal gas, there would be little left to study at this point.“

Unter Berücksichtigung der Atom-Atom-Wechselwirkung hingegen wird die Bewegungsgleichung für ein Kondensat am absoluten Temperaturnullpunkt zu einer **nichtlinearen** Schrödingergleichung. Reduziert auf eine Dimension entspricht diese der aus der nichtlinearen Optik bekannten Gleichung für die Ausbreitung von Laserpulsen in Glasfasern. Von dieser ist bekannt, dass sie eine spezielle Klasse von Lösungen, so genannte **Solitonen**, unterstützt. Solitonen entsprechen lokalisierten, nicht zerfließenden Wellenpaketen, die in mindestens einer Dimension frei propagieren können. Sie wurden erstmals 1834 von John Scott Russell [23] in einem Kanal beobachtet und sind seitdem in vielen Gebieten der Physik (z.B. Tsunamis nach Seebeben, Teilchenphysik) und Biologie (Reizleitung in Nervenfasern) untersucht worden. Ziel dieser Arbeit war die Erzeugung des atomoptischen Äquivalents, heller atomarer Solitonen, die entlang eines eindimensionalen optischen Wellenleiters frei propagieren können.

Kohärente Materie in periodischen Potentialen

Helle atomare Solitonen entstehen, falls sich die Effekte der (linearen) Dispersion, der räumlichen Verbreiterung der Materiewelle auf Grund seiner endlichen Impulsbreite, und der (nichtlinearen) Wechselwirkung kompensieren. Dazu müssen jedoch die Vorzeichen der beide Terme die richtige Kombination aufweisen. In „normaler“ Materie ist dies nur möglich falls die Wechselwirkung zwischen den Atomen anziehend, entsprechend einer negativen Streulänge a , ist. Allerdings sind in diesem Fall nur Kondensate mit kleiner Atomzahl (maximal einige Tausend Atome) stabil, darüber hinaus kollabiert das System; eine Einschränkung der Vielseitigkeit der Apparatur, die man ungern in Kauf nimmt. Benutzt man stattdessen repulsiv wechselwirkende Atome, so sind im Prinzip beliebig große BECs möglich. Man muss dann jedoch das Vorzeichen der Dispersion invertieren. Diese Forderung impliziert, dass sich Atome nach Zufuhr von Energie langsamer bewegen müssen! Eine solche Situation, so ungewöhnlich sie zunächst erscheint, ist wohlbekannt aus dem Verhalten von Elektronen im periodischen Potential der Atomrümpfe eines geordneten Festkörpers. Am Rand der Brillouinzone ist die Dispersionsrelation gegenüber freien Teilchen derart geändert, dass die Atome die gewünschte „anomale“ Dispersion zeigen. Man kann ihnen eine negative effektive Masse zuordnen.

In atomaren Systemen wird die periodische Modulation der Energie durch das konservative optische Potential einer nicht resonanten stehenden Welle zweier gegenläufiger Laserstrahlen erzeugt. Im Gegensatz zu Systemen aus der Festkörperphysik können sowohl die Stärke des Potentials, als auch der Quasiimpuls des Ensembles experimentell

genau eingestellt und die Materiewellen direkt im Ortsraum beobachtet werden. Dadurch wurde die Untersuchung von bekannten Effekten wie Blochoszillationen [19] oder Landau-Zener Tunneln [24] mit bisher nicht gekannter Präzision möglich. Die Möglichkeiten, die das atomoptische System bietet, sind so vielseitig, dass sich daraus mittlerweile ein eigenes Forschungsgebiet entwickelt hat. In dieser Arbeit wird neben der Beobachtung von Solitonen das Studium der geänderten Dispersion in diesen optischen Gittern im Vordergrund stehen.

Um das Wechselspiel zwischen Dispersion und Nichtlinearität beobachten zu können, müssen beide Effekte von gleicher Größenordnung sein. Im Gegensatz zur Optik, in der nichtlineare Effekte erst untersucht werden konnten, nachdem ultrakurze Laserpulse hoher Intensität verfügbar waren, ist die Wechselwirkung in Bose-Einstein Kondensaten so stark, dass der Einfluss der Nichtlinearität die Dynamik in (fast) allen Experimenten dominiert². Dieser Umstand führt dazu, dass in der vorliegenden Arbeit der Erzeugung von bosekondensierten Ensembles mit möglichst wenigen Atomen (d.h. geringer Wechselwirkung) eine besondere Bedeutung zukommt.

Gliederung dieser Arbeit

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in zwei Teile. Der erste Teil befasst sich mit der experimentellen Realisierung eines Bose-Einstein Kondensats aus ⁸⁷Rubidium Atomen. Es konnte dabei nicht auf Vorarbeiten aufgebaut werden. Der Aufbau begann mit der Umwandlung eines leeren Büros in ein Labor. In Kapitel 1 werden zunächst der experimentelle Aufbau und die grundlegenden Mechanismen der Physik ultrakalter Atome diskutiert. Der Ablauf des Kondensationsprozesses und der Nachweis des Phasenübergangs werden im darauf folgenden Kapitel 2 beschrieben. Für das Verständnis dieser beiden Kapitel wird die Theorie der Bose-Einstein Kondensation nicht benötigt. Es genügt zu wissen, dass der Phasenübergang einsetzt, wenn die Phasenraumdichte den kritischen Wert nach Gleichung 1 überschreitet.

Der zweite Teil befasst sich mit der Theorie und den experimentellen Ergebnissen zur Dynamik kohärenter Materiewellen in periodischen Potentialen. In Kapitel 3 werden die theoretischen Grundlagen diskutiert, die für das Verständnis der experimentellen Ergebnisse notwendig sind. Nach einer Einführung in die BEC-Theorie konzentriert sich dieses Kapitel auf die Bewegungsgleichung eines Kondensats in optischen Gittern, sowie auf die Theorie atomarer Solitonen. Die Diskussion der durchgeführten Experimente erfolgt in Kapitel 4. Die Hauptschwerpunkte liegen dabei auf Untersuchungen zur Änderung der Dispersion in periodischen Potentialen, sowie zur Erzeugung heller Solitonen am Rand der Brillouinzone, so genannter Gap-Solitonen. Die Arbeit schließt in Kapitel 5 mit einem Resümee und einem Ausblick auf Experimente, die mit der bestehenden Apparatur möglich sind.

²Diese Aussage steht nicht im Widerspruch zum 4. Punkt der Aufzählung aus dem vorangegangenen Abschnitt, wie in Kapitel 3 erläutert wird.

Teil I

Erzeugung eines Bose-Einstein Kondensats aus ^{87}Rb Atomen

Kurzer historischer Überblick

Auf der Suche nach Möglichkeiten entartete Bose-Gase herzustellen dachte man zunächst an die Kühlung von spinpolarisiertem atomarem Wasserstoff in Kryostaten. Zum einen führt die geringe Masse des Wasserstoffs zu einer vergleichsweise „hohen“ Übergangstemperatur und zum anderen war es das einzige System, das Berechnungen zufolge im thermodynamischen Gleichgewicht bis zum absoluten Nullpunkt gasförmig bleiben sollte [25]. Mit der erfolgreichen Demonstration der Laserkühlung [26, 27], welche für Wasserstoff nicht möglich ist, und des erstmaligen Fangens neutraler Atome in einer magneto-optischen Falle [28] rückten dann aber zunehmend die Alkaliatome in den Mittelpunkt des Interesses. Es wurde mit vergleichsweise wenig Aufwand möglich, Atome in den Bereich von einigen Millionstel Kelvin abzukühlen. Die Dichten und Temperaturen, die mit lasergekühlten Atomen erreicht werden können, reichen jedoch noch nicht aus, um den Phasenübergang zur Bose-Einstein Kondensation zu erreichen. Eine zweite Technik zur weiteren Kühlung der Atome ist dazu notwendig. Es war dies die Methode der Verdampfungskühlung in rein magnetischen Fallen [29], die zunächst an kryogen vorgekühltem Wasserstoff demonstriert wurde [30]. Die Verdampfungskühlung beruht auf der selektiven Entfernung hochenergetischer Teilchen aus dem atomaren Ensemble. Die restlichen Atome thermalisieren daraufhin durch elastische Stöße bei einer tieferen Temperatur. Es werden dabei neue energiereiche Teilchen erzeugt, die wiederum entfernt werden können. Dadurch kann dem Ensemble genügend Energie bei akzeptablem Teilchenzahlverlust entzogen werden. Diese Kombination aus Laserkühlung und Verdampfungskühlung führte 1995 zur erfolgreichen Kondensation der Alkalimetalle Rubidium, Natrium und Lithium.

Die Elemente der Alkalireihe wurden zu den „Arbeitspferden“ der Physik ultrakalter Atome, da sie neben ihrer Eignung zur Laserkühlung weitere Eigenschaften besitzen, die vorteilhaft gegenüber spinpolarisiertem Wasserstoff sind. Es stellte sich heraus, dass weder die Übergangstemperatur noch die Frage nach der thermodynamischen Stabilität des kondensierten Zustands des betreffenden Elements eine entscheidende Rolle spielen. Zum einen kann die Verdampfungskühlung so gezielt eingesetzt werden, dass Temperaturen weit unterhalb des kritischen Werts erreicht werden können³ und zum anderen ist neben den Alkalimetallen auch Wasserstoff auf Grund von dipolarer Relaxation bei $T = 0$ „nur“ metastabil. Ein verdünntes kondensiertes Gas kann deshalb nie thermodynamisch stabil sein, der Grundzustand ist mit Ausnahme von flüssigem Helium immer ein kristalliner Festkörper. Allerdings ist die Zeitskala, auf der das System in den Gleichgewichtszustand übergeht i.A. sehr lang im Vergleich zur Dauer typischer Experimente. Entscheidend für die Beobachtung des BEC-Phasenübergangs waren zwei andere Parameter. Die Wechselwirkung zwischen den Atomen sollte abstoßend sein, nur dann kann eine größere Anzahl von Atomen in einem Kondensat metastabil sein. Für eine effektive Verdampfungskühlung war es zudem wichtig, dass das Verhältnis zwischen „guten“ (thermalisierenden) und „schlechten“⁴ Stößen möglichst groß ist.

Zu Beginn der Arbeiten waren diese Parameter unbekannt, wodurch die Wahl des richtigen Elements auch ein bisschen zur Glückssache wurde. Das richtige „Gespür“ hatten die Gruppe um Eric Cornell und Carl Wieman am NIST in Boulder/Colorado [6], sie wählten Rubidium, und diejenige um Wolfgang Ketterle am MIT in Boston/Massa-

³Die Schwierigkeit liegt eher in der zuverlässigen Messung dieser tiefen Temperaturen.

⁴Darunter fasst man alle Mechanismen zusammen, die zu einer ungewollten Entfernung von Teilchen aus der Falle oder zum Aufheizen des Ensembles führen.

chussets [7], deren Wahl auf Natrium fiel. Beide Elemente erfüllten die oben genannten Anforderungen. In der Gruppe um Randall Hulet in Houston/Texas wurden ebenfalls noch 1995 erste Anzeichen der Kondensation von wenigen Tausend Lithiumatomen [8, 31] beobachtet, der zwingende Beweis dafür erfolgte jedoch erst ein gutes Jahr später [32]. Es waren die ersten Kondensate eines Elements mit negativer Streulänge. Die Leistungen, die von Cornell, Wieman und Ketterle im Zusammenhang mit Experimenten zur Bose-Einstein Kondensation erbracht wurden, sind im Jahre 2001 durch die Verleihung des Nobelpreises gewürdigt worden.

Schließlich gelang 1998 auch die Kondensation von spinpolarisiertem Wasserstoff. Zunächst erreichte die Gruppe um Simo Jaakkola in Turku/Finnland ein zweidimensionales Quasikondensat auf einer Heliumoberfläche [33]. Wenig später wurde die Erzeugung eines 3d-Kondensats im Labor von Thomas Greytak und Daniel Kleppner in Harvard [34] bekannt. Diese sind zudem die bislang einzigen Experimente in denen die Atome in einem Kryostaten und nicht durch Laserlicht vorgekühlt werden. Im Laufe der letzten Jahre hat sich die Zahl der kondensierbaren Elemente auf metastabiles Helium [35, 36], Kalium [37], Cäsium [38] und Ytterbium [39] erweitert, Chrom könnte möglicherweise bald hinzu kommen [40]. Zudem ist es mittlerweile gelungen, reine Quantengase aus Cäsium-, Rubidium- und Natriummolekülen herzustellen [41, 42, 43]. Mit der Erzeugung kondensierter Gase aus Molekülen fermionischen Lithiums bzw. Kaliums [44, 45, 46] ist nun auch die Beobachtung des BCS-Übergangs [47] eines entarteten Fermigases [48] in greifbare Nähe gerückt.

Von den erwähnten Elementen hat sich mittlerweile das Isotop ^{87}Rb zur „beliebtesten“ Spezies entwickelt. Es erfüllt alle physikalisch notwendigen Eigenschaften: es ist bosonisch, paramagnetisch, besitzt eine positive Streulänge und zeigt ein hohes Verhältnis von guten zu schlechten Stößen. Darüberhinaus erleichtert der „hohe“ Dampfdruck ($5 \cdot 10^{-6}$ mbar bei 20°C) die Erzeugung eines atomaren Hintergrundgases im gewünschten Druckbereich bei Raumtemperatur. Schließlich besitzt Rubidium einen für die Laserkühlung geeigneten geschlossenen Übergang bei einer Wellenlänge (780 nm), für die Lasersysteme mit genügend Leistung kommerziell erhältlich sind. Etwa 35 von insgesamt 45 Bose-Einstein Kondensaten weltweit bestehen aus diesem Isotop. Eines davon ist Gegenstand dieser Arbeit. Es wurde zunächst in Konstanz erzeugt, die Apparatur ist mittlerweile in Heidelberg neu aufgebaut worden.

Der erste Teil dieser Arbeit beschreibt die Herstellung eines entarteten ^{87}Rb Bosegases. Dazu werden in Kapitel 1 zunächst der experimentelle Aufbau und die grundlegenden Mechanismen der Physik ultrakalter Atome diskutiert. Der Ablauf des Kondensationsprozesses und der Nachweis des Phasenübergangs werden im darauf folgenden Kapitel 2 beschrieben.

Kapitel 1

Experimenteller Aufbau - Physik ultrakalter Atome

Der experimentelle Aufbau der Apparatur zur Erzeugung eines BEC ist auch Bestandteil von zwei Diplomarbeiten. In der Arbeit von Karen Forberich [49] ist der detaillierte Aufbau bis zur erfolgreichen Demonstration der Laserkühlung und zum Fangen der Atome in einer magneto-optischen Falle beschrieben. Die Arbeit von Philipp Treutlein [50] konzentriert sich dagegen auf die Verdampfungskühlung und die Kondensation in einer magnetischen TOP-Falle. Im Folgenden wird ein zusammenfassender, auf physikalische Aspekte konzentrierter Überblick gegeben.

Überblick über den Gesamtaufbau

Der experimentelle Ablauf zur Erzeugung eines Bose-Einstein Kondensats lässt sich wie folgt kurz zusammenfassen. Die Rb-Atome werden aus einer Quelle bei einer Temperatur von $T \simeq 700$ K freigesetzt und in einer ersten Stufe der Laserkühlung zu einem kalten Atomstrahl abgebremst ($T \simeq 1$ K). Dieser kalte Strahl wird wiederum durch Laserlicht in einer magneto-optischen Falle (MOT) gefangen und gekühlt ($T \simeq 150$ μ K). Nach Transfer in eine rein magnetische Falle wird das Ensemble durch Verdampfungskühlung zur Kondensation gebracht ($T < 200$ nK) und optisch durch Absorptionsabbildung nachgewiesen. Auf diese Weise wurde im Dezember 2001 das erste Kondensat erzeugt. Um die Experimente zur Untersuchung der Dynamik kohärenter Wellenpakete durchführen zu können, wurde der genannte Ablauf modifiziert. Nach Vorkühlung der Wolke in der Magnetfalle wurde das Ensemble in eine rein optische Falle, bestehend aus zwei gekreuzten fokussierten Laserstrahlen, transferiert und dort kondensiert.

Bevor auf die einzelnen Komponenten näher eingegangen wird, soll zur Orientierung ein Überblick über den Gesamtaufbau auf dem optischen Tisch gegeben werden. Dieser ist schematisch in Abb. 1.1 dargestellt. Grundlage eines jeden Experiments mit kalten Atomen sind demnach eine Vakuumapparatur zur thermischen Isolation der untersuchten Spezies (unterer abgedunkelter Bereich), und ein Lasersystem zur Manipulation der Atome (in der oberen Hälfte). Die Laser erzeugen das Licht für die Laserkühlung und zum Nachweis der Atome (Ti:Saphir, Nd:YAG I und Rückpump laser), für die optischen Dipolfallen (Nd:YAG II), und für das periodische Potential (wahlweise Ti:Saphir oder Diodenlaser). Ihr Licht wird durch akusto-optische Modulatoren (AOM's) auf die gewünschte Frequenz verschoben und auf die erforderliche Leistung eingestellt. Mecha-

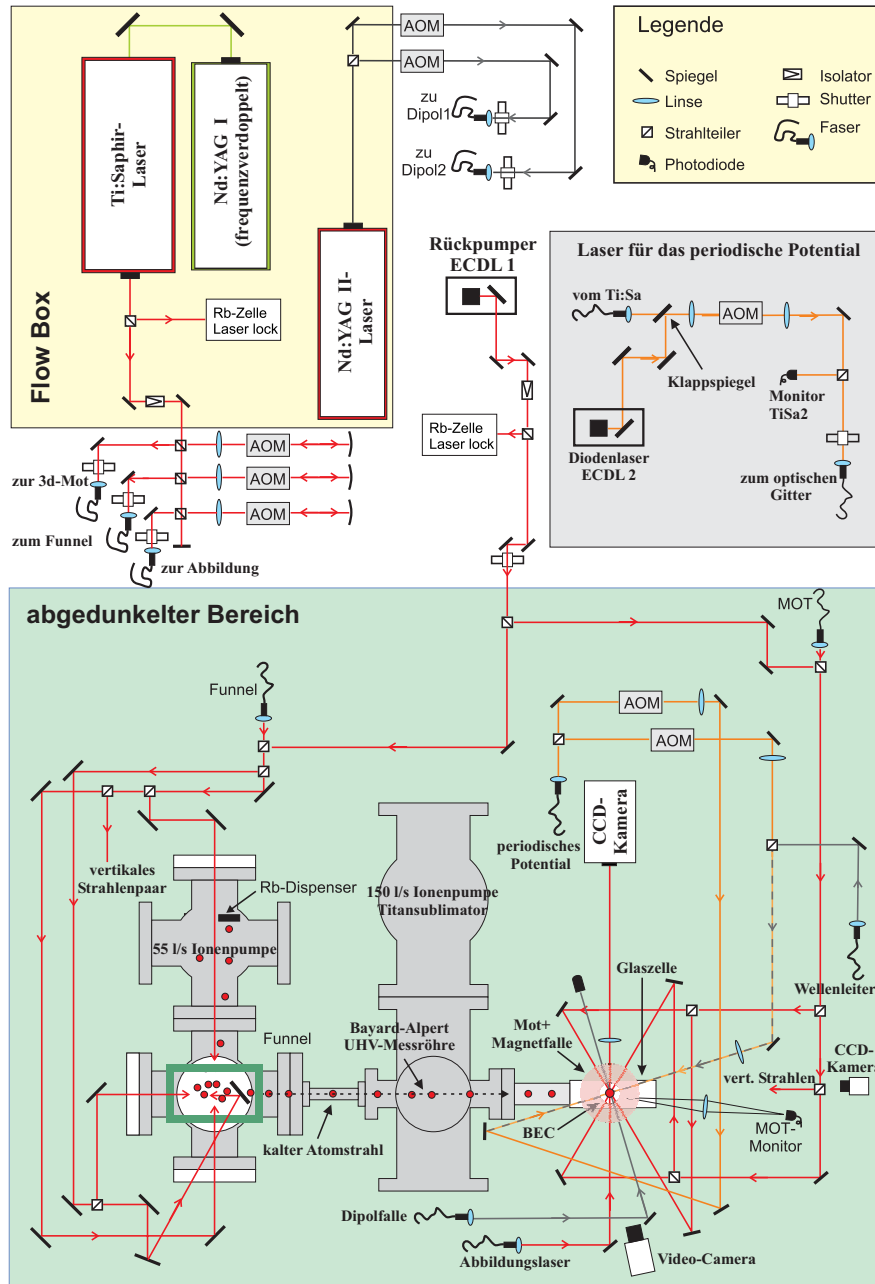


Abbildung 1.1: Schematischer Gesamtaufbau auf dem optischen Tisch: Im oberen Bereich befindet sich das Lasersystem, das jegliches Licht zur Manipulation der Atome erzeugt. Im unteren Teil ist die zweigeteilte Vakuumkammer zu sehen. Diese befindet sich zur Isolation von Restlicht in einem abgedunkelten Bereich. Im „linken“ Teil der Kammer wird durch Laserkühlung ein Strahl kalter Atome erzeugt, welcher im „rechten“ Teil in einer dreidimensionalen magneto-optischen Falle eingefangen wird. Das Kondensat wird in der Magnetfalle, die die Glazelle im rechten Teil des Vakuums umgibt, erzeugt. Ihr sind die Dipolfallen und das periodische Potential überlagert, in denen die Experimente zur Dynamik kohärenter Wellenpakete durchgeführt wurden.

nische Verschlüsse (Shutter) verhindern, dass resonantes oder nahresonantes Licht vom Lasersystem während der „dunklen“ Verdampfungskühlungsphase in die Kammer gelangt und dort zu einem Aufheizen der Atome führt. Aus demselben Grund ist die gesamte Kammer in einem abgedunkelten Bereich untergebracht, der jegliches Raumlicht von den kalten Atomen fernhält. Im linken Teil der Kammer wird der kalte Atomstrahl erzeugt, im rechten Teil befinden sich sowohl die magneto-optische Falle als auch die Magnetfalle, in welcher die Kondensation der Atome stattfindet. Die dazu notwendigen Magnetfeldspulen befinden sich außerhalb des Vakuums, sie umschließen die Glaszelle, die den erforderlichen optischen Zugang erlaubt. Die Experimente wurden im optischen Wellenleiter (grau gezeichnet), in dem das Kondensat in einer Richtung frei expandieren kann, durchgeführt. Diesem ist das periodische Potential (orange) zur Beeinflussung der Dynamik der Atome überlagert. Der resonante Abbildungslaserstrahl wird vom Kondensat teilweise absorbiert und auf eine empfindliche CCD-Kamera abgebildet. Aus diesen Bildern werden alle Informationen über das Ensemble gewonnen. Dieser Teil des Aufbaus ist nochmals vergrößert in Abb. 1.8 dargestellt und wird dort diskutiert. Zur besseren Übersicht sind viele Details der verwendeten Optik, Elektronik und Mechanik in dieser schematischen Abbildung nicht eingezeichnet. Die einzelnen Komponenten des Aufbaus werden in den folgenden Abschnitten beschrieben.

1.1 Das Vakuumsystem und die Rubidiumquelle

1.1.1 Die Vakuumkammer

Zur thermischen Isolation der gekühlten atomaren Wolke von der „heißen“ Umgebung wird ein möglichst gutes Vakuum benötigt. Man strebt einen Druck von weniger als 10^{-11} mbar an, damit Stöße mit dem verbleibenden Hintergrundgas den Kondensationsprozess nicht beeinträchtigen. Andererseits ist die Rate mit der man zu Anfang des Experiments die Atome kühlt und einfängt proportional zu deren Partialdruck. Dieser sollte daher nicht unter 10^{-9} mbar liegen. Man erfüllt die gegensätzlichen Anforderungen, indem man die Vakuumkammer in zwei Teile unterteilt: in einem wird durch einen so genannten atomaren Funnel (engl. für Trichter) bei relativ hohem Druck ($\sim 10^{-9}$ mbar) ein Strahl kalter Atome, mit hohem Fluss ($\sim 10^7$ Atome/s) erzeugt. Dieser Strahl wird im zweiten Teil der Kammer in einer dreidimensionalen magneto-optischen Falle (3d-MOT) wieder eingefangen. Dementsprechend werden die beiden Teile im Folgenden Funnel- bzw. Motkammer genannt. Verbunden sind sie durch eine differentielle Pumpstufe, die die gewünschte Druckdifferenz aufrechterhält. Auf diese wird genauer in Abschnitt 1.2.3 eingegangen.

Ein schematischer Überblick ist in Abb. 1.2 dargestellt. Die magneto-optisch gefangenen Atome und später das Bose-Einstein Kondensat befinden sich im Inneren einer quaderförmigen Glaszelle mit optischem Zugang aus fünf Raumrichtungen¹. Als Pumpen dienen zwei Ionengetterpumpen² mit Pumpleistungen von 55 l/s (Funnelkammer) bzw 150 l/s (Motkammer). Zusätzlich befindet sich in der Motkammer eine Titan-

¹Die Zelle aus Quarzglas wurde von der Fa. Optiglas hergestellt. Der innere Querschnitt beträgt 30 mm x 30 mm, die Wandstärke 4 mm und die Länge mit optischer Qualität 80 mm. Der Wärmeausdehnungskoeffizient der Zelle wird durch Aufeinanderschmelzen verschiedener Glassorten an denjenigen der Vakuumkammer angepasst.

²Modell Vaclon Plus 55 bzw. Vaclon Plus 150 der Fa. Varian

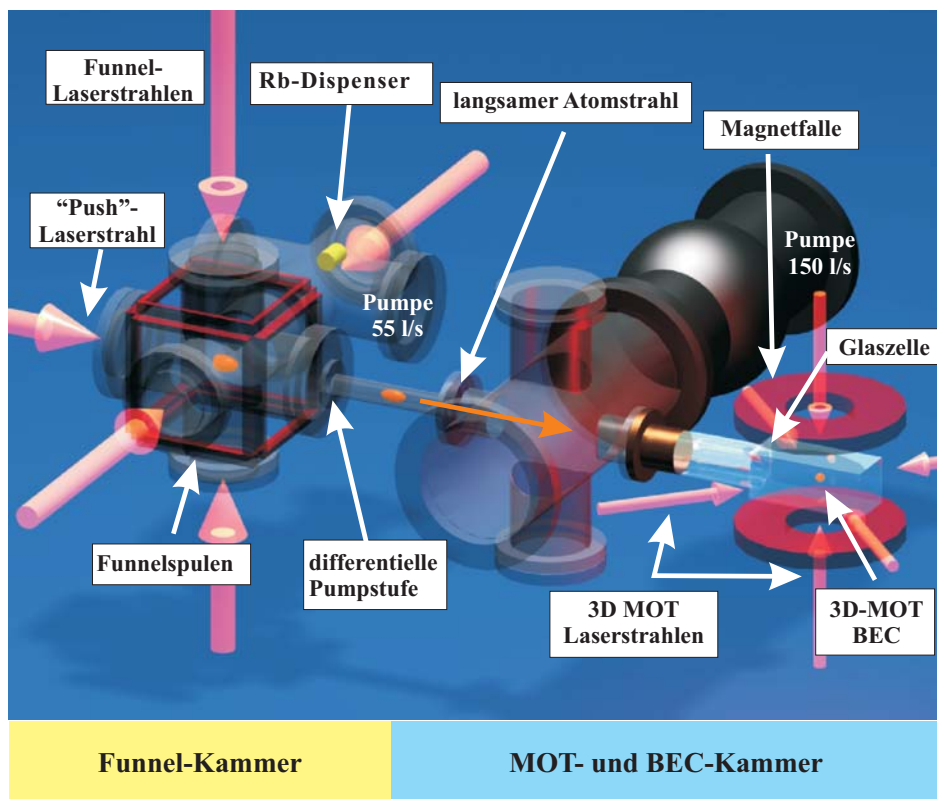


Abbildung 1.2: Übersicht über die Vakuumapparatur. In der Funnelkammer ($\sim 10^{-9}$ mbar) befinden sich die Dispenser, aus denen atomares Rubidium freigesetzt wird. Sie ist mit der MOT-Kammer ($\sim 10^{-11}$ mbar) über eine differentielle Pumpstufe verbunden. Das BEC wird in einer Magnetfalle erzeugt, deren Spulen sich außerhalb des Vakuums befinden. Sie umschließen die Glaszelle, welche den erforderlichen optischen Zugang erlaubt. Weiterhin sind die Laserstrahlen für beiden Stufen der Laserkühlung dargestellt (s. Text). Das Bild wurde freundlicherweise von W. Geithner erstellt.

Sublimationspumpe mit einer Pumpleistung von bis zu 1000l/s. Die Option einer Kühlung dieser Pumpe mit flüssigem Stickstoff wurde von uns nicht verwendet. Der Druck in den beiden Kammern kann aus dem Strom durch die jeweilige Ionenpumpe berechnet werden. Allerdings beträgt der kleinste damit messbare Druck $5 \cdot 10^{-10}$ mbar. Deshalb befindet sich in der Motkammer zusätzlich eine Bayard-Alpert Messröhre deren unteres Drucklimit bei $2 \cdot 10^{-11}$ mbar liegt. Während aller durchgeführten Experimente lag der Druck in der Motkammer unterhalb dieses Werts. Zum anfänglichen Abpumpen der Apparatur existiert an der Funnelkammer ein Hochvakuumventil (nicht gezeichnet in Abb. 1.2), an das eine Turbomolekularpumpe mit ölfreier Vorpumpe angeschlossen wurde. Die gesamte Kammer wurde über zwei Tage hinweg auf einer Temperatur von 190°C (Funnelkammer) bzw 230°C (MOT-Kammer) ausgeheizt, um bei Raumtemperatur den gewünschten Druckbereich zu erreichen.

1.1.2 Die Dispenser - Quellen atomaren Rubidiums

Als Rubidiumquelle dienen so genannte „Dispenser“³. In diesen befindet sich eine Rubidiumchromat-Verbindung. Die Bindung kann thermisch aufgebrochen werden, wodurch atomares Rubidium freigesetzt wird. Ein angelegter Strom durch die Dispenser verändert deren Temperatur und bestimmt somit den Fluss an freigesetzten Atomen und den Partialdruck von Rubidium, der praktisch dem Gesamtdruck entspricht. Typischerweise beträgt dieser ca. 10^{-9} mbar bei einem Strom von je 3.2 A durch zwei Dispenser⁴. Diese sind derart in der Funnelkammer angebracht (s. auch Abb. 1.2), dass die freigesetzten Atome in Richtung Funnel entweichen, aber nicht direkt durch die differentielle Pumpstufe in die MOT-Kammer gelangen können. Zu Beginn der Arbeiten musste die Kammeroberfläche zunächst mit einer Schicht Rubidium bedeckt werden. Solange dies nicht der Fall ist, bleiben die Atome an der Oberfläche „adsorbiert“, der Partialdruck an Rubidium ist dann vernachlässigbar. Diese Beobachtung deckt sich mit derjenigen von Ensher [51].

1.2 Laserkühlung - Kühlen und Fangen der Atome

1.2.1 Das Prinzip der Laserkühlung

Das Prinzip der Laserkühlung wurde schon 1975 unabhängig von Hänsch und Schawlow [52] sowie Wineland und Dehmelt [53] beschrieben. Nachdem 1982 ein Atomstrahl durch Lichtkräfte abgebremst wurde [26], gelang 1985 die erste dreidimensionale Kühlung [27]. Bereits zwei Jahre später wurden schließlich neutrale Atome in einer dreidimensionalen magneto-optischen Falle bei einer Temperatur von $600 \mu\text{K}$ gefangen [28]. Die MOT ist heutzutage die Standardtechnik zur Erzeugung kalter atomarer Gase. Die Prinzipien der Laserkühlung werden in den Standardwerken der Physik kalter Atome (z.B. [54]) und vielen Übersichtsartikeln [55, 56] zusammenfassend beschrieben. Von der Vielzahl experimenteller Arbeiten dazu sei hier nur diejenige von Townsend et al. erwähnt, in der eine große Zahl systematischer Studien zur Laserkühlung durchgeführt wurde [57, 58]. An dieser Stelle möge eine kurze Zusammenfassung genügen.

Befindet sich ein Atom im Feld eines nahresonanten Laserstrahls mit Wellenvektor \mathbf{k}_L , so kann das Atom ein Photon absorbieren, wodurch es einen Impuls $\hbar\mathbf{k}_L$ aufnimmt. Durch die folgende spontane Emission kommt ein weiterer Impuls hinzu, der allerdings keine Vorzugsrichtung besitzt. Durch Mittelung über viele Zyklen verschwindet dieser Beitrag. Das Atom erfährt eine Kraft $\mathbf{F} = \hbar\mathbf{k}_L\Gamma(I, \delta)$, wobei $\Gamma(I, \delta)$ die pro Zeit absorbierte Anzahl an Photonen, die Streurrate, darstellt. Diese hängt sowohl von der Intensität I als auch von der Verstimmung (Detuning) $\delta = \omega_L - \omega_0$ der Laserfrequenz ω_L gegenüber der atomaren Resonanz bei ω_0 ab. Zur Kühlung kommt es allerdings erst, wenn der Impulsübertrag zu einer Verminderung der Geschwindigkeit führt. Dazu erzeugt man ein Feld von drei (zumeist senkrechten) Paaren gegenläufiger Laserstrahlen, die leicht rot-verstimmt gegen den verwendeten Dipolübergang sind. Die Atome absorbieren dann auf Grund des Dopplereffekts vermehrt Photonen aus denjenigen Laserstrahlen denen sie entgegenlaufen. Die Wirkung des Lichtes auf die Atome lässt sich innerhalb gewisser Grenzen durch eine Reibungskraft beschreiben, die proportional zur Geschwindigkeit ist. Eine solche Anordnung wird auch dreidimensionale optische Melasse (engl. „optical

³Die Dispenser stammen von der Fa. SaesGetters und beinhalten 4.5 mg Rubidium.

⁴Die Lebensdauer beträgt bei diesem Strom mindestens zwei Jahre.

molasses“) genannt. Man kann dadurch die Atome zwar abbremsen, aber nicht fangen, da die Kräfte positionsunabhängig sind. Legt man zusätzlich einen Magnetfeldgradienten (normalerweise ein sphärisches Quadrupolfeld) an, so führt dieser auf Grund der unterschiedlichen Zeeman-Aufspaltung von Grund- und angeregtem Zustand bei geeigneter Polarisation der Laser zu einer rücktreibenden Kraft ins Zentrum des Quadrupolfelds. Die Atome bleiben dort gefangen, man spricht von einer magneto-optischen Falle (MOT). Zunächst dachte man, dass die niedrigste erreichbare Temperatur durch das so genannte Dopplerlimit $T_D = \frac{\hbar\Gamma}{2k_B}$ gegeben ist, wobei Γ die Linienbreite des Dipolübergangs darstellt. Für Rubidium liegt dieses bei $T_D = 140 \mu\text{K}$, im Experiment wurden jedoch auch deutlich tiefere Temperaturen gemessen [59, 60]. Man konnte dies durch den Mechanismus der Polarisationsgradientenkühlung erklären. Die Theorie dazu wurde von Dalibard und Cohen-Tannoudji [56] beschrieben. In der Praxis erreicht man dadurch für große ($N > 10^7$ Atome) Wolken, wie sie für die Bose-Einstein Kondensation notwendig sind, eine Temperatur von etwa $40 \mu\text{K}$. Zum Vergleich: die Temperatur, die der Rückstoßenergie eines einzelnen emittierten Photons entspricht („single photon recoil limit“), beträgt $T = \frac{\hbar^2\omega_0^2}{2mc^2k_B} = 180 \text{ nK}$.

Das Termschema

Die folgende Abb. 1.3 zeigt einen Teil des Termschemas von ^{87}Rb in welches die verwendeten Übergänge und Laserwellenlängen eingezeichnet sind. Für die Laserkühlung (Ti:Saphir und Rückpumper) wird Licht verwendet welches nahresonant mit der D2-Feinstrukturlinie bei 780 nm ist. Als Kühlungsübergang benutzt man die Linie zwischen den Hyperfeinstruktur-niveaus $F = 2 \rightarrow F' = 3$ von Grund- und angeregtem Zustand. Der Rückpumper ist notwendig, um Atome, die über den nahresonanten ($F = 2$)-Zustand des angeregten Niveau in den $F = 1$ Grundzustand zerfallen, in den Kühlkreislauf zurückzuführen. Die Dipolfalle bei 1064 nm (Nd-YAG) und die Stehwelle bei typischerweise 782 nm sind zur Unterdrückung der spontanen Emission nicht resonant mit dem betrachteten Dipolübergang. Das BEC wird in der Magnetfalle im ($F = 2, m_F = 2$)-Hyperfeinstrukturzustand erzeugt. Auch in der optischen Dipolfalle bleiben die Atome durch Anlegen eines konstanten homogenen Magnetfelds spinpolarisiert in diesem Zustand.

1.2.2 Das Lasersystem

Das zur Laserkühlung benötigte Licht in der Nähe des geschlossenen $F = 2 \rightarrow F' = 3$ Übergangs der D2-Linie wird von einem Titan-Saphir-Laser (Ti:Sa, Coherent MBR-110, „single frequency“ Dauerstrichlaser) erzeugt. Er wird von einem diodengepumpten frequenzverdoppelten Nd:YAG Laser (Coherent Verdi V10, 532nm) mit 10.5 W gepumpt und liefert typischerweise 1.4 W Ausgangsleistung. Der interne Referenzresonators des Ti:Sa wird durch dopplerfreie Sättigungsspektroskopie auf den $F = 2 \rightarrow F' = (3, 1)$ -Crossover-Übergang der D₂-Linie stabilisiert [61]. Die Laserlinienbreite beträgt weniger als 500 kHz und ist somit wesentlich kleiner als die natürliche Linienbreite des D2-Übergangs ($\Gamma = 2\pi \times 5.76 \text{ MHz}$). Neben der Laserkühlung wird das Licht auch für die Absorptionsabbildung (s. Abschnitt 1.5) der kalten Atome benutzt. Da die Laserfrequenzen für Funnel, MOT und die Abbildung leicht verschieden sind, durchlaufen die jeweiligen Strahlen je einen akusto-optischen Modulator (AOM) im Hin- und Rücklauf („double

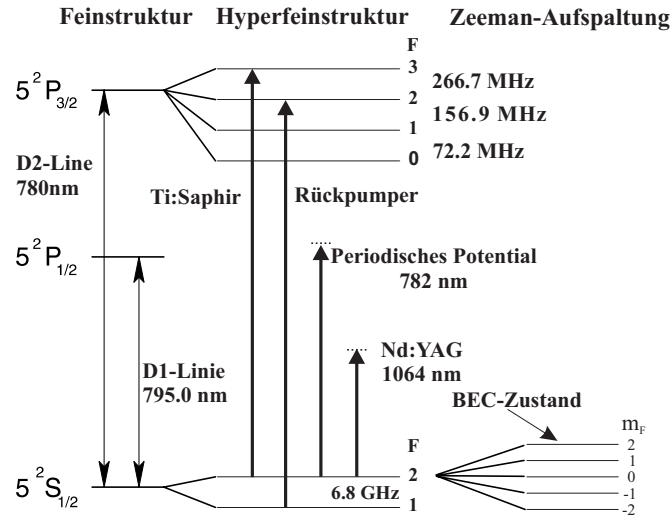


Abbildung 1.3: Auszug aus dem Termschema von ^{87}Rb ; dargestellt sind die wichtigen Niveaus der Fein- und Hyperfeinstruktur der am D1/D2-Feinstrukturdoublet beteiligten Zustände. Die Laserkühlung erfolgt auf dem geschlossenen $F = 2 \rightarrow F' = 3$ Übergang der D2-Linie. Der Rückpumper ist notwendig, um Atome, die über den nahresonanten $F = 2$ Zustand des angeregten Niveau in den $F = 1$ Grundzustand zerfallen in den Kühlkreislauf zurückzuführen. Zudem ist für den $F = 2$ Grundzustand die Zeeman-Aufspaltung im homogenen Magnetfeld eingezeichnet. Im Unterzustand $m_F = 2$ wird das Kondensat erzeugt. Die Dipolfallen (Nd:YAG) und der Laser zur Erzeugung des periodischen Potentials sind weit verstimmt gegen die beiden D1/D2-Linien.

pass“). Sie werden so von der Crossover-Resonanz in die Nähe des $F = 2 \rightarrow F' = 3$ -Übergang verschoben. Die Abbildung erfolgt auf Resonanz, Funnel und MOT sind typischerweise $|\delta| = 1 - 2\Gamma$ davon (s. Abschnitt 1.2.3) entfernt. Zur Entkopplung der Optiken innerhalb und außerhalb des abgedunkelten Bereichs werden die Laserstrahlen durch „singlemode“-Glasfasern geleitet. Diese dienen zusätzlich als Modenfilter, wodurch eine gute Strahlqualität, die die Laserkühlung stark beeinflussen kann [58], gegeben ist. Die Strahlen können durch mechanische Shutter geblockt werden, so dass kein Laserlicht während der Verdampfungskühlungsphase in die Kammer gelangen und die Atome aufheizen kann. Zu Anfang der Arbeiten wurden statt des MBR-110 zunächst ein System aus einem Gitterlaser und zwei „injektiongelockten“ 70 mW Laserdioden und später ein von einem Ar-Ionenlaser (Coherent Innova 400) gepumpter Ti:Sa Ringlaser (Coherent Modell 899-21) verwendet [49]. Diese Systeme, waren aber deutlich weniger zuverlässig und stabil als die jetzige Verdi/MBR110-Kombination.

Da die Atome aus dem angeregten $F = 3$ -Niveau auf Grund der Auswahlregeln für Dipolübergänge nur in das Ausgangsniveau $F = 2$ zerfallen können, bezeichnet man den Übergang als geschlossen. Allerdings beträgt die Aufspaltung zwischen den $F = 2$ und $F = 3$ Hyperfeinstrukturturniveaus des angeregten Zustandes nur 267 MHz, somit gelangt ein Teil der Atome durch Absorption in das $F = 2$ -Niveau und kann von dort in den $F = 1$ Zustand des Grundzustands spontan zerfallen. Sie müssen mit einem so genannten Rückpumper zurück in den Kühlkreislauf gebracht werden. Dies geschieht durch einen selbstgebauten gitterstabilisierten Diodenlaser (Extended Cavity Diode La-

ser, ECDL 1) in Littrow-Konfiguration. Er liefert ~ 15 mW Ausgangsleistung, ist auf den $F = 1 \rightarrow F' = 2$ -Übergang der D_2 -Linie (s. Abb. 1.3) ebenfalls mittels dopplerfreier Sättigungsspektroskopie stabilisiert und besitzt eine Frequenzbreite, die wesentlich kleiner als die Linienbreite des D_2 -Übergangs ist. Da die Modenqualität und die genaue räumliche Position des Rückpumperlichts keinen signifikanten Einfluss auf die Laserkühlung haben, wird dieser Laser nicht durch eine Glasfaser geleitet.

1.2.3 Funnel und 3d-MOT

Der atomare Funnel

Der atomare Funnel wird zur Erzeugung eines Strahls kalter Atome verwendet. Er besteht im Wesentlichen aus einer zweidimensionalen MOT, d.h. man kühlt die Atome zunächst nur in zwei Dimensionen wobei man ein axiales Quadrupfeld⁵, also ein Feld welches nur in zwei Raumrichtungen einen Gradienten besitzt, verwendet. Die Atome sammeln sich dann auf der Symmetrieachse, es entsteht ein Atomstrahl in beide Richtungen entlang dieser Achse. Die Atome hätten jedoch noch eine hohe mittlere Geschwindigkeit. Deshalb strahlt man auch in Richtung der Symmetrieachse ein Paar Laserstrahlen (die „push“-Strahlen in Abb. 1.2) ein, die auf Grund des fehlenden Magnetfeldgradienten nur eine Kühlung aber keine rücktreibende Kraft bewirken. In dieser Raumrichtung liegt eine eindimensionale optische Melasse vor, die gesamte Anordnung wird auch als $2d^+$ -MOT bezeichnet. Nachdem die Demonstration dieser Technik 1990 in Gruppe von S. Chu gelang [62], wurde sie 1998 erstmals zur Erzeugung eines BEC verwendet [63].

Schematisch ist der Funnel in Abb. 1.4 (a) dargestellt. Der entgegen der gewünschten Atomstrahlrichtung laufende Laserstrahl wird über einen Spiegel in der Kammer reflektiert, der in der Mitte ein Loch von einem Millimeter Durchmesser besitzt. Dieses Loch stellt zum einen die differentielle Pumpstufe dar, zum anderen führt es auf der Funnelachse zu einem Ungleichgewicht im Strahlungsdruck, der die Atome durch das Loch in Richtung 3d-MOT treibt. Typischerweise besitzt der Atomstrahl eine mittlere Geschwindigkeit von ~ 10 m/s [63]. Er ist somit langsamer als die maximale Einfanggeschwindigkeit $v_{\max} \simeq \sqrt{\frac{\hbar k_L r \Gamma}{4m}} = 20$ m/s der 3d-MOT⁶ und kann von dieser vollständig gefangen werden.

Das axiale Quadrupolfeld wird durch zwei rechteckige Spulenpaare erzeugt, deren Geometrie so gewählt ist, dass der transversale Magnetfeldgradient sowohl entlang der Symmetrieachse als auch senkrecht dazu (Abb. 1.4 (b+c)) möglichst homogen ist⁷. Aus Symmetriegründen gibt es keinen Magnetfeldgradienten entlang der Funnelachse. Die gesamte Spulenanordnung kann über Feingewindeschrauben derart positioniert werden, dass die Achse verschwindenden Magnetfelds genau das Loch im Spiegel trifft. Die Laserstrahlenpaare, die die zweidimensionale Kühlung bewirken, sind σ^+/σ^- polarisiert und haben einen elliptischen Querschnitt von 35×25 mm bei einer Intensität von typischerweise 2 mW/cm². Die push-Strahlen sind rund mit einem Durchmesser von 20 mm und einer Intensität von 1 mW/cm². Die Verstimmung beträgt $\delta = -2\Gamma = -2\pi \times 11.5$ MHz

⁵Idealerweise wird ein solches Feld von vier stromdurchflossenen, unendlich langen, quadratisch angeordneten Leitern, erzeugt, wobei die Stromrichtung von jedem Leiter zu den beiden benachbarten wechselt.

⁶Hierbei bezeichnet $r = 9$ mm den Radius der 3d-MOT Laserstrahlen.

⁷Jede Spule besteht aus 24 Windungen die ein Rechteck von 90 mm x 125 mm bilden.

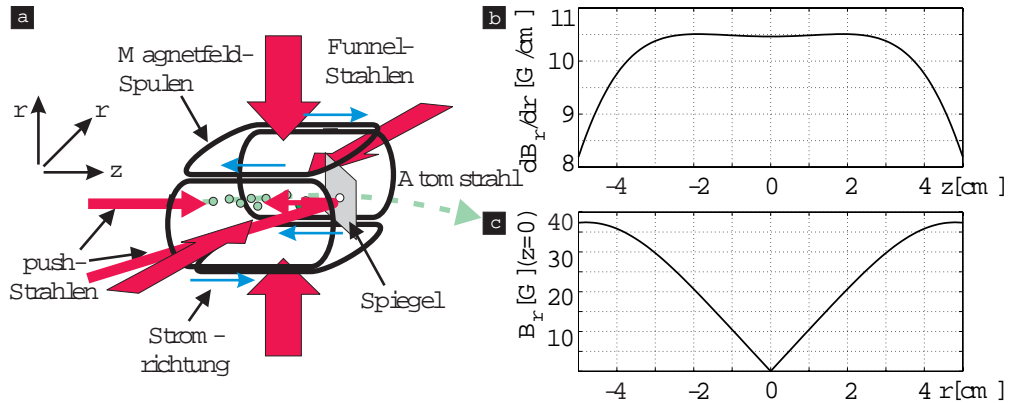


Abbildung 1.4: (a) Schematischer Aufbau des Funnels: Die Geometrie der Magnetfeldspulen erzeugt ein axiales Quadrupolfeld, das für die zweidimensionale Laserkühlung benötigt wird. Die beiden push-Strahlen bewirken in der dritten Raumrichtung ebenfalls eine Kühlung der Atome, allerdings ohne eine rücktreibende Kraft auszuüben. Ein Loch im Spiegel des Strahlengangs der push-Strahlen führt zu einem Ungleichgewicht im Strahlungsdruck, wodurch die Atome in einem langsamen Strahl in Richtung 3d-MOT entweichen. Die blauen Pfeile kennzeichnen die Richtung des Stromflusses durch die einzelnen Magnetfeldspulen. (b) Berechneter radialer Magnetfeldgradient entlang der Symmetrieachse. (c) Magnetfeld in radialer Richtung im Zentrum der Spulen ($z = 0$). Auf der Größenskala der Laserstrahlen (axial 35 mm, radial 20 mm) sind die Gradienten als homogen anzusehen.

gegenüber dem $F = 2 \rightarrow F' = 3$ -Übergang der D_2 -Linie. Der transversale Magnetfeldgradient beträgt 10.5 G/cm bei einem Strom von 10 A. Der Funnel wurde justiert, indem die Laderate der, den kalten Atomstrahl fangenden, 3d-MOT optimiert wurde.

Die magneto-optische Falle

Der kalte Atomstrahl fällt auf seinem Weg vom Funnel zur 3d-MOT ca. einen Zentimeter im Schwerfeld der Erde. Man kann dies Ausnutzen, um das Kondensat von den schnellen thermischen Hintergrundatomen aus der Funnelkammer geometrisch abzuschatten: man positioniert die 3d-MOT derart, dass sie den kalten Atomstrahl fangen kann, die direkte „Sichtverbindung“ zum Spiegelloch, also zur Funnelkammer, durch Vakuumbauteile jedoch versperrt ist.

Der Aufbau der 3d-MOT ist in Abb. 1.5 dargestellt, er entspricht dem Standardaufbau [28] mit einem sphärischen Quadrupolfeld und drei Laserstrahlpaaren in σ^+/σ^- -Konfiguration. Allerdings schließen die beiden horizontalen Strahlenpaare aus geometrischen Gründen nur einen Winkel von 50° ein. Der Magnetfeldgradient wird erzeugt durch ein Spulenpaar in Antihelmholtzkonfiguration. Im Experiment beträgt der Gradient in radialer Richtung typischerweise $B_r = 4$ G/cm bei einem Strom von $I = 4.5$ A. Die Laserstrahlen besitzen einen Durchmesser von 18 mm, eine Intensität von 5 mW/cm², bei einer Gesamtleistung von 50 mW und einem Detuning von $\delta = -1.4$ Γ .

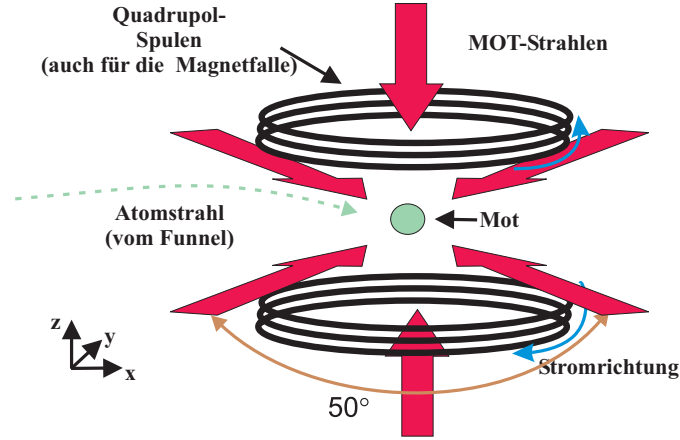


Abbildung 1.5: Schema der 3-d MOT zum Einfangen des kalten Atomstrahl aus dem Funnel: Sechs Laserstrahlen in σ^+/σ^- Konfiguration überlappen im Zentrum eines sphärischen Quadrupolfelds, welches durch ein Spulenpaar in Antihelmholtzkonfiguration erzeugt wird.

1.3 Die magnetische TOP-Falle

Da die Methode der Laserkühlung auf Grund dichte- und temperaturlimitierender⁸ Prozesse in der magneto-optischen Falle nicht ausreicht, um den Bose-Einstein-Übergang zu beobachten, muss man den fehlenden Anstieg der Phasenraumdichte durch Verdampfungskühlung in einer „dunklen“ Falle (ohne Laserlicht) erreichen. Diese Magnetfalle, beruht auf der Wechselwirkung des magnetischen Moments μ der paramagnetischen Atome mit einem äußeren Magnetfeld \mathbf{B} ,

$$U(\mathbf{r}) = -\mu \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = m_F g_F \mu_B |B(\mathbf{r})|, \quad (1.1)$$

dabei ist μ_B das Bohrsche Magneton, m_F die Quantenzahl des magnetischen Unterzustands und g_F der g -Faktor des Hyperfeinstrukturzustands. Atome in den Zuständen mit $m_F g_F > 0$, so genannte „low-field seeker“ können in einem Magnetfeldminimum gefangen werden. Ein Maximum des Magnetfelds im freien Raum verbieten die Maxwell-Gleichungen, deshalb können „high-field seeker“ ($m_F g_F < 0$) nicht verwendet werden.

In unserem Experiment werden Atome im ($F = 2, m_F = 2$)-Zustand mit einem magnetischen Moment $|\mu| = \mu_B$ gefangen (vgl. Abb. 1.3). Dieser Zustand hat gegenüber den beiden anderen möglichen Zuständen ($F = 2, m_F = 1$) und ($F = 1, m_F = -1$) den Vorteil, dass das magnetische Moment doppelt so groß, und damit die Dichte in der Magnetfalle dementsprechend erhöht ist. Bei hohen Dichten funktioniert die Kühlung besser, da die Rate der notwendigen thermalisierenden Stöße proportional zur Dichte ist, und somit schneller neue „heiße“ Atome erzeugt werden. Die einfachste Möglichkeit, Atome magnetisch zu fangen, ist die sphärische Quadrupolfalle, wie sie auch für die

⁸Die Dichte ist limitiert, da die resonante Absorption gestreuten Lichtes bei hohen Dichten in der MOT zu einer effektiv repulsiven Wechselwirkung der Teilchen führt, die eine weitere Kompression verhindert. Die erreichbare Temperatur ist ebenso begrenzt, da bei hohen Dichten Kollisionen zwischen Atomen im Grund- und angeregten Zustand zu einer Umwandlung der Anregungsenergie in kinetische Energie führen.

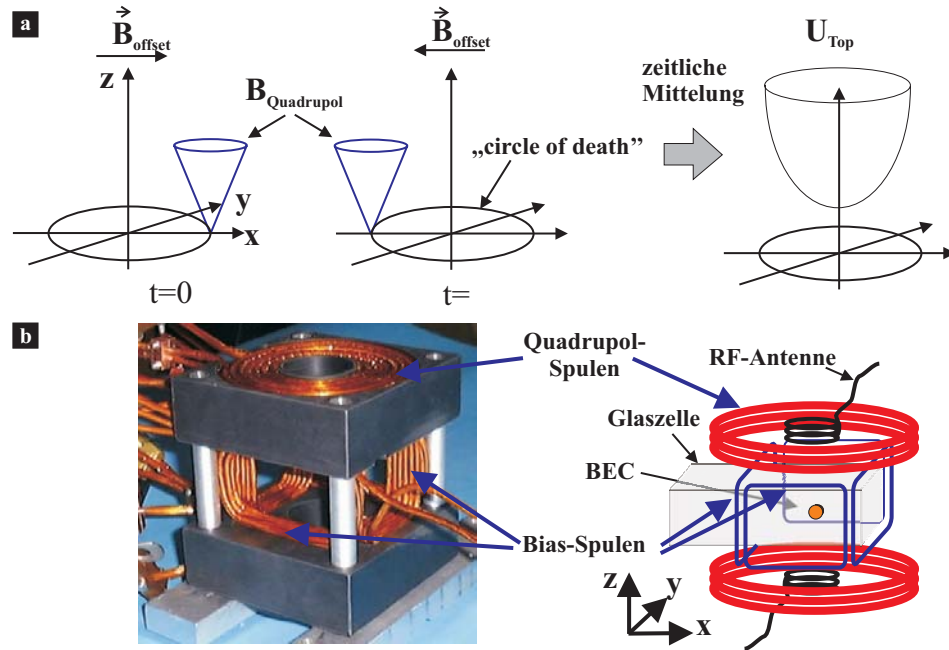


Abbildung 1.6: (a) Funktionsweise der magnetischen TOP Falle: Ein rotierendes homogenes Magnetfeld führt zusammen mit dem Quadrupolfeld zu einem zeitgemittelt harmonischen Potential bei einem von Null verschiedenen B-Feld-Minimum. (b) Foto und Schema des Aufbaus der TOP-Falle: die Spulen sind in einen Halter aus glasfaserverstärktem Kunststoff eingegossen, der die mechanische Stabilität der Anordnung gewährleistet. Die Quadrupolspulen befinden sich oberhalb und unterhalb der Glaszelle (auf dem Foto nicht zu sehen), die Spulen für das rotierende Feld seitlich davon. Über die rf-Antenne wird die notwendige Radiofrequenz für die Verdampfungskühlung eingestrahlt (s. Abschnitt 2.1.6).

MOT verwendet wird. Ihr Potential

$$U_{\text{Quad}}(\mathbf{r}) = \mu_B B_r \sqrt{(x^2 + y^2 + 4z^2)} \quad (1.2)$$

steigt linear mit dem Abstand zum Zentrum der Falle. B_r stellt dabei den Gradienten entlang der radialsymmetrischen (x, y) -Richtung dar⁹. Allerdings verschwindet das B-Feld im Zentrum der Falle und verhindert aus folgendem Grund die Bose-Einstein Kondensation. Mit sinkender Temperatur der Wolke steigt die Wahrscheinlichkeit der Atome sich im Fallenzentrum aufzuhalten. Die Atome bleiben nicht spin-polarisiert, da die Larmorfrequenz dort zu klein ist, die Spins können dem äußeren Feld nicht mehr folgen. Atome gehen auf Grund sog. (Majorana-) „Spin-Flips“ in nicht gefangene Zustände verloren [64].

Eine Methode dies zu verhindern ist das Anlegen eines rotierenden homogenen Felds (Bias-Feld) der Größe B_0 . Das Prinzip dieser sog. TOP-Falle (**T**ime **o**rbiting **p**otential) [65] ist in Abb. 1.6(a) gezeigt. Wählt man die Frequenz des in x-y-Richtung rotierenden Felds sehr viel kleiner als die Larmorfrequenz, aber sehr viel größer als die resultierende

⁹In axialer z-Richtung ist der Gradient auf Grund der Maxwellgleichung $\text{div } \mathbf{B} = 0$ doppelt so groß.

Fallenfrequenz, so bleiben die Atome spinpolarisiert und werden in einem zeitgemittelt harmonischen Potential

$$U_{TOP}(\mathbf{r}) = \mu_B B_0 + \frac{\mu_B B_r^2}{4B_0} (x^2 + y^2 + 8z^2). \quad (1.3)$$

gefangen. In dessen Zentrum herrscht, wie erforderlich, ein von Null verschiedenes Magnetfeld. Der Ort des verschwindenden Magnetfelds rotiert in einem Abstand $R = \frac{B_0}{B_r}$, dem ‘‘Circle of death‘‘ um das Fallenzentrum. Möchte man einen Atomzahlverlust vermeiden muss dieser Radius größer als die atomare Wolke sein. Die Fallenfrequenzen ergeben sich aus dem Potential 1.3 zu

$$\omega_x = \omega_y = \sqrt{\frac{\mu_B B_r^2}{2mB_0}} = \frac{\omega_z}{\sqrt{8}}. \quad (1.4)$$

Berücksichtigt man die Gravitation, so ist die Ruhelage der Atomwolke um

$$\Delta z = -\frac{R}{2} \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{mg}{2\mu_B B_r} \quad (1.5)$$

gegenüber dem Fallenzentrum verschoben („gravitational sag‘‘) [51]. Der Faktor β gibt dabei das Verhältnis von Schwerkraft zur magnetischen Kraft in dieser Richtung an. Um Atome gegen die Schwerkraft halten zu können, benötigt man demnach einen Gradienten von $\frac{mg}{2\mu_B} = 15 \text{ G/cm}$. Die Fallenfrequenzen ergeben sich aus einer harmonischen Näherung um die Ruhelage zu:

$$\omega'_x = \omega'_y = \omega_x (1 - \beta^2)^{1/4} \sqrt{1 + \beta^2} \quad (1.6)$$

$$\omega'_z = \omega'_x \sqrt{8 \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2}}. \quad (1.7)$$

Das Design unserer Falle ist in enger Anlehnung an eine magnetische TOP-Falle, die von Hagley [66] in der Arbeitsgruppe von W. Phillips gebaut und beschrieben wurde. In Abb. 1.6 (b) ist ein Bild der Falle vor dem Einbau um die Glaszelle zu sehen. Alle Spulen sind in eine Halterung aus glasfaserverstärktem Kunststoff¹⁰ eingebettet. Dadurch soll verhindert werden, dass sich die einzelnen Bestandteile der Falle gegeneinander verschieben können (so die Theorie). Die Spulen aus Kupferkapillarrohr werden wassergekühlt, wobei die Wärmelast von bis zu 4 kW auf insgesamt zehn parallele Kreisläufe (sechs für die Quadrupolspulen, vier für die Biasfeldspulen) verteilt wird.

Den Strom für die Quadrupolspulen liefert ein Netzgerät der Fa. Agilent (Modell 6682A), er beträgt maximal 300 A bei 17.2 V Spannung. Der radiale Feldgradient erreicht dann 260 G/cm. Zur Steuerung des Stroms wurde eine Regelelektronik - ebenfalls nach den Plänen von Hagley - gebaut. Sie ermöglicht das schnelle Einschalten des Stroms innerhalb von 1 ms auf jeden gewünschten Wert, welches für den Transfer der Atome aus der MOT in die Magnetfalle wichtig ist (s. Abschnitt 2.1.5). Zudem ist es möglich, die Falle innerhalb von 100 μs auszuschalten. Die dadurch entstehende Induktionsspannung

¹⁰Der Werkstoff für die Halterung wurde uns freundlicherweise von der Fa. Ensinger geliefert. Er hat den Vorteil, dass der thermische Ausdehnungskoeffizient $\eta \simeq 2 \cdot 10^{-5} 1/\text{K}$ etwa fünffach kleiner als beim selben Material ohne Glasfasereinlagen ist.

wird durch Varistoren auf 700 V begrenzt. Das schnelle Abschalten der Falle ist vor allem zur Charakterisierung der kalten Wolke und des Kondensats notwendig (s. Abschnitt 1.5).

Die Bias-Spulen erzeugen das rotierende homogene Feld. Durch jedes Spulenpaar fließt ein sinusförmiger Strom $I = I_0 \sin(\omega_{\text{rot}} t + \phi)$, wobei die Phasendifferenz zwischen beiden Paaren $\Delta\phi = \pi/2$ beträgt. Sie werden jeweils über einen Schwingkreis an die Impedanz eines Audioverstärkers (Crest Audio Modell 10001) mit 2×5000 W Ausgangsleistung angepasst. Durch die Stromüberhöhung im Schwingkreis können Ströme bis $I_{\text{max}} \simeq 140$ A erzeugt werden, wobei der Maximalwert im Experiment 60 A beträgt, dies entspricht einem Biasfeld von $B_0 = 45$ G. Die Resonanzfrequenz der Schwingkreise wird durch die Wahl der Kapazität $C \simeq 30 \mu\text{F}$ auf $\omega_{\text{rot}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2\pi \times 9.8$ kHz eingestellt, wobei $L \simeq 9 \mu\text{H}$ die Induktivität der Spulenpaare ist. Sie ist, wie gefordert, sehr viel kleiner als die minimale Larmorfrequenz im Experiment von $\omega_{\text{Larmor}} = 2\pi \times 1$ MHz und sehr viel größer als die maximale Fallenfrequenz von $\omega_{\text{max}} = 2\pi \times 150$ Hz.

1.4 Optische Dipolpotentiale

Der bisher beschriebene Aufbau reicht aus zur Erzeugung von Bose-Einstein Kondensaten. Zum Studium der Dynamik kohärenter Materiewellen in einer Dimension muss jedoch ein geeigneter Wellenleiter erzeugt werden, der das Kondensat in zwei Raumrichtungen einschließt, aber freie Propagation in der dritten Dimension erlaubt. Zunächst war geplant das BEC in der Magnetfalle zu erzeugen und durch adiabatisches Anschalten des Wellenleiters in die kombinierte Falle zu transferieren. Die Untersuchung der BEC-Dynamik hätte mit dem plötzlichen Abschalten der Magnetfalle begonnen. Experimentell zeigte sich jedoch, dass das Umladen in die kombinierte Falle zum unkontrollierten Aufheizen des Ensembles führte, die atomare Wolke war danach nur noch teilweise kondensiert. Zudem bestand das Problem, dass das Ausschalten der Magnetfalle einen Impuls auf das BEC überträgt, der im Mittel vom Strom durch die Spulen abhing, aber von einer Realisierung zur Nächsten stark variierte. Dies war im Hinblick auf die geplanten Experimente in periodischen Potentialen nicht tolerierbar. Bei diesen ist es unbedingt notwendig, dass das Kondensat anfänglich ruht. Nur dann kann der Quasiimpuls der Atome durch Beschleunigung des periodischen Potentials mit genügender Präzision eingestellt werden (s. Abschnitt 3.2).

Aus diesem Grund wurde eine weitere optische Falle, der so genannte Haltestrahl, hinzugefügt. Dieser kreuzt den Wellenleiter nahezu rechtwinklig am Ort der Magnetfalle. Beide Strahlen bilden zusammen eine dreidimensionale optische Falle. Es werden reine Kondensate erzeugt, indem man eine vorgekühlte Wolke in die optische Falle transferiert und dort durch Verdampfungskühlung den Phasenübergang erreicht. Das Abschalten des Haltestrahls entlässt die Atome in den Wellenleiter ohne Impulsübertrag. Der genaue Ablauf der Kondensation in dieser Dipolfalle ist in Abschnitt 2.3 erläutert. Wellenleiter, Haltestrahl und das periodische Gitter werden durch optische Potentiale erzeugt, die im folgenden Abschnitt beschrieben werden. Eine zusammenfassende Übersicht über dieses Gebiet ist in [54] zu finden.

Die optischen Potentiale werden im Experiment durch Laserstrahlen erzeugt, deren Frequenz ω_L weit von der Resonanzfrequenz ω_0 der ^{87}Rb Atome verstimmt ist. Auf Grund der großen Verstimmung $\delta = \omega_L - \omega_0$ kann die spontane Streuung von Photonen

durch die Atome vernachlässigt werden. Das Potential entsteht durch Wechselwirkung des induzierten atomaren Dipolmoments \mathbf{d} mit dem elektrischen Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ des Lasers („ac Stark shift“). Unter der Bedingung $|\delta| \gg \Omega$, $|\delta| \gg \Gamma$, wobei $\Omega = \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})/\hbar$ die Rabifrequenz darstellt, ergibt sich das konservative Dipolpotential in der Näherung eines Zweiniveau-Atoms zu [54]

$$V(\mathbf{r}) = \frac{\hbar|\Omega(\mathbf{r})|^2}{4\delta}. \quad (1.8)$$

Das Betragsquadrat der Rabifrequenz hängt gemäß

$$|\Omega(\mathbf{r})|^2 = \frac{\Gamma^2 I(\mathbf{r})}{2I_S} \quad (1.9)$$

von der Intensität $I(\mathbf{r})$ des Laserstrahls und der Sättigungsintensität $I_S = \pi\hbar c\Gamma/(3\lambda^3)$ ab. Hierbei bezeichnet λ die Wellenlänge des Dipolübergangs. Zusätzlich hat man für Atome mit magnetischer Unterstruktur des Grundzustands noch die Clebsch-Gordan-Koeffizienten zu berücksichtigen, diese sind z.B. in [54] für die betrachteten Übergänge tabelliert. Das Potential ist demnach durch die ortsabhängige Intensität der verwendeten Laserstrahlen und durch deren Verstimmung gegenüber der Resonanzfrequenz bestimmt. Man erkennt an Gl. 1.8 zudem, dass die Atome nur für ein negatives Vorzeichen der Verstimmung ($\omega_L < \omega_0$), also einer Rotverstimmung des Lasers, zum Maximum der Lichtintensität gezogen werden.

1.4.1 Wellenleiter und Haltestrahl

Der Wellenleiter und der Haltestrahl werden durch je einen rotverstimmten Laserstrahl realisiert. Dazu wird ein diodengepumpter Nd:YAG Laser (Spectra-Physics T40-X30-106QW) mit einer Leistung von maximal 8W bei einer Wellenlänge von 1064 nm benutzt. Die Laserfrequenz muss auf Grund der weiten Verstimmung von der Resonanz nicht stabilisiert werden. Der Laser wird in zwei Strahlen aufgeteilt, die jeweils einen akusto-optischen Modulator durchlaufen. Die gebeugten Strahlen werden durch „single mode“ Glasfasern zur Kammer geführt. Die AOM's dienen hierbei als schnelle Schalter und zur Steuerung der Leistung in den beiden Dipolfallen, die Frequenzverschiebung ist dabei nicht relevant. Beide Strahlen werden auf eine Strahltaile von $62 (\pm 5) \mu\text{m}$ fokussiert, die Foki kreuzen sich im Zentrum der Magnetfalle. Durch Abschalten des Haltestrahl entsteht der gewünschte Wellenleiter, der das Kondensat in zwei Raumrichtungen hält aber freie Propagation entlang der Strahlachse erlaubt, da der Einschluss in dieser Richtung auf Grund der großen Strahltaile sehr schwach ist.

Die beiden Dipolfallen sind linear polarisierte gaußsche Laserstrahlen mit der ortsabhängigen Intensität

$$I(\mathbf{r}) = \frac{I_0}{1 + (x/x_R)^2} \exp\left[-2\frac{y^2 + z^2}{w_0^2(1 + (x/x_R)^2)}\right]. \quad (1.10)$$

Dabei ist w_0 die Strahltaile, die Rayleighlänge $x_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$ berücksichtigt deren Änderung entlang der Strahlachse. Die maximale Intensität $I_0 = \frac{2P}{\pi w_0^2}$ ist mit der Leistung P des Strahls verknüpft. Die Strahltaile der beiden Laser führt zu einer Rayleighlänge (1.3 cm), die sehr viel größer als die Längenskala der atomaren Dynamik im Experiment (maximal

500 μm) ist. Man kann die Strahltaile ortsunabhängig w_0 annehmen und erhält nach Einsetzen der Intensität in die Gleichung 1.8 folgendes Potential:

$$V_D(x, y) = V_0 \exp \left[-2 \frac{y^2 + z^2}{w_0^2} \right]; \quad V_0 = \frac{\hbar \Gamma^2 I_0}{8 I_S} \frac{2}{3} \left(\frac{1}{\delta_{D2}} + \frac{1}{2 \delta_{D1}} \right) \quad (1.11)$$

Der Faktor $2/3$ berücksichtigt dabei den Clebsch-Gordan-Koeffizienten für Atome im $m_F = 2$ -Zustand bei linear polarisiertem Licht, δ_{D1} und δ_{D2} sind die Verstimmungen gegenüber den beiden Feinstrukturlinien D2 (780 nm) und D1 (795 nm), wobei die D1-Linie halb so stark wie die D2 Linie ist. In parabolischer Näherung erhält man damit die Fallenfrequenzen der Dipolfalle:

$$\omega_{\perp} = \sqrt{\frac{4|V_0|}{m w_0^2}}, \quad \omega_{\parallel} = \frac{\sqrt{2\pi} w_0}{\lambda} \omega_{\perp}. \quad (1.12)$$

wobei für die Berechnung von ω_{\parallel} die axiale Intensitätsabhängigkeit nach Gl. 1.10 auf der Strahlachse ($x = y = 0$) benutzt wird. Die Leistung des Wellenleiters wurde typischerweise so eingestellt, dass er eine transversale Frequenz von ca. 100 Hz besitzt. Durch das hohe Verhältnis der Fallenfrequenzen $\frac{\omega_{\perp}}{\omega_{\parallel}} = 250$ und der daraus resultierenden longitudinalen Fallenfrequenz von nur 0.4 Hz, kann diese Richtung auf der Zeitskala der Experimente (maximal 100 ms) als praktisch frei angesehen werden. Die Leistung des Haltestrahls wurde so eingestellt, dass das BEC in der 3-dimensionalen Falle die gewünschte Größe besitzt (s. Abschnitt 3.1.3). Die spontane Streurrate

$$\Gamma_s = \frac{\Gamma^3 I_0}{8 I_S} \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{1}{\delta_{D2}^2} + \frac{1}{2 \delta_{D1}^2} \right) \quad (1.13)$$

beträgt bei maximaler Leistung der Dipolfallen weniger als 0.5 Hz. Sie ist vernachlässigbar für die Dauer der Experimente.

1.4.2 Das eindimensionale optische Gitter

Zur Erzeugung des periodischen Potentials, auch optisches Gitter genannt, wurden sowohl selbstgebaute gitterstabilisierte Diodenlaser als auch ein Ti:Saphir-Laser¹¹ (Coherent 899-21, gepumpt von einem Ar-Ionenlaser Coherent Innova 400) benutzt. Die Diodenlaser erzeugen 60 mW Licht bei Wellenlängen zwischen 781 und 785 nm. Der Ti:Sa mit maximal 300 mW Stehwellenleistung¹² wurde sowohl blau- als auch rotverstimmt in einem Bereich von 760-805 nm verwendet. Neben der höheren Leistung, die für die vorgestellten Experimente nicht notwendig war, erwies sich die Verwendung des Ti:Sa als vorteilhaft, da dieser keine Modensprünge zeigt und keinen mit der D2-Linie resonanten Untergrund besitzt, welcher zu einem Aufheizen des Kondensats führt. Die Diodenlaser mussten zur Filterung resonanter Anteile durch geheizte Rb-Dampfcellen geleitet werden, die Stabilität der Lasermode wurde durch ein Fabry-Perot-Interferometer überwacht. Auch dieser Laser wird durch eine Glasfaser geleitet. Nach der Aufteilung in zwei

¹¹Dieser Laser wurde uns freundlicherweise von Dennis Weise und Oliver Vogelsang zur Verfügung gestellt.

¹²Die Ausgangsleistung des Lasers beträgt 1.5 W, sie wird aber durch 2 „single mode“ Glasfasern und einen akusto-optischen Modulator auf 300 mW verfügbare Leistung am Experiment reduziert.

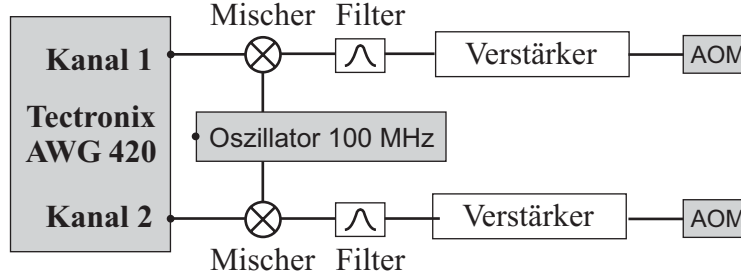


Abbildung 1.7: RF-Elektronik zur Kontrolle der Stehwellen-AOMs (siehe Text).

Strahlen durchlaufen beide jeweils einen AOM¹³. Die gebeugten Strahlen werden mit dem Wellenleiter überlappt, wobei sie in entgegengesetzter Richtung laufen. Durch Interferenz der beiden Strahlen entsteht das gewünschte periodische Potential. Die Strahlradien betragen je $122(\pm 5) \mu\text{m}$. Die Ortsabhängigkeit ihrer Intensität ist entlang des Wellenleiters zu vernachlässigen. Daher können die Wellenfronten als ebene Wellen approximiert werden.

Haben die beiden linear polarisierten Laserstrahlen einen Frequenzunterschied $\delta\omega$ so entsteht durch die Interferenz ein zeitabhängiges Intensitätsmuster $I(x, t)$. Aus Gleichung 1.8 ergibt sich daraus die Form des erzeugten Potentials

$$V_{sw}(x, t) = V_0 \sin\left(2k_L x - \frac{\delta\omega}{2}t\right), \quad V_0 = \frac{\hbar\Gamma^2}{I_S} \sqrt{I_1 I_2} \frac{2}{3} \left(\frac{1}{\delta D_2} + \frac{1}{2\delta D_1}\right). \quad (1.14)$$

Hierbei bezeichnen $I_{1,2}$ die Intensität und $k_L = \frac{2\pi}{\lambda}$ den Wellenvektor der Laserstrahlen mit der Wellenlänge λ . Man erhält demnach ein eindimensionales, sinusförmiges periodisches Potential [67, 56] welches sich mit der Geschwindigkeit $v = \frac{\delta\omega}{4k_L}$ bewegt.

Die Laserstrahlen durchlaufen jeweils einen AOM, damit ihre Intensität und Frequenz zeitlich variiert werden können, man hat somit volle Kontrolle über die Potentialstärke und die Geschwindigkeit der Stehwelle, die den Quasiimpuls der Atome im periodischen Potential bestimmt. Die Modulationsfrequenz für die AOMs wird nach dem in Abb. 1.7 gezeigten Aufbau erzeugt. Die beiden Ausgänge eines „Arbitrary Waveform Function Generator“ (AWG)(Tektronix AWG 420), die eine Grundfrequenz um 10 MHz besitzen, werden zunächst mit einer 100 MHz Trägerfrequenz gemischt und nach Extraktion der 110 MHz-Komponente¹⁴ verstärkt. Die resultierenden Signale dienen dann als Eingangsspannung für die AOMs. Der AWG kann mit nahezu beliebigen Ausgangssignalen programmiert werden, die mit einer frei wählbaren Samplingfrequenz (< 200 MHz) abgespielt werden. Dies ermöglicht die phasenkontinuierliche Verstimmung der beiden Stehwellen-Laserstrahlen gegeneinander und damit die phasenkontinuierliche Änderung der Geschwindigkeit des periodischen Potentials. Die gewählte Grundfrequenz der beiden Kanäle von 10 MHz erlaubt, bei einer typischen Samplingfrequenz von 150 MHz und einer Anzahl von einer Million Spannungswerten, die Erzeugung genügend langer und genügend frequenzgenauer ($\delta\omega_{min} \simeq 2\pi \times 150$ Hz) Sequenzen.

¹³Crystal Technology 3110-125, 110 MHz

¹⁴Diese entspricht der Zentralfrequenz der AOMs. Der Filter besteht aus einem Chebyshev Bandpass-Filter 3. Ordnung [68].

Analog zum Wellenleiter ergibt sich näherungsweise die Photonen-Streurate für das optische Gitter zu

$$\Gamma_s = \frac{\Gamma^3 \sqrt{I_1 I_2}}{2I_S} \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{1}{\delta_{D1}^2} + \frac{1}{2\delta_{D1}^2} \right) \quad (1.15)$$

mit den entsprechenden Werten für die Verstimmung δ_i des Lasers gegenüber der D1 bzw. D2-Linie. Die Wellenlänge des Lasers lag im Bereich zwischen 760 nm und 805 nm, wobei sorgfältig darauf geachtet wurde, dass die spontane Emissionsrate nach Gleichung 1.15 immer kleiner als 1 Hz und somit vernachlässigbar war. Die Variation der Wellenlänge des Stehwellenlasers ist für die Experimente nicht erforderlich. Sie ergab sich vielmehr aus der Notwendigkeit das Lasersystem eines anderen Experiments benutzen zu müssen. Die Benutzung blauverstimmter ($\lambda < 780$ nm) periodischer Potentiale hat den Vorteil, dass die Atome aus den Intensitätsmaxima der Stehwelle herausgetrieben werden und die Streurrate bei gleicher Potentialtiefe gegenüber rotverstimmten Lasern reduziert ist. Diese Korrektur ist abhängig von der Stärke und der Geschwindigkeit des Potentials, sie ist in Gl. 1.15 nicht berücksichtigt.

1.4.3 Aufbau um die Glaszelle

Der in Abbildung 1.1 gezeigt Gesamtaufbau enthält im wesentlichen Elemente, die zur Erzeugung des Kondensats in der Magnetfalle notwendig sind. Zur besseren Orientierung ist in Abb. 1.8 der Aufbau um die Glaszelle, in der die Experimente stattfinden, vergrößert dargestellt. Die Optik und die Magnetfeldspulen für die 3d-MOT und die Magnetfalle sind nicht mehr eingezeichnet. Die beiden Dipolfallenlaser (Wellenleiter und Haltestrahl) kreuzen sich am Ort der Magnetfalle. In dieser 3-dimensionalen optischen Falle wird das BEC erzeugt. Nach Einschalten der Stehwelle, die sich entlang des Wellenleiter erstreckt, wird der Haltestrahl ausgeschaltet, das Kondensat kann frei im periodischen Potential entlang des Wellenleiters propagieren. Nach variabler Zeit wird das Wellenpaket nachgewiesen, indem für kurze Zeit ein resonanter Abbildungslaser eingeschaltet und auf eine hochempfindliche CCD-Kamera abgebildet wird. Aus dem absorbierten Licht kann die Dichteverteilung der Materiewelle berechnet werden.

1.5 Absorptionsabbildung von kalten Atomen

Die Methode der Absorptionsabbildung

Alle Informationen über die ultrakalte atomare Wolke werden aus der soeben angesprochenen Dichteverteilung, die man aus den Absorptionsmessungen erhält, gewonnen. Dabei wird das Kondensat durch das resonante Licht aufgeheizt und somit zerstört. Es wurden in den letzten Jahren auch nicht destruktive Messmethoden, wie z.B. die Phasenkontrastabbildung entwickelt. Sie sind jedoch besonders für Experimente mit einer großen ($> 10^5$) Anzahl an Atomen geeignet, während sich diese Arbeit auf Kondensate mit weniger als 10^5 Atomen konzentriert. Einen Überblick über nicht destruktive Methoden gibt z.B. Ketterle et al. [69, 9].

In Abb. 1.8 ist das verwendete Abbildungssystem schematisch eingezeichnet. Der Abbildungslaserstrahl hat eine Strahltaile von 1.8 mm, die Intensität ist somit über die Größe der atomaren Wolken ($< 300 \mu\text{m}$) konstant. Er ist σ^+ polarisiert und resonant mit dem ($F = 2 \rightarrow F' = 3$ -Übergang der D_2 -Linie). Man benutzt diesen, da er von allen

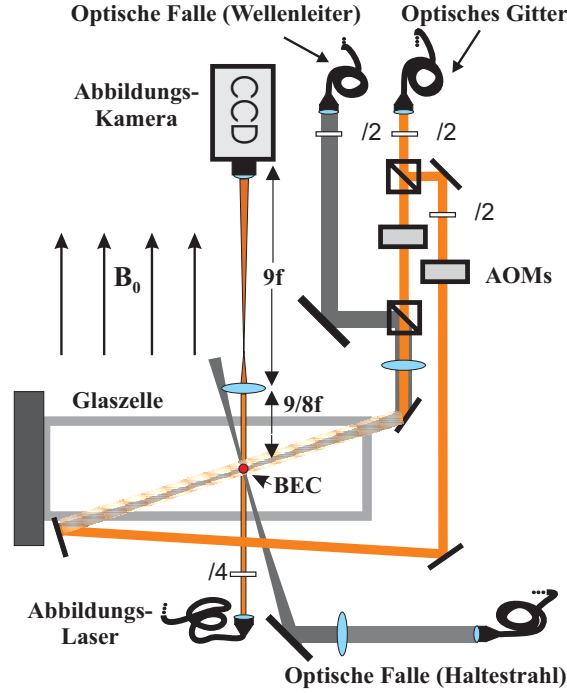


Abbildung 1.8: Schematischer Aufbau der optischen Potentiale und der Abbildungsoptik um die Glaszelle. Die Magnetfeldspulen und die MOT-Optik sind nicht dargestellt. Das BEC wird in der kombinierten Dipolfalle aus Wellenleiter und Haltestrahl erzeugt. Durch das Abschalten den Haltestrahls wird das Kondensat in den eindimensionalen Wellenleiter entlassen. Diesem ist zusätzlich das periodische Potential zur Änderung der Materiewellendispersion überlagert. Nach variabler Propagationszeit wird die Dichteverteilung des BEC durch die Methode der Absorptionsabbildung nachgewiesen.

Übergängen der stärkste und zudem geschlossen ist. Um die Atome auch in der Dipolfalle spinpolarisiert im $F = 2$ -Zustand zu halten, legt man ein homogenes Magnetfeld B_0 in Richtung des Abbildungstrahl an. Bildet man die Wolke in der TOP-Falle ab, so wird die Quantisierungsachse der Atome durch das rotierende Biasfeld vorgegeben. In diesem Fall muss der Abbildungspuls mit der Rotationsfrequenz des Biasfelds synchronisiert sein, um die σ^+ -Polarisation zu gewährleisten, wobei die Pulsdauer mit ($\Delta t = 5 \mu\text{s}$) sehr viel kürzer als die Periode der Rotation ist.

Ein Teil des Laserlichts wird durch die Wolke absorbiert, die transmittierte Intensität wird über eine Linse (Durchmesser 3 cm, Brennweite 8 cm) auf eine CCD-Kamera abgebildet (Princeton Instruments NTE/CCD-512TK), wobei die Wolke 8-fach vergrößert wird. Die einzelnen Pixel des CCD-Array haben eine Größe von $24 \mu\text{m} \times 24 \mu\text{m}$, die Quanteneffizienz beträgt $\simeq 30\%$. Die Materiewelle wird durch den Impulsübertrag der absorbierten Photonen aufgeheizt. Allerdings ist die Verbreiterung der Wolke während der Dauer des Abbildungspulses sowohl in longitudinaler als auch in transversaler Richtung zu vernachlässigen¹⁵.

Bei jedem experimentellen Durchgang werden drei Bilder aufgenommen: ein Bild der

¹⁵Die maximale Verbreiterung in Richtung des Abbildungslasers ist mit $\Delta x < \frac{1}{4}\Gamma v_r \Delta t^2 = 1.3 \mu\text{m}$ sehr

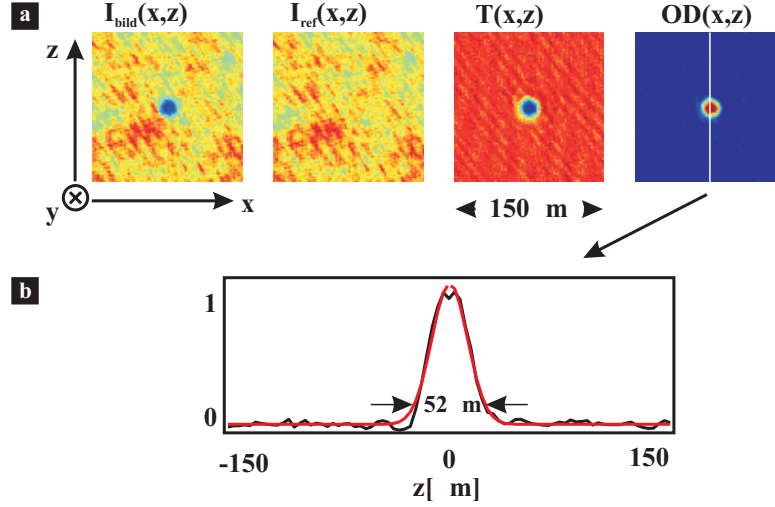


Abbildung 1.9: Absorptionsabbildung kalter Atome: (a) Dargestellt sind die, mit der CCD-Kamera aufgenommenen, Verteilungen $I_{\text{bild}}(x, z)$ (mit Wolke) und $I_{\text{ref}}(x, z)$ (ohne Wolke) der Laserintensität. Aus diesen wird die relative Transmission $T(x, z)$ und die optische Dichte $OD(x, z)$ bestimmt, die zur Berechnung der Atomzahl der Kondensate dienen. (b) Die Größe der Wolke wird ermittelt durch Approximation der Querschnitte (schwarz) durch die optische Dichte mittels gaußverteilter Kurven (rot). Alle Bilder sind Falschfarbendarstellungen der betrachteten Größen.

Intensität $I_{\text{bild}}(x, z)$ des Lichts in Anwesenheit der Atome, ein Referenzbild der Intensitätsverteilung im Laserstrahl $I_{\text{ref}}(x, z)$ ohne Atome, und ein Hintergrundbild $I_b(x, z)$, bei dem das CCD-Array durch den Shutter der Kamera verdunkelt ist. Mit Hilfe der drei Aufnahmen wird zunächst die ortsabhängige transmittierte relative Intensitätsverteilung

$$T(x, z) = \frac{I_{\text{bild}}(x, z) - I_b(x, z)}{I_{\text{ref}}(x, z) - I_b(x, z)} \quad (1.16)$$

bestimmt. Zur Illustration sind in Abb. 1.9(a) Falschfarbendarstellungen von $I_{\text{bild}}(x, z)$, $I_{\text{ref}}(x, z)$ und $T(x, z)$, sowie der optischen Dichte $OD(x, z) := -\log(T(x, z))$ für ein Kondensat mit $3 \cdot 10^4$ Atomen im freien Fall (nach 13 ms Fallzeit) gezeigt¹⁶. Durch die Berechnung der Transmission nach Gl. 1.16, werden sowohl das Streulicht als auch stationäre Interferenzmuster im Laserstrahl, die durch die Abbildungsoptik hervorgerufen werden und sowohl in I_{bild} als auch in I_{ref} an der selben Stelle auftreten, weitgehend eliminiert. Ebenso wird die von Pixel zu Pixel unterschiedliche Hintergrundzählrate des CCD-Arrays durch Subtraktion von I_b aus den Bildern berücksichtigt. Zeitabhängige Interferenzmuster, z.B. durch Schwingungen der Glaszelle verursacht, sind somit jedoch nicht zu erfassen. Sie begrenzen die Qualität der auszuwertenden Bilder. Aus der Transmission oder aus der optischen Dichte (s. unten) wird die Atomzahl des Kondensats

viel kleiner als die Tiefenschärfe. In transversaler Richtung ist $\Delta x < \sqrt{\frac{1}{3}} v_r \Delta t^{3/2} = 230 \text{ nm}$ („random walk“-Modell) sehr viel kleiner als das Auflösungsvermögen der Abbildung. Hierbei bezeichnet $v_r = 5.9 \text{ mm/s}$ die Rückstoßgeschwindigkeit der Atome bei Absorption eines Photons.

¹⁶Das Hintergrundbild $I_b(x, z)$ wurde nicht dargestellt, da es nur das Rauschen des verwendeten CCD-Chips enthält.

bestimmt. In Abb. 1.9(b) ist als Beispiel für die Größenbestimmung ein Querschnitt (schwarz) (mit gaußverteilter Fitkurve, rot) durch die optische Dichte gezeigt (weißer Streifen in $OD(x, z)$). Man beachte, dass der Wellenleiter nicht in der Fokalebene der Abbildung liegt, sondern mit dieser einen Winkel von 23° einschließt. Man beobachtet nicht direkt die Dichteverteilung im Wellenleiter, sondern deren Projektion auf die Fokalebene. Auf Grund der Symmetrie der verwendeten Fallen¹⁷ kann aus dem zweidimensionalen CCD-Bild auch auf die Ausdehnung der Wolke in y -Richtung geschlossen werden.

Man kann aus $T(x, z)$ die Dichteverteilung wie folgt bestimmen: die spontane Streurrate pro Atom beträgt

$$R = \frac{s(y)\Gamma}{2(1 + s(y) + (\frac{2\delta}{\Gamma})^2)}, \quad (1.17)$$

wobei $s(y) = I(y)/I_S$ das, von der Eindringtiefe y abhängige Verhältnis aus der Intensität zur Sättigungsintensität und δ die Verstimmung gegenüber der Resonanz darstellt. Daraus erhält man den relativen Intensitätsabfall pro Längeneinheit dy

$$\frac{dI(y)}{I(y)} = -\rho(y)\sigma(y)dy \quad (1.18)$$

wobei ρ die atomare Dichte und

$$\sigma(y) = R \frac{h\nu}{s(y)I_S} = \frac{\Gamma h\nu}{2I_S} \frac{1}{1 + s(y) + (\frac{2\delta}{\Gamma})^2} \quad (1.19)$$

den Wirkungsquerschnitt für die Absorption des Laserlichts mit der Frequenz ν darstellt.

Deduktion der Atomzahl bei kleiner Abbildungsintensität

Idealerweise werden die Parameter Leistung und Verstimmung so eingestellt, dass $s_0 = s(y=0) \ll (1 + (\frac{2\delta}{\Gamma})^2)$ gilt. Die Streurrate ist dann proportional zur Intensität, d.h. der Wirkungsquerschnitt $\sigma_0 = \frac{\Gamma h\nu}{2I_S}$ ist konstant und man kann Gl. 1.18 elementar integrieren. Dabei nutzt man aus, dass die Transmission T_{xz} nicht von der Dichteverteilung entlang der y -Achse, sondern nur von der Flächendichte

$$N_{xz} = \int \rho(x, y, z)dy \quad (1.20)$$

abhängt, woraus man

$$I(x, z) = I_0 \exp(-\sigma_0 N_{xz}) \quad (1.21)$$

erhält. Unter Berücksichtigung der Vergrößerung M der Abbildung und der Fläche A der Pixel erhält man somit die Anzahl der Atome, die auf ein Pixel der Kamera abgebildet werden

$$N_{\text{pixel}}(x, z) = \frac{A}{\sigma M^2} OD(x, z) \quad (1.22)$$

Die gesamte Atomzahl in der Wolke ergibt sich entsprechend durch Summation über alle Pixel. Diese Methode hat den großen Vorteil, dass sie unabhängig von der Intensität des Abbildungslaserstrahls ist.

¹⁷Die Magnetfalle ist symmetrische in (x, y) -, der Wellenleiter in (y, z) -Richtung.

Neben der Forderung $s_0 \ll (1 + (\frac{2\delta}{\Gamma})^2)$ wünscht man sich eine optische Dichte des Ensembles von $OD \sim 1$, da in diesem Bereich das Signal/Rauschverhältnis i.A. am größten ist¹⁸[9]. Beide Bedingungen zusammen führen (je nach Dichte und Größe des Ensembles) zu einer Verstimmung $\delta \neq 0$, welches zu einer Verminderung der Abbildungsqualität durch zusätzliche Linseneffekte innerhalb der Wolke [8, 32, 70, 71] führt. Ist die Wolke sehr viel größer als die Beugungsstruktur, so kann man den Effekt vernachlässigen. In unserem Experiment werden jedoch gerade kleine Wellenpakete beobachtet, man muss deshalb auf Resonanz abbilden, was je nach Intensität $I = s_0 I_s$ dazu führt dass Gl.1.18 numerisch integriert werden muss. Dadurch treten signifikante Abweichungen von Gl. 1.22 auf. Zudem muss in diesem Fall die Intensität des Laserstrahl geeicht werden.

Deduktion der Atomzahl bei hoher Abbildungsintensität

Im Folgenden sei eine resonante Abbildung $\delta = 0$ angenommen. Gleichung 1.18 kann unter der Voraussetzung $s(y) \gg 1$ wiederum leicht gelöst werden. Die Streurrate ist konstant $R = \Gamma/2$, man erhält als transmittierte Intensität

$$I(x, z) = I_0(1 - \sigma N_{xz}), \quad \sigma = \frac{\hbar\nu\Gamma}{2s_0 I_S} \quad (1.23)$$

und daraus die Atomzahl

$$N_{\text{pixel}}(x, z) = \frac{A}{\sigma M^2}(1 - T(x, z)). \quad (1.24)$$

Diese Relationen gelten natürlich nur solange $s(y) \gg 1$ für alle y erfüllt ist. Die beiden Näherungen Gl. 1.22 und Gl. 1.24 stellen die Extrema der Atomzahlbestimmung dar, der wirkliche Zahlenwert, numerisch durch Lösung von Gl. 1.18 bestimmt liegt dazwischen.

In Abb. 1.10 sind zwei typische experimentelle Situationen verglichen. Resonante Abbildung mit $s_0 = 10$ bzw. $s_0 = 1$ bei einer Dichte von $\rho = 2 \cdot 10^{12}/\text{cm}^3$. Aufgetragen ist die Intensität $T(y) = s(y)/s_0$ in Abhängigkeit der Eindringtiefe y . Die Dichte der Wolke kann dabei o.B.d.A als konstant angenommen werden¹⁹. Für die hohe Intensität $s_0 = 10$ stimmen wirkliche Intensitätsabnahme (schwarz) und die aus Gl. 1.23 berechnete bis zu optischen Dichten von $OD = 1.5$ gut überein. Die Annahme eines konstanten Wirkungsquerschnitts (blau) führt hingegen mit steigender optischer Dichte zu höheren Abweichungen. Eingezeichnet ist eine gestrichelte Hilfslinie bei einem Wert $OD = 1$. Der Unterschied in der Position an der dieser Wert erreicht wird, spiegelt den Unterschied in der Atomzahlbestimmung wieder (schwarze, rote und blaue senkrechte Linien für die drei Modelle). Aus Gl. 1.22 ergibt sich je nach optischer Dichte eine um den Faktor

$$F = \frac{OD(x, z)}{1 - \exp(-OD(x, z))} \quad (1.25)$$

erhöhte Atomzahl gegenüber Gl. 1.24.

¹⁸Bei welcher optischen Dichte das maximale Signal/Rauschverhältnis erreicht wird, hängt vom Rauschen der Kamera, der Qualität des Abbildungslasers und zeitabhängigen Interferenzeffekten durch mechanische Instabilitäten des Aufbaus ab. Der angegebene Wert $OD = 1$ ist jedoch ein guter Richtwert.

¹⁹Liegt im Experiment eine Flächendichte N_{xz} vor, so liest man die Transmission $T(x, z)$ für die verschiedenen Modelle an der Position $y = N_{xz}/\rho$ ab.

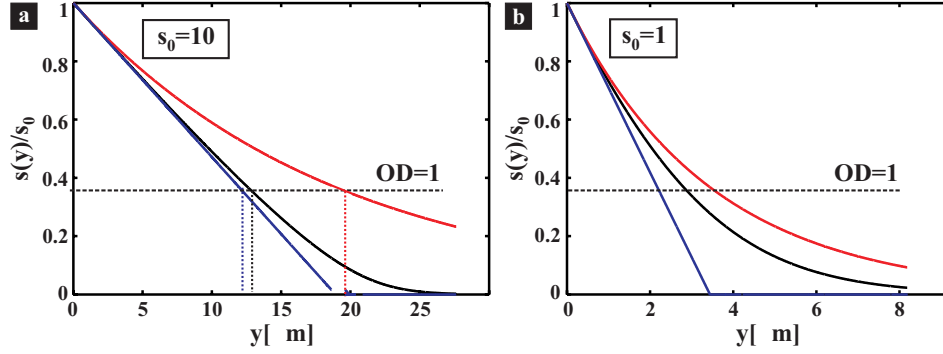


Abbildung 1.10: Transmissionskurven eines resonanten Laserstrahls in Abhängigkeit der Eindringtiefe beim Durchgang durch eine Wolke konstanter Dichte $\rho = 2 \cdot 10^{12}/\text{cm}^3$. Verglichen werden die beiden Näherungsmodelle nach Gl. 1.22 (rot) und Gl. 1.24 (blau) mit der wirklichen Intensitätsabnahme (schwarz). (a) Für $s_0 = 10$ führt die Annahme einer konstanten Streurate (blau) zur besseren Übereinstimmung mit der Theorie als die Annahme eines konstanten Wirkungsquerschnitts (rot). (b) Für $s_0 = 1$ sind beide Modelle nicht geeignet, wobei die Annahme eines konstanten Wirkungsquerschnitts (rot) für hohe optische Dichten immer besser erfüllt wird.

Bei niedriger Intensität $s_0 = 1$ wird mit abnehmender Intensität zunehmend das Modell konstanten Wirkungsquerschnitts richtig, dennoch zeigen sich auch in diesem Falle signifikante Abweichungen der wahren Intensitätsabnahme von den beiden Modellen. Da die optische Dichte der abgebildeten Wolken über das aufgenommene Bild variiert, müsste zur genauen Berechnung der Atomzahl Gl. 1.18 für jeden Bildpunkt einzeln integriert werden, alternativ kann der Fehler aus der maximalen optischen Dichte abgeschätzt werden. Die Intensität $I = s_0 I_S$ des abbildenden Laserstrahls muss zur Bestimmung von $\sigma(y)$ bekannt sein. Sie kann aus jeder Aufnahme von $I_{\text{bild}}(x, z)$ bestimmt werden, nachdem die CCD-Kamera mit einem Laserpuls bekannter Intensität und Dauer geeicht wurde.

Längeneichung des Abbildungssystem

Vor der Diskussion des Auflösungsvermögens der Abbildungsoptik, soll zunächst kurz die Bestimmung des Vergrößerungsfaktors M erörtert werden. Die Vergrößerung kann zwar ungefähr anhand der Bild- und Gegenstandsweite berechnet werden, genauer ist jedoch eine direkte Messung. Man lässt dazu Bose-Einstein Kondensate für variable Zeit im Feld der Schwerkraft frei fallen. In Abbildung 1.11 sind die Resultate für Fallzeiten von bis zu 15 ms mit einer Zeitauflösung von einer Millisekunde gezeigt. Da die Größe des CCD-Chips bekannt ist, lässt sich aus der Fallhöhe die Vergrößerung (hier $M = 8.17 \pm 0.028$) berechnen. Im gezeigten Bild ist diese in die Ordinate bereits eingerechnet. Betrachtet man die Bilder genauer, so erkennt man auf den ersten fünf Bildern Beugungsringe, das frei expandierende BEC ist zu diesem Zeitpunkt noch kleiner als das Auflösungsvermögen.

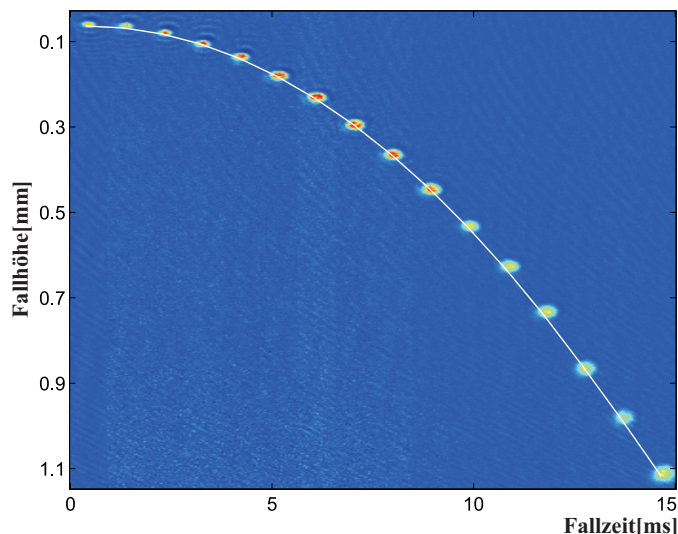


Abbildung 1.11: Längeneichung des Abbildungssystems: Gezeigt sind Kondensate im freien Fall für verschieden Zeiten. Zur Veranschaulichung sind die einzelnen Bilder horizontal versetzt. Aus der bekannten Größe des CCD-Chips ergibt sich die Vergrößerung $M=8.17\pm 0.028$ des Systems.

Korrekturen durch das begrenzte Auflösungsvermögen

In den Verteilungen für die Transmission $T(x, z)$ und die optische Dichte $OD(x, z)$ werden unvermeidbare Beugungsstrukturen sichtbar, falls die abzubildenden Objekte kleiner als das Auflösungsvermögen sind. Auch dies muss bei der Bestimmung der Größe und der Dichte der Wolke berücksichtigt werden. Noch deutlicher als in Abb. 1.11 werden die Beugungsstrukturen, wenn man ein Kondensat mit sehr großem Verhältnis von axialer zu transversaler Größe abbildet.

In Fig. 1.12 (a) ist ein im Wellenleiter expandiertes Kondensat mit $N = 3 \cdot 10^4$ Atomen nach einer Expansionszeit von 100 ms gezeigt. Es besitzt eine (berechnete) transversale Breite von ca. $3 \mu\text{m}$ und eine maximale optische Dichte von $OD \simeq 2$. Deutlich ist die Beugungsstruktur in z -Richtung zu erkennen. In Grafik (b) ist die relative absorbierte Intensität $1 - T(x, z)$ entlang eines Querschnitts in z -Richtung (weiße Linie in (a)) dargestellt. Daraus lässt sich die aufgelöste Größe zu $\sigma_0 = 8.5 \mu\text{m}$ bestimmen, wobei σ_0 die $1/e^2$ -Breite der gefitteten Gaußkurve (rot) darstellt. Das Auflösungsvermögen nach dem Rayleighkriterium liegt für diesen Fall ungefähr bei $12 \mu\text{m}$. Auf Grund der Expansion aus der Fokalebene der Abbildung heraus, steigt zudem die aufgelöste Breite, falls die Wolke den Bereich der Tiefenschärfe verlässt. In Bild (c) sind dazu die Breiten $\sigma(x)$ der Querschnitte in z -Richtung in Abhängigkeit der x -Position dargestellt. Deutlich ist zu erkennen, dass die Abbildung nicht auf das Zentrum sondern auf den Rand der Wolke fokussiert ist²⁰. In Bild (d) ist die berechnete (eindimensional, in Fraunhofer-Näherung) relative absorbierte Intensität durch eine Wolke der genannten Größe mit einer optischen Dichte von $OD = 2$ gezeigt. Um die Abstände der Beugungsordnungen richtig

²⁰Schlussendlich stellt die gezeigte Analyse die beste Methode dar, die Abbildungsoptik auf eine bestimmte Position im Wellenleiter scharf zu stellen.

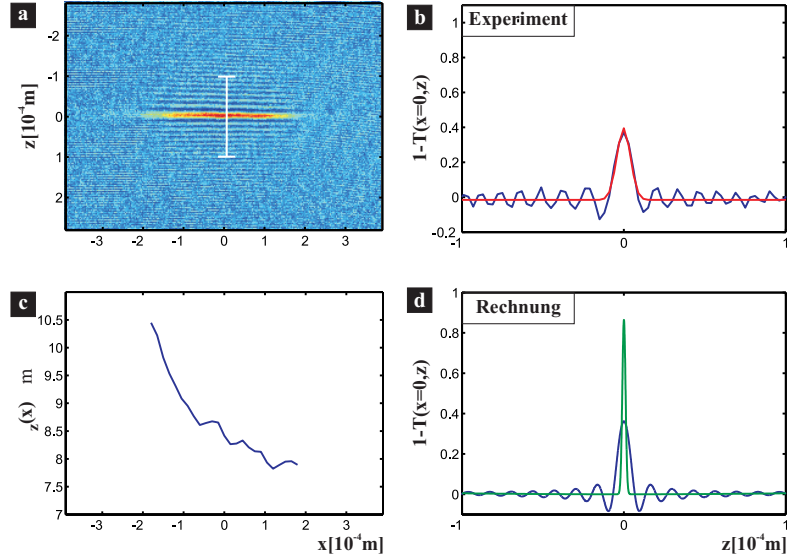


Abbildung 1.12: Auflösungsvermögen der Abbildungsoptik: (a) Abbildung eines im Wellenleiter expandierten BEC mit einer transversalen Breite von $3 \mu\text{m}$. Deutlich sind in transversaler Richtung Beugungsstrukturen zu erkennen, das Auflösungsvermögen des Abbildungssystems ist deutlich geringer als die Breite der Wolke. (b) Aus einem Querschnitt entlang der weißen Linie in Bild (a) bestimmt man die aufgelöste Breite durch Anpassung einer Gaußfunktion (rot) an die gemessene Kurve (blau). Sie beträgt an dieser Stelle $\sigma_0 = 8.5 \mu\text{m}$. (c) Die Breite des Kondensats ist größer als der tiefscharfe Bereich der Abbildung. Die gezeigte Kurve stellt die gefittete Breite für verschiedene Querschnitte entlang der x -Position der Wolke dar. Die minimale Auflösung am rechten Rand der Wolke beträgt ca. $7.8 \mu\text{m}$. (d) berechnete Transmission eines Laserstrahls durch eine Wolke der gegebenen Größe, wobei die numerische Apertur des Abbildungssystems zur Anpassung der Rechnung an das Experiment als freier Parameter dient. Die grüne Kurve stellt zum Vergleich die Transmission für ein ideales Abbildungssystem dar.

wiedergzugeben, musste dazu eine numerische Apertur der Linse von $NA = 0.06$ angenommen werden. Aus den Eigenschaften der Abbildungslinse (Brennweite $f = 8 \text{ cm}$, Durchmesser $D = 3 \text{ cm}$) erhält hingegen den Wert $NA = 0.19$. Das Abbildungssystem ist demnach deutlich nicht beugungsbegrenzt, sondern durch (vermutlich sphärische) Abberation limitiert. Gegenwärtig wird dieses optimiert, um die Qualität der Größen- und Atomzahlbestimmung für räumlich kleine Kondensate zu verbessern.

Bestimmung der Phasenraumdicke

Die Phasenraumdicke von Gasen weit oberhalb der kritischen Temperatur T_c lässt sich bestimmen, indem man die Wolke direkt in der Magnetfalle abbildet. Die maximale Dichte

$$\rho_{max} = \frac{\sqrt{8}N}{\pi^{3/2}\sigma_x^2\sigma_z} \quad (1.26)$$

erhält man durch Bestimmung der Atomzahl N und der $1/e^2$ -Breiten $\sigma_{x,z}$ aus den Absorptionsbildern, wobei aus Symmetriegründen $\sigma_x = \sigma_y$ angenommen wurde. Die Tem-

peratur T kann man bestimmen, indem man die gemessene räumliche Verteilung mit der erwarteten Boltzmann-Verteilung eines Gases im thermischen Gleichgewicht im Potential der Magnetfalle (s. Gl.1.3) vergleicht:

$$\rho(r) \propto \exp \left[-\frac{\mu_B B_r^2 (x^2 + y^2 + 8z^2)}{4B_0 k_B T} \right] = \exp \left[-\left(\frac{2x^2}{\sigma_x^2} + \frac{2y^2}{\sigma_y^2} + \frac{2z^2}{\sigma_z^2} \right) \right] \quad (1.27)$$

Da die Raumrichtungen unabhängig voneinander sind erhält man für jede eine Gleichung, die jedoch identische Ergebnisse erzeugen, falls das Verhältnis der Breiten der Wolke ihrem thermischen Gleichgewichtswert $\sigma_x = \sigma_y = \sqrt{8}\sigma_z$ entspricht. Bei bekannten Werten der Magnetfallenparameter B_0 und B_r erhält man z.B. durch Betrachtung der x -Richtung die Temperatur

$$T = \frac{\mu_B B_r^2 \sigma_x^2}{8B_0 k_B} \quad (1.28)$$

und damit die Phasenraumdicke

$$\Omega = \rho_{max} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T} \right)^{3/2}. \quad (1.29)$$

Bei Temperaturen in der Nähe oder unterhalb von T_c wird die atomare Wolke so klein und optisch so dicht, dass eine zuverlässige Bestimmung der Atomzahl und der Größe durch Absorptionsabbildung in der Magnetfalle nicht mehr möglich ist. Stattdessen bestimmt man die Temperatur indem man die Impulsverteilung der Atome misst. Schaltet man die Falle plötzlich aus, so kann die Wolke frei expandieren. Nach genügend langer Zeit hat sich die Impulsverteilung der Materiewellen in einer entsprechenden Ortsverteilung niedergeschlagen, man nennt dies eine „Time-of-Flight“ (TOF) Messung²¹. Die Methode ist besonders zuverlässig, wenn die expandierte Wolke sehr viel größer als die Anfangsgröße der Wolke in der Falle ist. Dann ist die räumliche Verteilung der expandierten Wolke direkt ein Maß für die Impulsverteilung.

Abb. 1.13 zeigt eine Time-of-Flight Messung am Beispiel einer thermischen Wolke. Thermische Ensembles aus einer harmonischen Falle zeigen bei $T \gg T_c$ eine gaußförmige Impulsverteilung. Aus der Breite $\sigma_x(t_{TOF})$ des Gauß-Fits nach der Fallzeit t_{TOF} lässt sich die Temperatur zu

$$\frac{1}{2}k_B T = \frac{1}{2}mv_x^2, \quad v_x^2 = \frac{\sigma_x^2(t_{TOF}) - \sigma_x^2(0)}{4t_{TOF}^2} \quad (1.30)$$

bestimmen. Dabei ist $\sigma_x(0)$ die Anfangsbreite der Wolke in der Falle, die entweder direkt gemessen oder selbstkonsistent über Gl. 1.28 auf die Temperatur und die Fallenparameter zurückgeführt werden kann. Auf diese Weise wurde für die Wolke in Abb. 1.13 eine Temperatur von $T = 222$ nK bestimmt. Die Atomzahl betrug $N = 1.5 \times 10^6$ Atome, die Phasenraumdicke $\Omega = 0.12$, eine Größenordnung vom kritischen Wert $\Omega_c = 2.61$ für Bose-Einstein Kondensation entfernt.

²¹Die deutsche Übersetzung „Flugzeitmessung“ wird in diesem Zusammenhang nicht benutzt.

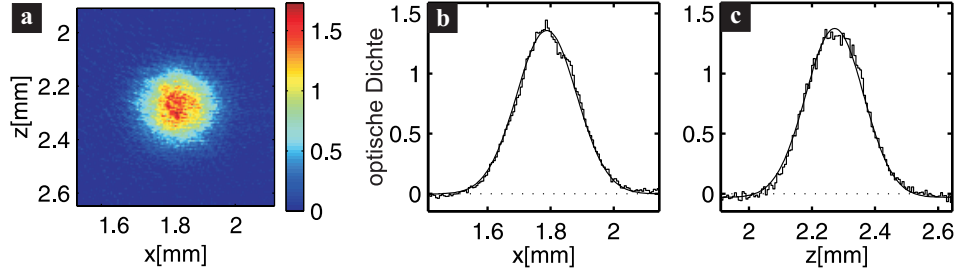


Abbildung 1.13: Beispiel für eine Time-of-Flight Messung nach einer Expansionszeit von $t_{TOF} = 18$ ms. (a) Optische Dichte $OD(x, z)$ der Atome. (b) Schnitte durch das Absorptionsbild in x - und in z -Richtung. Die Messdaten werden durch Gaußkurven approximiert. Aus den Breiten $\sigma_x = 190 \mu\text{m}$ und $\sigma_z = 184 \mu\text{m}$ der Fits erhält man die Temperatur $T = 222$ nK der Atome und daraus die Phasenraumdicke $\Omega = 0.12$.

1.6 Steuerung des Experiments

Die gesamte Experimentabfolge wird von einem Computer gesteuert. Das Steuerprogramm wurde mit Hilfe des Softwarepakets „LabView“ geschrieben, es regelt die synchrone Ausgabe von 16 analogen und 16 digitalen Ausgängen²². Damit werden über entsprechende Regelelektroniken alle wichtigen Parameter wie die Ströme in den Magnetfeldspulen, Leistung und Verstimmung der Laserstrahlen sowie das Öffnen und Schließen der Shutter gesteuert. Ebenso werden damit die Steuersignale an den Funktionsgenerator für die RF-Strahlung (Verdampfungskühlung), den Arbitrary-Waveform-Generator für die stehende Lichtwelle und die Kamera für die Absorptionsabbildung ausgegeben. Die optischen Dipolfallen, das periodische Potential und die Abbildungslaserleistung werden über PI-Regelkreise stabilisiert, um Leistungsschwankungen der Laser zu eliminieren. Ebenso wird der Strom durch die Magnetfalle über eine Transistorbank mit Rückkopplung stabilisiert, um ein Aufheizen der Wolke durch Stromschwankungen zu verhindern. Die Details der Software und der Regelelektroniken sind für das Verständnis der physikalischen Abläufe nicht entscheidend, sie werden hier nicht weiter besprochen.

1.7 Diskussion des Aufbaus

Der hier dargestellte Aufbau ist nur eine von vielen Möglichkeiten, ein Bose-Einstein Kondensat zu erzeugen. Neben der Wahl des Elements unterscheiden sich die Aufbauten vor allem in der Art der Vorkühlung und des Typus der Magnetfalle.

Als Alternative zum Funnel werden häufig so genannte „Zeeman-Slower“ [72] benutzt. Dort werden die Atome eines „heißen“ Strahls (meist aus einem Ofen) lasergekühlt, wobei die geschwindigkeitsabhängige Dopplerverschiebung durch die Zeeman-Verschiebung in einem inhomogenen Magnetfeld geeigneter Form kompensiert wird. Man kann dadurch einen Großteil der freigesetzten Atome abkühlen und fangen. Im Gegensatz dazu wird in unserem Funnel nur der niederenergetische Teil der Boltzmann-Verteilung genutzt, die Laderate der 3d-MOT ist deshalb mindestens eine Größenordnung kleiner als beim

²²Es handelt sich dabei um zwei analoge (National Instruments PCI-6713) und eine digitale Ausgabekarten (National Instruments PCI-6534) mit je 8 bzw. 16 Kanälen.

Zeeman-Slower. Eine dritte Möglichkeit besteht im so genannten Doppel-MOT-System. Statt einen kontinuierlichen Strahl zu erzeugen, transferiert man dort wiederholt die in einer ersten 3d-MOT gefangenen Atome zur zweiten MOT am Ort der Magnetfalle. Das Doppel-MOT-System hat keine relevanten Vorteile gegenüber dem Funnel, es erfordert jedoch zusätzlichen Aufwand um zwischen Ladezyklus und Transferzyklus zu wechseln. Der große Vorteil der Zeeman-Slower liegt in ihrem hohen Fluss von typischerweise 10^9 Atomen/s und einer entsprechend kurzen Ladezeit der 3d-MOT. Sie werden vor allem für Experimente verwendet, deren Ziel ein Kondensat mit möglichst hoher Atomzahl darstellt. Ihr Nachteil liegt im technologischen Aufwand und dem hohen Dampfdruck in der Ofenkammer, der eine gute Abschirmung zur BEC-Kammer erfordert. Der verwendete Funnel stellt einen guten Kompromiss zwischen einfachem Aufbau und genügend guter Laderate dar. Der größte Vorteil liegt darin, dass er bei kleinem Hintergrunddruck betrieben werden kann. Dies ermöglicht ein sehr gutes Vakuum in der BEC-Kammer und führt dort zu langen Lebensdauern ($\tau > 100$ s) der Atome in der Magnetfalle.

Bei den Magnetfallen unterscheidet man grob zwei Klassen. Im Gegensatz zur TOP-Falle benutzen Ioffe-Pritchard(IP)-Fallen [73, 74, 75] kein rotierendes sondern ein statisches magnetisches Offsetfeld zur Vermeidung der Majorana-Spin-Flips. Sie sind technologisch anspruchsvoller, allerdings enthalten die Kondensate in diesem Fallentyp in der Regel mehr Atome, da die Verdampfungskühlung sehr effizient eingesetzt werden kann [76]. Eine TOP-Falle ist hingegen einfach im Aufbau. Sie führt zudem, abgesehen von der reinen Quadrupolfalle, zum stärksten Einschluss der Atome bei gegebener räumlicher Größe der Magnetfeldspulen. Vor allem hat sie jedoch ein kleines Verhältnis von axialer zu radialer Fallenfrequenz $\omega_z = \sqrt{8}\omega_{xy}$. In IP-Fallen liegt dieses etwa eine Größenordnung höher. Wie in Abschnitt 3.1.3 beschrieben wird, kann man deshalb in TOP-Fallen räumlich kleine Kondensate ($x_0 < 15 \mu\text{m}$) herstellen, was nach Abschnitt 3.3 notwendig zur Erzeugung atomarer Solitonen ist. Dieser ursprüngliche Grund für den Bau der TOP-Falle hat mittlerweile an Bedeutung verloren, da das BEC nun in der gekreuzten Dipolfalle erzeugt wird.

Der Vollständigkeit halber sollen noch die Experimente erwähnt werden, die vom Standardschema - Vorkühlung durch Laser und Verdampfungskühlung in Magnetfallen - abweichen: nach wie vor „Exoten“ sind die einzigen Experimente ohne Laserkühlung (Wasserstoff [33, 34]), und ein Experiment, welches ohne „Umweg“ über eine Magnetfalle direkt ein Kondensat in einer Dipolfalle erzeugt [77]. Stark wachsend ist hingegen die Anzahl der Kondensate in Mikrofallen [78, 79, 80]. Dort nutzt man die starken Magnetfelder in der Nähe der elektrischen Leiterbahnen auf einem Halbleiterchip, um Atome nach Vorkühlung in einer MOT magnetisch zu fangen und zu kondensieren. Diese erlaubt den Aufbau sehr kompakter, variabler Systeme. Ein Überblick über einen Großteil der weltweit erzeugten BECs, mit vielen weiteren Links, ist auf der Homepage des Physikdepartements der Georgia Southern University zu finden [81].

Kapitel 2

Erzeugung eines Bose-Einstein Kondensats: experimenteller Ablauf und Nachweis

Nachdem im vorherigen Kapitel der experimentelle Aufbau und die grundlegenden physikalischen Mechanismen der Manipulation (Kühlen, Fangen) und Detektion kalter atomarer Wolken diskutiert wurden, beschreibt dieses Kapitel den experimentellen Ablauf zur Erzeugung eines Bose-Einstein-Kondensats. In Abschnitt 2.1 wird zunächst die Erzeugung eines BEC durch Verdampfungskühlung in der Magnetfalle erläutert. Der Nachweis, dass es sich bei der beobachteten Wolke um ein Kondensat handelt, wird in Abschnitt 2.2 erbracht. Anschließend wird der Transfer einer vorgekühlten Wolke in die optische Dipolfalle und die Kondensation in dieser beschrieben (Abschnitt 2.3). Im letzten Abschnitt 2.4 werden Experimente zur Charakterisierung der Magnet- und Dipolfalle besprochen. Die dadurch ermittelten Fallenfrequenzen bestimmen zusammen mit der Atomzahl die Eigenschaften des erzeugten Bose-Einstein-Kondensats.

2.1 Experimenteller Ablauf des Kondensationsprozesses

Der experimentelle Ablauf zur Erzeugung verdünnter Bose-Gase in magnetischen Fallen wird umfassend z.B. in einem Übersichtsartikel von Ketterle et al. [9] oder einem Buch von Pethick und Smith [13] behandelt. Deshalb wird hier nicht auf alternative Methoden oder experimentelle Details, die nicht zum physikalischen Verständnis beitragen, eingegangen. Die genannten Zahlenwerte sind als Anhaltspunkte zu verstehen, sie variieren innerhalb gewisser Grenzen je nach Zielsetzung der durchgeführten Untersuchungen. Der Aufbau erlaubt die Erzeugung eines BEC mit maximal 10^5 Atomen. Dies ist eine Größenordnung mehr als es für die in Kapitel 4 beschriebenen Experimente nötig ist. Man erhält dadurch die Freiheit die Apparatur nicht an ihrer Grenze betreiben zu müssen. Der Kondensationsprozess gelingt, auch wenn dessen einzelnen Phasen nicht optimiert sind. Die Bedingungen, die erfüllt sein müssen, damit die Kondensation eines Rubidiumgases erfolgt, lassen sich verkürzt und vereinfacht in drei Punkte fassen:

- Das Vakuum in der Apparatur muss genügend gut sein¹, um Verluste während der

¹Wie schon erwähnt sollte der Druck weniger als $< 10^{-11}$ mbar betragen.

Verdampfungskühlung durch Stöße mit dem Hintergrundgas zu minimieren.

- Die Rate, mit der das atomare Gas auf Grund von Stromschwankungen in der Magnetfalle oder durch resonantes Streulicht aufgeheizt wird, muss zu jeder Zeit des Experiments sehr viel kleiner als die Kühlleistung durch Verdampfungskühlung sein.
- Die anfängliche Atomzahl zu Beginn der Verdampfungskühlung sollte 5×10^7 Atome bei einer Phasenraumdicke von typischerweise 10^{-7} nicht unterschreiten².

Wie in Abschnitt 1.1 schon beschrieben wurde, ist die erste Bedingung in unserem Experiment sehr gut erfüllt. Das Experiment ist gegen Streulicht abgeschirmt und der Strom durch die Magnetfalle ist durch einen Regelkreis so gut ($\frac{dI}{I} < 10^{-3}$) stabilisiert, dass nur noch Punkt drei zu erfüllen bleibt. Im folgenden Abschnitt wird beschrieben, wie dies im Experiment erreicht wird. Dem Laden der magneto-optischen Falle folgt eine transiente Kompression der Wolke und eine Phase der Melassenkühlung, bevor die Atome optisch gepumpt und in die Magnetfalle transferiert werden.

2.1.1 Laden der MOT durch den kalten Atomstrahl

Zunächst wird die 3d-MOT durch den kalten Atomstrahl, der im Funnel erzeugt wird, geladen. Die Parameter des Funnels und der MOT wurden schon im Abschnitt 1.2.3 angegeben, sie sind während dieser Phase zeitlich konstant. Es hat sich herausgestellt, dass sich die Laderate der MOT erhöhen lässt, wenn zusätzlich zum Quadrupolfeld der 3d-MOT ein kleines rotierendes Biasfeld von $B_0 = 3 \text{ G}$ eingeschaltet wird³. Typischerweise beträgt die Laderate $\sim 10^7$ Atome/s, maximal wurden 5×10^7 Atome/s gemessen. Das Fluoreszenzlicht der MOT wird auf eine Photodiode abgebildet, man erhält somit ein Maß für deren Atomzahl. Sobald die MOT $\sim 2 \cdot 10^8$ Atome enthält, beginnt die „dynamische“ Phase des Experiments, während der die Änderungen der experimentellen Parameter vom Steuercomputer synchronisiert werden.

Die MOT ist nur auf eine hohe Atomzahl, nicht auf eine hohe Phasenraumdicke optimiert. Auf Grund des schwachen Magnetfeldgradienten („normalerweise“ werden magneto-optische Fallen mit Rubidium-Atomen mit einem drei-fach stärkeren Gradienten betrieben) beträgt die Dichte nur $\sim 4 \times 10^9$ Atome/cm³, eine Größenordnung weniger als es möglich wäre. Die Temperatur beträgt zu diesem Zeitpunkt $T = 160 \mu\text{K}$, die Phasenraumdicke „nur“ $\Omega = 10^{-8}$.

2.1.2 Kompression

Um die Dichte und die Phasenraumdicke zu erhöhen, schließt sich der Ladephase eine transiente Kompression an. Zunächst wird das Laserlicht für den Funnel und somit der kalte Atomstrahl abgeschaltet. Das Biasfeld wird ausgeschaltet und der Magnetfeldgradient von $B'_r = 4 \text{ G/cm}$ in 50 ms auf $B'_r = 10 \text{ G/cm}$ linear erhöht. Gleichzeitig wird die Verstimmung der MOT-Laserstrahlen von $\delta = -1.4 \Gamma$ auf $\delta = -5.2 \Gamma$ erhöht, um dichte-limitierende Prozesse durch Reabsorption von Photonen in der MOT zu unterdrücken.

²Abgesehen von Kondensaten, die in Mikrofallen erzeugt wurden, beginnt meiner Kenntnis nach keine Gruppe mit weniger als 2×10^7 Atomen die Verdampfungskühlung.

³Dadurch lässt sich der Einfangradius der MOT erhöhen.

Dies erhöht die Dichte der atomaren Wolke um eine Größenordnung auf $\sim 2 \times 10^{10}$ Atome/cm³. Die Temperatur erhöht sich zunächst ebenfalls, sie wird aber durch die folgende Melassenkühlung wieder abgesenkt. Man nennt dieses Stadium eine „compressed MOT“ oder „CMOT“ [82].

2.1.3 Optische Melasse

Bei Atomen mit magnetischer Unterstruktur kann die durch Laserkühlung erreichbare Temperatur der Wolke deutlich unter die Dopplertemperatur, welche bei Rubidium $T_D = \hbar\Gamma/2k_B = 140 \mu\text{K}$ beträgt, fallen. Der zugrundeliegende Kühlmechanismus ist die Polarisationsgradientenkühlung, welche ausführlich in [56, 83] beschrieben ist. Er funktioniert nur falls der ac stark shift größer als der Zeeman-shift ist, das Magnetfeld muss abgeschaltet werden. Solange Magnetfelder vorhanden sind, erfolgt die Kühlung in ein bewegtes Bezugssystem („moving molasses“). Deshalb ist es notwendig sowohl das Erdmagnetfeld als auch Streumagnetfelder am Ort der Atome zu kompensieren. Dazu werden drei orthogonale Spulenpaare in Helmholtzkonfiguration benutzt. Die Ströme durch diese Spulen werden eingestellt, indem die Schwerpunktsbewegung der Wolke während der Melassenphase minimiert wird. Diese Phase, in der die Temperatur auf $T \simeq 40 - 50 \mu\text{K}$ abgesenkt wird, dauert sieben Millisekunden. Der Einfluss der Gravitation auf die Wolke ist in dieser kurzen Zeit vernachlässigbar. Auf Grund der Abhängigkeit $T \propto \frac{I}{\delta}$ der Melassentemperatur von der Laserleistung I und der Verstimmung δ wird die Verstimmung der MOT-Strahlen auf $\Delta = -8\Gamma$ erhöht. Die Leistung wird zu Beginn der Polarisationsgradientenkühlung auf 65 % und schließlich innerhalb der 7 ms auf 20 % ihres Ausgangswerts abgesenkt. Am Ende der Melassenkühlung wird das Laserlicht ausgeschaltet, die Atome werden auf die „dunkle“ Verdampfungskühlung vorbereitet. Um die Atome in einer Magnetfalle fangen zu können, müssen sie noch spin-polarisiert werden. Die Phasenraumdichte beträgt zu diesem Zeitpunkt $\Omega \sim 3 \times 10^{-7}$.

2.1.4 Optisches Pumpen

In der Magnetfalle können nur Atome im ($F = 2, m_F = 1$ oder $m_F = 2$) -Zustand gefangen werden⁴, man bevorzugt auf Grund des höheren magnetischen Momentes den $m_F = 2$ Zustand. Nach der Polarisationsgradientenkühlung liegen die Atome jedoch in einem Gemisch aller m_F -Niveaus des $F = 2$ -Zustands vor. Beim optischen Pumpen wird resonantes Licht auf dem $F = 2 \rightarrow F' = 3$ -Übergang an den Atomen gestreut. Das Licht ist σ^+ -polarisiert und erhöht damit bei Absorption den Drehimpuls in Quantisierungsrichtung. Die Quantisierungsachse wird von dem wieder eingeschalteten Biasfeld von $B_0 = 3 \text{ G}$ vorgegeben. Um die σ^+ -Polarisation zu gewährleisten, erfolgt das optische Pumpen genau dann, wenn das Biasfeld in Richtung des Pumpstrahls steht. Die fünf Pumppulse sind jeweils kürzer als $2.5 \mu\text{s}$ bei einer Intensität von $\simeq 1.5 \text{ mW/cm}^2$, ihr zeitlicher Abstand entspricht der Periodendauer des Biasfelds von $100 \mu\text{s}$. Um unabhängig von Schwankungen in der Intensität des Laserstrahls zu sein, haben die Pulse keine feste Dauer. Es wird stattdessen die Energie der Pumppulse elektronisch geregelt⁵.

⁴Das Magnetfeld ist viel zu klein, um Atome im $m_F = 0$ -Zustand auf Grund des quadratischen Zeeman-Effekts gegen die Schwerkraft halten zu können.

⁵Zu Beginn der Arbeiten wurden die Pumppulse nicht geregelt, sondern hatten eine feste Dauer von $2.5 \mu\text{s}$ [50]. Die Stabilisierung verbesserte die Reproduzierbarkeit der Experimente.

Die Pulsenergie wird auf maximale Transfereffizienz, bei geringstmöglicher Aufheizung der Wolke optimiert. Da die Rückstoßenergie eines spontan emittierten Photons nur einer Temperatur von $T = 180 \text{ nK}$ entspricht, kann die Wolke ohne signifikantes Aufheizen fast vollständig polarisiert werden. Die Atome können nun von der Magnetfalle gefangen werden. Bis zum Abbilden der Wolke wird das Ensemble von jeglichem resonanten oder nahresonanten Licht abgeschirmt.

2.1.5 Einschalten der Magnetfalle

Um die Wolke beim Transfer in die Magnetfalle nicht zu Schwingungen anzuregen und dadurch aufzuheizen, müssen die Parameter der TOP-Falle an die Temperatur und Größe der Wolke angepasst werden. Die räumliche Dichteverteilung der Wolke in der TOP-Falle im thermischen Gleichgewicht sollte deshalb der gemessenen Verteilung nach der Melassenkühlphase entsprechen (engl. „mode matching“). Wie bei der Bestimmung der Phasenraumdicke in Abschnitt 1.5 erhält man durch Umformung von Gl. 1.28 eine Bedingung an die Felder der TOP-Falle⁶.

$$\frac{B_r^2}{B_0} = \frac{8k_B T}{\mu_B \sigma_x^2} = \frac{8k_B T}{\mu_B \sigma_y^2} = \frac{k_B T}{\mu_B \sigma_z^2} = 6 \text{ G/cm}^2 \frac{T[\mu\text{K}]}{\sigma_x^2[\text{mm}^2]}. \quad (2.1)$$

Hierbei ist T die gemessene Temperatur der Melasse und σ_i bezeichnet deren $1/e^2$ -Breiten in den verschiedenen Raumrichtungen. Da die Dichteverteilung in der Magnetfalle auf Grund der unterschiedlichen Fallenfrequenzen in radialer bzw. axialer Richtung asymmetrisch, die Melasse jedoch kugelsymmetrisch ist, kann die obige Bedingung nur in einer der beiden Richtungen erfüllt werden. Desweiteren muss der Radius $R = \frac{B_0}{B_r}$ des Circle-of-Death (COD) (s. Abschnitt 1.3) der Falle wesentlich größer als die Wolke sein, um anfänglich den Verlust an Atomen zu verhindern. Wünscht man einen COD, der n -fach größer als die Wolke ist, so sind der Magnetfeldgradient B_r und das Offsetfeld B_0 eindeutig festgelegt.

$$B_r = n \frac{4k_B T}{\mu_B \sigma} = 72 \text{ G/cm} \quad (n = 3, T = 50 \mu\text{K}, \sigma = 1 \text{ mm}) \quad (2.2)$$

$$B_0 = \frac{4n^2 k_B T}{\mu_B} = 27 \text{ G} \quad (n = 3, T = 50 \mu\text{K}) \quad (2.3)$$

Im Experiment werden die Werte auf eine optimale Phasenraumdicke hin optimiert. Es wurde schließlich ein Gradient von 80 G/cm und ein Offsetfeld von 23 G benutzt. Dies entspricht einer radialen Fallenfrequenz von $\omega_r = 2\pi \times 15 \text{ Hz}$ und einem Circle-of-Death Radius von $R = 2.9 \text{ mm}$. Es werden somit $\sim 10^8$ Atome magnetisch gefangen. Die Ströme in den Quadrupolspulen und in den Biasspulen werden innerhalb einer Millisekunde auf ihren Endwert geregelt⁷. Da diese Zeit sehr kurz im Vergleich zur inversen Fallenfrequenz ist, werden nur die - auf Grund der räumlichen Asymmetrie unvermeidlichen - Schwingungen angeregt.

Als letzten Schritt vor Beginn der Verdampfungskühlung wird die Dichte der Wolke nochmals gesteigert, indem der Gradient adiabatisch, also unter Beibehaltung der Phasenraumdicke, innerhalb von drei Sekunden auf 220 G/cm und das Offsetfeld auf 45 G

⁶Anders formuliert stellt dies eine Bedingung an die Frequenz der TOP-Falle dar.

⁷Die Regelzeiten werden durch die Induktivität der Quadrupolspulen bzw. durch den Gütefaktor des Schwingkreises (Biasspulen) begrenzt.

erhöht werden. Da die Rate der elastischen (thermalisierenden) Stöße proportional zur Dichte ist werden hierdurch die Startbedingungen für die Verdampfungskühlung verbessert. Die Fallenfrequenz beträgt nun radial $\omega_r = 2\pi \times 30 \text{ Hz}$ und axial $\omega_z = 2\pi \times 83 \text{ Hz}$. Der Circle of Death $R = 2.0 \text{ mm}$ ist noch immer größer als die Wolke. Durch die Kompression steigt die Temperatur der Wolke auf 100-200 μK . Die Phasenraumdicke beträgt zu diesem Zeitpunkt $\Omega \simeq 2 \times 10^{-7}$, die fehlenden sieben Größenordnungen müssen durch die Verdampfungskühlung gewonnen werden.

2.1.6 Verdampfungskühlung in der TOP-Falle

Wie schon angesprochen beruht die Methode der Verdampfungskühlung auf der selektiven Entfernung energiereicher Teilchen aus dem Ensemble. Die restlichen Atome rethermalisieren durch elastische Stöße bei einer tieferen Temperatur. Die Methode ist erfolgreich, wenn die sinkende Temperatur trotz Teilchenzahlverlust zu einer höheren Phasenraumdicke führt. Steigt die Dichte des Ensembles dabei selbst an, so thermalisieren die Atome schneller, die Methode funktioniert immer besser. Man spricht in diesem Fall von „galoppierender“ Verdampfungskühlung (engl. „runaway evaporation cooling“). Es stellt sich nun die Frage, wie die Energieselektion stattfindet. Man nutzt aus, dass sich die energiereichen Teilchen in einer Falle mit hoher Wahrscheinlichkeit am Rand der Wolke aufhalten. In einer TOP-Falle gibt es zwei Möglichkeiten, die Atome dort zu entfernen.

„Circle-of-death“-Evaporation

Zum einen besteht die Möglichkeit der Circle-of-Death (COD)-Evaporation. Der rotierende Nullpunkt des instantanen Magnetfelds mit dem Radius $R = B_0/B_r$ stellt für die Atome eine Art Loch im Potential des Magnetfeldes dar. Es gibt dort kein ausrichtendes Feld, die Atome können ihre Polarisierung ändern, Majorana Spin-Flips ausführen, und dadurch in nicht gefangene Zustände übergehen. Diese Verluste sollte das rotierende Biasfeld verhindern, hier nutzt man sie zur gezielten Kühlung aus. Durch Verkleinerung des Biasfelds B_0 wird der COD reduziert und somit der kleiner werdenden Wolke angepasst. Die Dichte steigt auf Grund der sinkenden Temperatur und der gleichzeitigen Erhöhung der Fallenfrequenz⁸. Die Circle-of-Death Kühlung ist besonders einfach zu implementieren. Man kann alleine damit die Kondensation der Wolke erreichen. Da bei der COD-Kühlung nur an einem Punkt Teilchen entfernt werden (erst zeitgemittelt entsteht ein Kreis), ist die Teilchenverlustrate allerdings ab einem bestimmten Zeitpunkt kleiner als es die kurze Thermalisierungszeit auf Grund der hohen Dichte erlauben würde. Man bedient sich daher einer effizienteren Methode, welche Atome auf einer zweidimensionalen Schnittfläche aus der Wolke entfernt.

Radiofrequenz-Evaporation

Die RF-Evaporation beruht darauf, mit Hilfe von Radiofrequenz-Strahlung Atome in nicht gefangene m_F -Zustände überzuführen. Dabei wird ebenfalls die Ortsabhängigkeit des instantanen Magnetfeldes in der TOP-Falle und damit die Ortsabhängigkeit

⁸Die erhöhte Fallenfrequenz mindert allerdings die Erniedrigung der Temperatur.

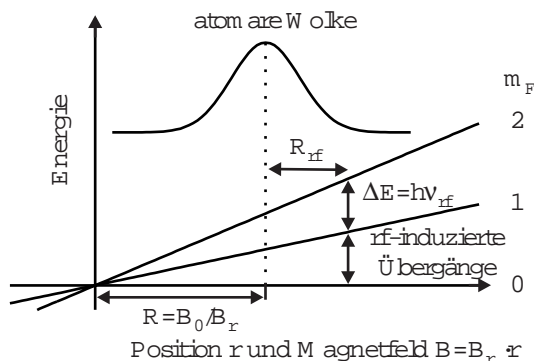


Abbildung 2.1: RF-Evaporation in der TOP-Falle. Gezeigt ist die Energie der m_F -Zustände im instantanen Magnetfeld der TOP-Falle sowie die Position der atomaren Wolke. Bei den Magnetfeldern im Experiment ist die Zeeman-Verschiebung der Niveaus linear. Die Frequenz der RF-Strahlung wird so gewählt, dass die induzierten Übergänge selektiv hochenergetische Atome vom Rand der Falle entfernen.

der Zeeman-Aufspaltung ausgenutzt. In Abb. 2.1 ist die Energie der magnetischen Unterezustände in Abhängigkeit des Abstand der Atome vom (rotierenden) Zentrum des Quadrupolfelds dargestellt. Atome am Rand der TOP-Falle erfahren periodisch höhere Magnetfelder als Atome im Zentrum. Über die Frequenz der RF-Strahlung stellt man ein, welche Atome in der Falle resonant in andere m_F -Zustände überführt werden. Indem die RF-Strahlung von hohen Frequenzen her kommend langsam verkleinert wird, kann so ebenfalls von außen in die Wolke der Atome „hineingeschnitten“ werden. Die RF-Strahlung bezeichnet man daher auch als „RF-Messer“, sein Abstand vom Fallenzentrum beträgt in radialer Richtung $R_{\text{RF}} = \frac{2h\nu_{\text{RF}}}{\mu_B B_r} - \frac{B_0}{B_r}$, wobei ν_{RF} die Radiofrequenz bezeichnet. Auf Grund der Geometrie der Magnetfalle bildet die Fläche konstanter Feldstärke ein Ellipsoid, das RF-Messer entfernt demnach die Atome auf der Schnittfläche dieses Ellipsoids mit der Wolke.

Damit die RF-Evaporation im rotierenden Bias-Feld effektiv funktioniert, muss die Rabi-Frequenz $\Omega_{\text{RF}} = \mu_B B_{\text{RF}}/\hbar$ für die RF-Übergänge sehr viel größer als die Rotationsfrequenz $\omega_{\text{TOP}} = 2\pi \times 9.8 \text{ kHz}$ des Bias-Feldes sein. Dies erfordert eine ausreichende Feldstärke B_{RF} der Radiofrequenz am Ort der Atome. Im Experiment ist typischerweise $\Omega_{\text{RF}} \simeq 2\pi \times 100 \text{ kHz}$ und damit $\Omega_{\text{RF}} \gg \omega_{\text{TOP}}$. Die Radiofrequenz wird über zwei kleine Spulen mit je zehn Windungen, die sich innerhalb der Quadrupolspulen befinden, erzeugt, sie sind schematisch in Abbildung 1.6 gezeigt.

Ablauf der Verdampfungskühlung in der magnetischen TOP-Falle

Die beiden genannten Methoden werden im Experiment nacheinander ausgeführt. Zunächst erfolgt eine Phase der COD-Kühlung, die 29 s dauert. Dabei wird das Biasfeld linear von 45 G auf 4.4 G erniedrigt, der Quadrupolgradient bleibt erhalten. Der Circle-of-Death erniedrigt sich dabei von 2 mm auf $200 \mu\text{m}$, die Fallenfrequenz erhöht sich radial auf $\omega_r = 2\pi \times 95 \text{ Hz}$. Die Dauer dieser Phase wird experimentell durch Optimierung der Phasenraumdicke am Ende der Magnetfeldrampe festgelegt. Sie muss einerseits lange genug sein, damit die verbleibenden Atome genügend Zeit zur Rethermalisierung haben,

andererseits muss der gesamte Evaporationsprozeß genügend schnell sein, um Verluste auf Grund der endlichen Lebensdauer der Atome in der Falle zu vermeiden.

Die atomare Wolke am Ende der COD-Evaporation enthält $\simeq 2 \times 10^6$ Atome bei einer Temperatur von $5 \mu\text{K}$ und einer Dichte von $\rho = 4 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$. Dies entspricht einer Phasenraumdichte von $\Omega = 2 \times 10^{-2}$. Zur Kondensation führt dann eine Phase der Radiofrequenzkühlung, welche 7.5 s andauert. Bei konstanten Magnetfeldern wird die Radiofrequenz von 7.5 MHz linear auf etwa 4 MHz erniedrigt. Bose-Einstein Kondensation tritt typischerweise bei Endfrequenzen unterhalb von 4 MHz auf. Das RF-Messer ist dann $R_{\text{RF}} = 60 \mu\text{m}$ vom Zentrum der Falle entfernt.

Bei guten Kühlparametern gewinnt man pro Größenordnung Verlust an Atomzahl mindestens zwei Größenordnungen an Phasenraumdichte. Durch diese Faustformel kann anhand der Entwicklung der Phasenraumdichte während der einzelnen Kühlphasen abgeschätzt werden, ob der Bose-Einstein Übergang erreicht wird. In unserem Experiment reduziert sich die Atomzahl von $N = 10^8$ um drei Größenordnungen auf $N = 10^5$ Atome, während die Phasenraumdichte von $\Omega = 2 \times 10^{-7}$ über den kritischen Wert $\Omega_c = 2.6$ ansteigt. Da die Bestimmung der Atomzahl, auf Grund der in Abschnitt 1.5 angesprochenen Abbildungsprobleme für hohe optische Dichten ungenau sein kann, werden über die Bestimmung der Phasenraumdichte hinaus andere Signaturen für den Nachweis der Bose-Einstein Kondensation beobachtet.

2.2 Signaturen der Bose-Einstein Kondensation

Die in den Lehrbüchern der statistischen Physik beschriebene Bose-Einstein Kondensation behandelt meist die Kondensation freier Teilchen, die im Impulsraum stattfindet. Im Ortsraum läge für das Kondensat ebenso wie für ein thermisches Gas eine homogene Dichteverteilung vor, der Nachweis könnte nicht durch Absorptionsabbildung erfolgen. Findet das Abkühlen der Wolke, wie bei allen derzeitigen Experimenten in einer Falle statt, so erfolgt zusätzlich eine Kondensation im Ortsraum. Damit ist eine einfache Bestimmung der Impulsverteilung durch die erwähnte Methode der „Time of flight“ Messungen möglich. Bei einer solchen Messung erkennt man den Übergang zum Kondensat durch einen plötzlichen Anstieg der maximalen (optischen) Dichte, als direkte Manifestation der Kondensation im Impulsraum, wenn die Temperatur unter die Übergangstemperatur sinkt. Ein weiteres Indiz ist die asymmetrische Expansion der Bosekondensierten Wolke. Die Ursache dafür ist die Asymmetrie der Falle in der das Kondensat erzeugt wird. Das Verhältnis der Heisenberg-limitierten Impulsbreiten⁹ in den verschiedenen Raumrichtungen ist invers zum Größenverhältnis des BEC in der Falle. Die Größe der Wolke wächst bei freier Expansion in derjenigen Richtung schneller an, in der das BEC anfänglich kleiner (bzw. die Fallenfrequenz größer) war. Das Verhältnis der räumlichen Breiten nähert sich mit zunehmender Expansionszeit dem Kehrwert des anfänglichen Wertes an. Diese Aussage gilt streng genommen nur für ideale Bosegase, sie bleibt aber auch qualitativ unter Berücksichtigung der Atom-Atom-Wechselwirkung richtig. Im Gegensatz zum Kondensat ist die Impulsverteilung der thermischen Wolke isotrop¹⁰. Ist die Wolke nur zum Teil kondensiert zeigt sich deshalb eine bimodale Geschwindigkeitsverteilung.

⁹Die Impulsverteilung ist die Fouriertransformierte der Ortsverteilung.

¹⁰Streng genommen gilt diese Aussage nur für $T \gg T_c$. Eine thermische Wolke im hydrodynamischen Regime kann ebenfalls anisotrop expandieren.

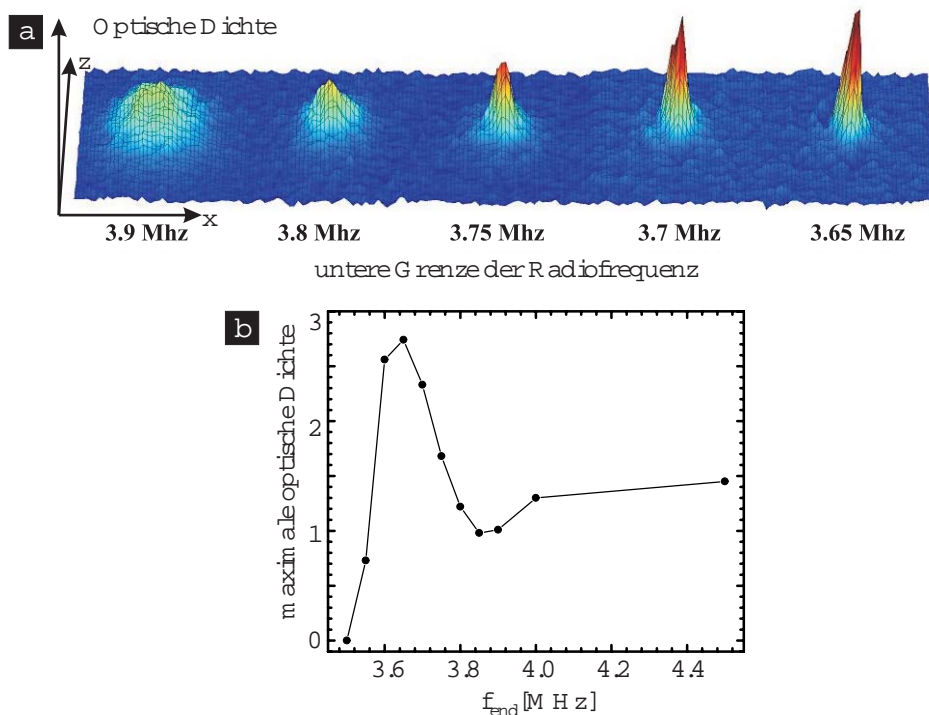


Abbildung 2.2: (a) Absorptionsbilder der ersten Bose-Einstein Kondensate in unserem Experiment, aufgenommen am 7. Dezember 2001. Gezeigt ist die optische Dichte in den time-of-flight Bildern nach 18 ms Fallzeit für verschiedene RF-Endfrequenzen. Man erkennt, wie sich mit sinkender Frequenz aus der thermischen Wolke ein räumlich kleiner Peak mit steigender Dichte als Charakteristikum der Bose-Einstein Kondensation ausbildet. Für $f_{\text{end}} = 3.65$ MHz liegt ein reines Kondensat ohne erkennbaren thermischen Anteil vor. (b) Maximale optische Dichte im Zentrum der atomaren Wolke als Funktion der RF-Endfrequenz f_{end} . Unterhalb von 3.85 MHz wird ein sprunghafter Anstieg der optischen Dichte beobachtet. Bei Frequenzen unterhalb von 3.65 MHz entfernt das RF-Messer zunehmend Atome aus dem Kondensat, es verschwindet bei $f_{\text{end}} = 3.5$ MHz.

2.2.1 Plötzlicher Anstieg der optischen Dichte

Der Übergang zum Bose-Kondensat wird beobachtet, wenn die Endfrequenz der RF-Kühlung bei einer Folge von Experimenten immer weiter erniedrigt wird. Nach Ende der Verdampfungskühlung wird die TOP-Falle innerhalb von drei Sekunden auf eine radiale Frequenz $\omega_r = 2\pi \times 15$ Hz adiabatisch entspannt¹¹. Das Gradientenfeld wird daraufhin innerhalb von $100 \mu\text{s}$ abgeschaltet und die Wolke nach 18 ms Expansionszeit abgebildet. In Abbildung 2.2(a) ist eine Reihe von Absorptionsbildern bei sinkender RF-Endfrequenz gezeigt. Deutlich erkennt man wie sich vor dem Hintergrund der thermischen Wolke unterhalb einer Frequenz von 3.85 MHz ein Kondensat bildet. Da dieses eine wesentlich schmalere Impulsverteilung als die thermische Wolke bei $T \sim T_c$ besitzt geht mit der Kondensation ein plötzlicher Anstieg der maximalen optischen Dichte in den time-

¹¹Dies geschieht durch Reduzierung des Gradientenfelds auf 80 G/cm und eine Erhöhung des Biasfelds auf 22 G.

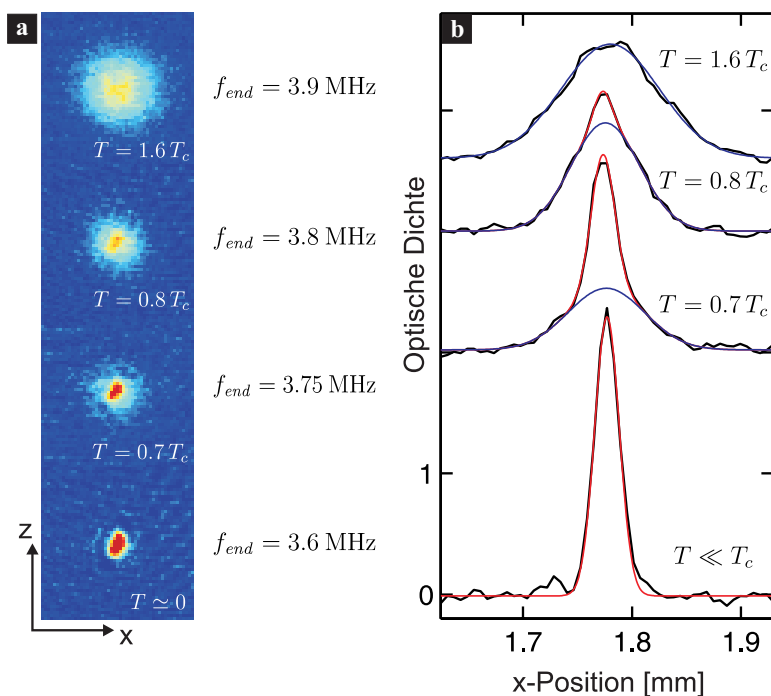


Abbildung 2.3: Time-of-flight Bilder nach 18 ms Fallzeit für verschiedene RF-Endfrequenzen. (a) Oberhalb der kritischen Temperatur T_c expandiert die atomare Wolke isotrop. Unterhalb T_c bildet sich vor dem Hintergrund des thermischen Anteils die Bose-kondensierte Phase mit kleinerer räumlicher Breite aus. Im untersten Bild liegt ein reines Kondensat vor, es ist kein Untergrund mehr zu erkennen (b) Schnitte in x -Richtung durch die Bilder aus (a) (schwarz) sowie doppelter Gauß-Fit an die thermische Wolke (blau) und das Kondensat (rot). In den mittleren Bildern wird eine bimodale Geschwindigkeitsverteilung beobachtet. Aus dem Gauß-Fit an die thermische Wolke wird die Temperatur bestimmt.

of-flight Bildern einher. Dieser ist zur Verdeutlichung in Abb. 2.2(b) dargestellt. Die maximale optische Dichte im Zentrum der Wolke steigt unterhalb von $f_{end} = 3.85$ MHz zunächst stark an, bei $f_{end} = 3.65$ MHz liegt ein reines Kondensat vor. Unterhalb davon schneidet das RF-Messer in das BEC und führt zu einem Verlust an bereits kondensierten Teilchen. Bei 3.5 MHz schneidet das RF-Messer schließlich ins Zentrum der TOP-Falle, wodurch alle Atome verloren gehen. Die Anzahl kondensierter Atome betrug bei diesem Experiment $N = 10^5$. Die theoretische Übergangstemperatur liegt für diese Atomzahl bei $T_c = 45$ nK (s. Abschnitt 3.1.1).

2.2.2 Bimodale Geschwindigkeitsverteilung

Die Impulsverteilung eines Kondensats ist sehr viel schmäler als diejenige der thermischen Wolke. Deshalb erhält man für teilweise kondensierte Ensembles eine bimodale Dichteverteilung. Diese wird durch zwei überlagerte Gaußkurven unterschiedlicher Breite am besten wiedergegeben. In Abbildung 2.3 sind die Absorptionsbilder und Querschnitte in x -Richtung für unterschiedliche Temperaturen gezeigt. Oberhalb der Übergangstem-

peratur liegt eine thermische Wolke vor, darunter ist das Ensemble zunächst teilweise kondensiert. Die blauen und roten Kurven stellen die Fitkurven an den thermischen bzw. kondensierten Anteil dar. Im untersten Bild ist der thermische Anteil fast ganz verschwunden. Da das Kondensat selbst keine Entropie besitzt, ist eine Temperaturangabe immer auf die thermische Wolke bezogen. Man kann anhand des untersten Bildes gut erkennen, dass es bei der Erzeugung ultrakalter Gase heutzutage eher das Problem gibt, eine sinnvolle Temperatur zu bestimmen als die tiefen Temperaturen zu erreichen¹².

2.2.3 Anisotrope Expansion

Die Kondensate in Abb. 2.3(a) haben eine anisotrope Form mit der längeren Achse in z -Richtung, während die thermische Wolke isotrop expandiert. Aus den bereits genannten Gründen ist das Aspektverhältnis der expandierten Kondensate gegenüber der räumlichen Symmetrie der Magnetfalle für lange Fallzeiten t_{TOF} gerade invertiert. Aus den Bildern nach 18 ms Fallzeit in Abb. 2.3(a) und Gauß-Fits an die Daten liest man ein Aspektverhältnis von $\sigma_x/\sigma_z \simeq 0.6$ ab. Dies entspricht nicht ganz dem erwarteten Wert von $1/\sqrt{8} = 0.35$. Die Fallzeit ist mit 18 ms noch zu kurz. Die Form der Kondensate wird nicht vollständig von der Geschwindigkeitsverteilung bestimmt, sondern noch von der anfänglichen Ortsverteilung beeinflusst.

Die beschriebene Vorgehensweise hat sich als sehr robuste Methode der Erzeugung von Bosekondensierten Gasen erwiesen. Die angegebenen Werte für die Fallenfrequenzen, Zeiten und Atomzahlen sind typische Werte. Der Kondensationsprozess hat sich als unempfindlich gegenüber der Variation der Parameter herausgestellt, solange die drei am Anfang dieses Kapitels beschriebenen Bedingungen erfüllt sind.

2.3 Kondensation in der Dipolfalle

Die in Kapitel 4 vorgestellten Experimente beschreiben die Dynamik kohärenter Wellenpakete in einem eindimensionalen Wellenleiter. Dazu muss das Kondensat in diesen transferiert werden. Aus den in Abschnitt 1.4 genannten Gründen sind wir dazu übergegangen, das Ensemble nicht in der Magnetfalle, sondern in einer dreidimensionalen Dipolfalle (bestehend aus Wellenleiter und Haltestrahl) zu kondensieren.

Prinzip der Verdampfungskühlung in der Dipolfalle

Dipolfallen besitzen nach Gl. 1.11 eine endliche Falltiefe¹³

$$U = \frac{\hbar\Omega(r)^2}{4\delta} = \frac{\hbar\Gamma^2}{8\delta I_s} I_0.$$

In ihnen die Verdampfungskühlung schon „eingebaut“. Man spricht von so genannter „build in evaporation“ im Gegensatz zur „forced evaporation“ bei der COD- und RF-Kühlung. Da jede Falle endlich tief ist, benutzt man den Ausdruck jedoch nur, falls chemisches Potential und die Falltiefe von ähnlicher Größenordnung sind. Durch das

¹²Meines Wissens liegt die tiefste gemessene Temperatur mittlerweile bei 500 pK [84].

¹³Zur Vereinfachung wurde die Verstimmungen $\delta_{D1} = \delta_{D2} = \delta$ des Dipolfallenlasers gegenüber den beiden Feinstrukturlinien als identisch angenommen.

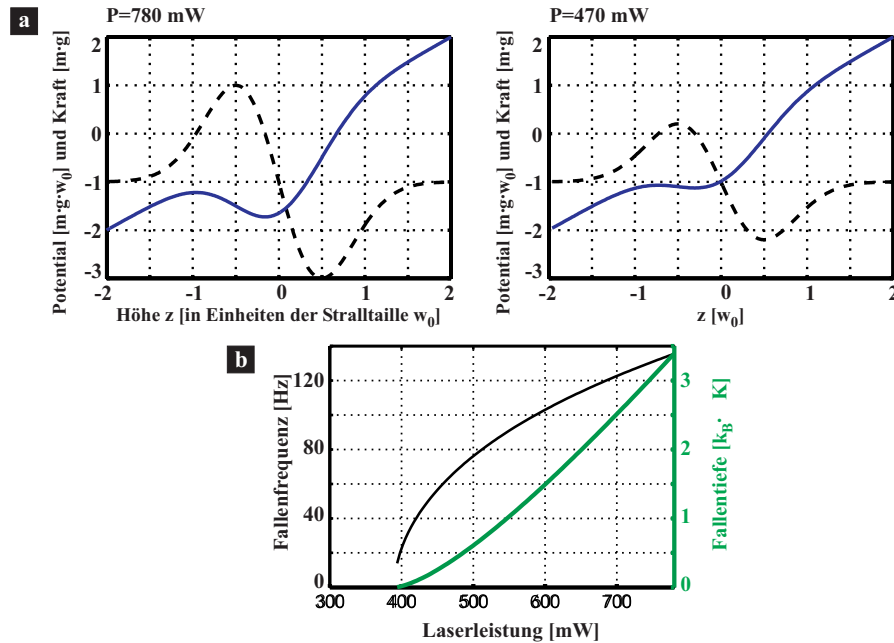


Abbildung 2.4: Einfluss der Gravitation auf Form und Tiefe der Dipolfalle: (a) Die Schwerkraft verzerrt das Potential (blau) eines gaußschen Strahls entlang der z -Richtung. Die resultierende Kraft (gestrichelt) hat ihr Maximum immer am Ort der halben Strahltaile. Unterhalb einer Minimalleistung des Lasers ist diese Kraft kleiner als die Schwerkraft, die Atome können nicht mehr gefangen werden. (b) Numerisch bestimmte effektive Fallenfrequenzen und -tiefen des Wellenleiters in Abhängigkeit der Laserleistung. Die kritische Abhängigkeit dieser Werte in der Nähe der Minimalleistung erfordert die Stabilisierung der Laserleistung.

Einstellen der Laserleistung kann man die Fallentiefe festlegen und die Verdampfungsrate bestimmen [77]. Circle-of-Death Kühlung und RF-Kühlung sind in Dipolfallen nicht mehr möglich, da alle m_F -Zustände gefangen werden. Während in der Magnetfalle der Einfluss der Gravitation in der Phase der Verdampfungskühlung vernachlässigbar ist, kommt ihr in der Dipolfalle eine entscheidende Bedeutung zu. In Abb. 2.4 (a) ist das Potential (blau) und die resultierende Kraft (schwarz, gestrichelt) von Atomen im Potential des Wellenleiters unter Berücksichtigung der Gravitation für zwei verschiedene Laserleistungen dargestellt. Es handelt sich dabei um Querschnitte entlang der z -Achse, die in Richtung der Gravitation zeigt. Die Energie und die Kraft sind dabei auf die „natürlichen“ Größen $E = mgw_0$ und $F = mg$ skaliert, wobei w_0 die Strahltaile der Falle bezeichnet.

Das lineare Potential der Schwerkraft verzerrt das Gaußprofil des Dipolpotentials und führt effektiv zu einer schwächeren Falle, mit einer Frequenz, die man durch parabolische Approximation des Potentials um das verschobene Fallenminimum erhält. Ist die mittlere Energie der Teilchen vergleichbar mit der Fallentiefe, so „verdampfen“ die energiereichsten Teilchen, die Wolke kühlt ab. Unterhalb einer Mindestleistung (hier 390 mW) ist die maximale Kraft, die immer am Punkt der halben Strahltaile vorliegt, zu klein, um die Atome zu fangen. In Abb. 2.4(b) sind die verminderten Fallenfrequenzen und die Fallentiefe des Wellenleiters in Abhängigkeit der Laserleistung aufgezeichnet. In

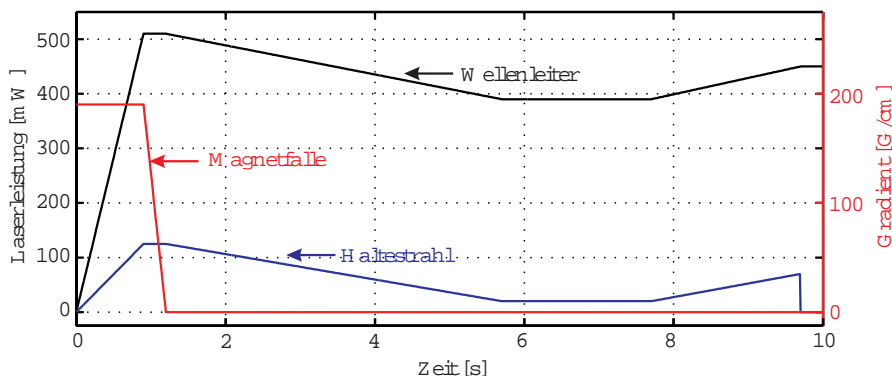


Abbildung 2.5: Schematischer Ablauf der Kondensation in der Dipolfalle. Die Laserleistungen in den Dipolfallen werden adiabatisch erhöht, die kalte aber nicht kondensierte Wolke wird in eine kombinierte Magnet/Dipolfalle transferiert. Nach dem Ausschalten der Magnetfalle führt das Reduzieren der Laserleistungen zur Kühlung und schließlich zur Kondensation der Wolke. Im Anschluss an die Wartephase, die ein reines Kondensat entstehen lässt, ändert man adiabatisch die Fallenfrequenzen auf die für das Experiment gewünschten Werte. Mit dem Abschalten des Haltestrahls beginnt die Untersuchung der Wellenpaketdynamik im Wellenleiter.

der Nähe der Mindestleistung hängen diese Werte kritisch von der Leistung ab, weshalb die Intensitäten beider Dipolfallenstrahlen durch PI-Regelkreise über den AOM als Stellglied stabilisiert werden.

Diese (eindimensionale) Überlegung lässt sich auf die drei-dimensionale kombinierte Falle aus Wellenleiter und Haltestrahl übertragen. Die Leistung in den beiden Laserstrahlen legt dabei die Richtung fest, in der die optische Falle am schwächsten ist. Die Atome verlassen die 3d-Falle entweder entlang der Richtung der Gravitation oder entlang des Wellenleiters, wenn die Potentialtiefe des Haltestrahl kleiner als die effektive Potentialtiefe aus Wellenleiter und Haltestrahl in Richtung der Schwerkraft ist.

Experimenteller Ablauf

Um die Atome in der Dipolfalle zu kondensieren, lässt man die RF-Verdampfungskühlung zu einem Zeitpunkt enden, an dem die Atome noch oberhalb der kritischen Temperatur T_c sind, typischerweise bei einer RF-Endfrequenz von 4.6 MHz und einer Phasenraumdicke von $\Omega = 3 \times 10^{-2}$. Der experimentelle Ablauf der Kondensation ist schematisch anhand der Laserleistungen und des Stroms durch die Magnetfalle in Abb. 2.5 gezeigt. Durch das Einschalten der Dipolfalle wird die Wolke mit 10^6 Atomen innerhalb von 900 ms in die kombinierte Magnet-/Dipolfalle transferiert. Daraufhin wird der Strom durch die Quadrupolspulen innerhalb von 300 ms linear ausgeschaltet. Das rotierende Biasfeld B_0 wird im Anschluss an diese Rampe ebenfalls ausgeschaltet, es wird durch ein statisches Magnetfeld, welches in Richtung des Abbildungslaserstrahls zeigt, ersetzt. Die Atome bleiben spinpolarisiert in der nun rein optischen Falle. Das chemische Potential der Wolke ist mit $\mu = 3 \mu\text{K} \times k_B$ vergleichbar der Fallentiefe bei einer Laserleistung der Dipolfallenlaser von 500 mW (Wellenleiter) bzw. 125 mW (Haltestrahl). Die Verdampfungskühlung erfolgt während einer fünf Sekunden langen Periode, in der die

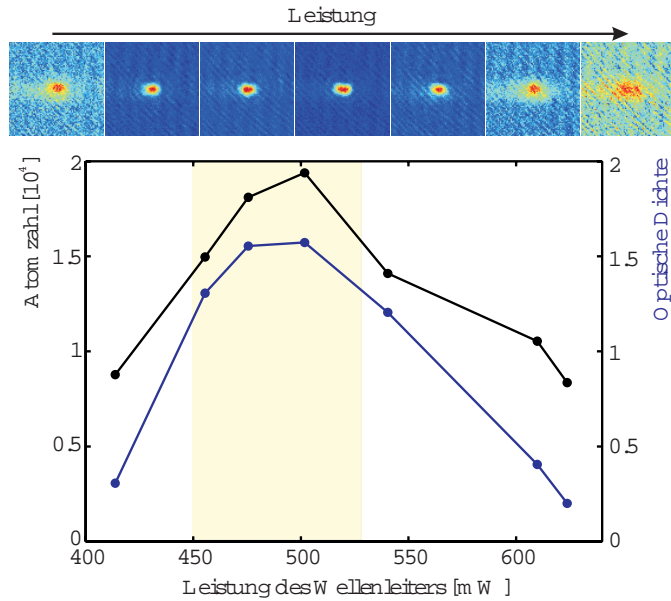


Abbildung 2.6: Experimentreihe zur Bestimmung des geeigneten Parameterraums für die Kondensation in der Dipolfalle. Die Laserleistung des Wellenleiters beim Transfer in die Dipolfalle wurde variiert, alle anderen Parameter sind konstant. Die obere Bildreihe zeigt Absorptionsspektren nach 13 ms Falldauer. In der Grafik sind die Atomzahl und die maximale Dichte über der Laserleistung aufgetragen. Im Bereich zwischen 450 – 530 mW bilden sich reine Kondensate aus. Außerhalb dieses Bereiches ist die Wolke nur teilweise kondensiert oder thermisch. Die optische Dichte und die Atomzahl des Kondensats erlauben den quantitativen Vergleich der verschiedenen Realisierungen.

Leistung beider Laser und somit die Falltiefe fortwährend reduziert wird. Die Falltiefe am Ende dieser Phase bestimmt, ob sich ein Kondensat ausbildet, ähnlich wie die RF-Endfrequenz bei der Radiofrequenzkühlung. Experimentell hat sich herausgestellt, dass die Laserleistung im Wellenleiter maximal 15 % höher sein darf als die Mindestleistung zum Halten der Atome¹⁴. Andernfalls verlassen zu wenige Atome die Falle, das Gas bleibt thermisch. Nach einer Wartephase von mehreren Sekunden, die zur Ausbildung eines reinen Kondensats dient, werden die Leistungen auf die für das Experiment gewünschten Werte adiabatisch geändert. Die Experimente zur Dynamik im Wellenleiter beginnen mit dem Abschalten des Haltestrahls.

Der beschriebene Ablauf ist unkritisch gegenüber Veränderungen der einzelnen Parameter. Sie wurden bestimmt, indem eine Reihe von Experimenten durchgeführt wurde, wobei jeweils nur eine Variable geändert wurde. Exemplarisch ist in Abb. 2.6 eine solche Messung gezeigt, wobei die Leistung des Wellenleiters beim Transfer der Wolke in die Dipolfalle variiert wurde, die Werte der anderen Parameter entsprechen denjenigen aus dem obigen Ablauf.

Die obere Bildreihe zeigt die Absorptionsspektren des Ensembles nach 13 ms freier Falldauer, in der Grafik sind die Atomzahl und die maximale optische Dichte über der Laser-

¹⁴Dieser Wert ist nicht universell gültig, sondern abhängig von den Parametern von Wellenleiter und Haltestrahl.

leistung aufgetragen. Nur innerhalb des gelb schattierten Bereiches von 450 – 530 mW hat sich ein reines Kondensat ausgebildet, für niedrigere Werte ist die Falltiefe der Dipolfalle zu gering, um alle Atome zu transferieren, die Verdampfungskühlung funktioniert auf Grund der geringen Dichte nicht mehr genügend gut. Ist die Laserleistung zu hoch, so wird zwar die ganze Wolke umgeladen, allerdings ist die Kühlrate zu Beginn der Verdampfungskühlung durch die große Falltiefe begrenzt. Bei Annäherung an die minimale Falltiefe steigt die Verlustrate an Teilchen so schnell an, dass nicht genügend Zeit für die Rethermalisierung bleibt, es bildet sich ebenfalls kein Kondensat aus. Quantitativ wurde der Erfolg des Kondensationsprozesses aus der Atomzahl (schwarz) und der maximalen optische Dichte (blau), sowie der Größe (nicht dargestellt) des Ensembles beurteilt. Messungen dieser Art wurde mit allen variierbaren Größen durchgeführt und somit ein stabiler Bereich im Parameterraum bestimmt.

Vorteile der Kondensation in der Dipolfalle

Die Vorteile der Kondensation in der Dipolfalle gegenüber der Magnetfalle lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Es gelingt hiermit reine Kondensate im Wellenleiter zu erzeugen.
- Im Gegensatz zur Magnetfalle überträgt die gekreuzten Dipolfalle beim Abschalten keinen Impuls auf die Atome.
- Das rotierende Biasfeld kann ausgeschaltet und durch ein statisches homogenes Feld zur Vorgabe der Quantisierungsachse für die Abbildung ersetzt werden. Man kann die Dauer der Abbildungspulse verlängern, wodurch sich die Qualität der Absorptionbilder verbessert.
- Durch die große Anzahl an experimentellen Parametern lässt sich die Atomzahl im Kondensat definiert einstellen.

Eine besondere Bedeutung fällt dabei dem vierten Punkt zu. Für einen Teil der Experimente war es notwendig, Kondensate mit wenigen tausend Atomen herzustellen. Hat sich beispielsweise ein BEC mit 2×10^4 Atomen gebildet, so bleibt die Frage, wie die Atomzahl ohne Verlust des gesamten Kondensats reduziert werden kann. Prinzipiell besteht die Möglichkeit Dreikörperstöße auszunutzen. Dabei wird ein Dimer erzeugt, welches nicht in der Falle gefangen wird. Das dritte Atom erhält die Bindungsenergie als kinetische Energie, ist diese größer als die Falltiefe so verlässt auch dieses Atom die Falle. Die Wahrscheinlichkeit solcher (normalerweise unerwünschten) Stöße ist proportional zum Quadrat der Dichte $R = L_{3K} \times \rho^2$ mit einer Ratenkonstante von $L = 1.8(\pm 0.5) \times 10^{-29} \text{cm}^6/\text{s}$ [85]. Diese Methode ist jedoch nur bei hohe Dichten geeignet¹⁵, für ein Kondensat mit 5000 Atomen in einer sphärischen Falle mit $\omega = 2\pi \times 100 \text{ Hz}$ beträgt die Lebensdauer schon über 200s. Die Verdampfungskühlung in der Dipolfalle bietet als Alternative, auf Grund der großen Anzahl an Parametern, eine begrenzte Atomzahl in der Falle zu kondensieren. Man lädt dazu nur einen Teil der vorgekühlten Wolke um und passt die Laserleistungen und die Länge der Verdampfungskühlung so

¹⁵Diese Verlustrate limitiert die Lebensdauer von Kondensaten mit einer Dichte von $\rho > 2 \times 10^{14} / \text{cm}^3$ auf unter 1 Sekunde.

an, dass reine Kondensate entstehen. Es konnten dadurch reproduzierbar BECs mit nur 3000 Atomen, in Einzelfällen sogar mit weniger als 1000 Atomen, erzeugt werden.

Es stellt sich die Frage nach der unteren Schranke dieser Methode. Falls es gelingt, die Laserleistung auf weniger als ein Prozent Intensitätsschwankungen zu stabilisieren, so kann man den Bereich der „trivialen“ Kondensation erreichen. „Trivial“ bedeutet in diesem Zusammenhang, dass man die Falle so schwach macht, dass nur noch wenige (im Extremfall nur einer) gebundene Zustände vorhanden sind. Beispielsweise beträgt die Fallentiefe des Wellenleiters bei einer Leistung, die ein Prozent über der Minimalleistung liegt, nur $U = 5 nK \times k_B$. Das chemische Potential eines wechselwirkungsfreien BEC, lässt sich darin zu $\mu = 1 nK \times k_B$ abschätzen¹⁶ und liegt somit in vergleichbarer Größenordnung. Dieser Bereich wurde experimentell nicht untersucht. Es ist jedoch denkbar, dass man damit reine Kondensate herstellen kann, die reproduzierbar weniger als 1000 Atome enthalten.

2.4 Charakterisierung der Fallenfrequenzen

Alle Eigenschaften eines Bose-Einstein Kondensats, wie die Größe und Impulsbreite oder das chemische Potential, ergeben sich unter der Voraussetzung eines harmonischen Potentials aus der Atomzahl und aus den Fallenfrequenzen. Die Bestimmung der Atomzahl wurde in Abschnitt 1.5 diskutiert, somit bleibt zu Charakterisierung des Kondensats noch die Bestimmung der Fallenfrequenzen der Magnetfalle, sowie der optischen Dipolfallen. Diese können aus der Geometrie der Magnetfeldspulen sowie aus Leistung und Strahltaile der Dipolfallenlaser berechnet werden. Noch genauer ist jedoch die experimentelle Bestimmung. Dazu wird eine kalte Wolke (thermisch oder kondensiert) zu Dipolschwingungen, also einer Schwingung des Massenschwerpunkts, in der jeweiligen Falle angeregt und durch Bestimmung der Position zu verschiedenen Zeitpunkten die Frequenz ermittelt.

Fallenfrequenz der Magnetfalle

Die Dipolschwingung in der Magnetfalle wird angeregt, indem man nicht-adiabatisch den Strom durch die Quadrupolspulen verändert. Dabei nutzt man aus, dass sich nach Gl. 1.5 auch die Ruhelage des Ensembles verschiebt. Die Wolke schwingt mit einer Amplitude, die dem Unterschied der Ruhelagen entspricht. Ein Beispiel einer solchen Messung ist in Abbildung 2.7 (a) zu sehen. Dargestellt ist die z -Position der Wolke in Abhängigkeit der Zeit bei einem Strom von $I_q = 112$ A durch die Quadrupolspulen und 50 A durch die Biasfeldspulen. Aus einem Sinusfit an die Daten ergibt sich eine Frequenz von 38.7(2) Hz. In Abbildung 2.7 (b) sind bei identischem Biasfeld die Frequenzen von vier Messungen bei verschiedenem Quadrupolstrom gezeigt. Man erhält eine lineare Abhängigkeit, wie man sie nach Gl. 1.4 erwartet. Mit dieser Messung hat man die Felder jedoch noch nicht eindeutig bestimmt, da in Gl. 1.4 nur das Verhältnis $\frac{B_r^2}{B_0}$ eingeht. Die Verschiebung der Ruhelage des Fallenzentrums, welche ebenfalls in Abb. 2.7 gezeigt ist, hängt dagegen nach Gl. 1.5 nur vom Quadrupolstrom ab, wodurch die Felder auch absolut geeicht werden können. Für den Magnetfeldgradienten erhält man $\frac{B_r}{I_q} = 0.88 \frac{\text{G}}{\text{cmA}}$. Dies stimmt

¹⁶Die Abschätzung besteht darin eine sphärische, harmonisch genäherte Falle anzunehmen, was auf Grund der starken Deformation des Potentials durch die Gravitation nicht zutrifft.

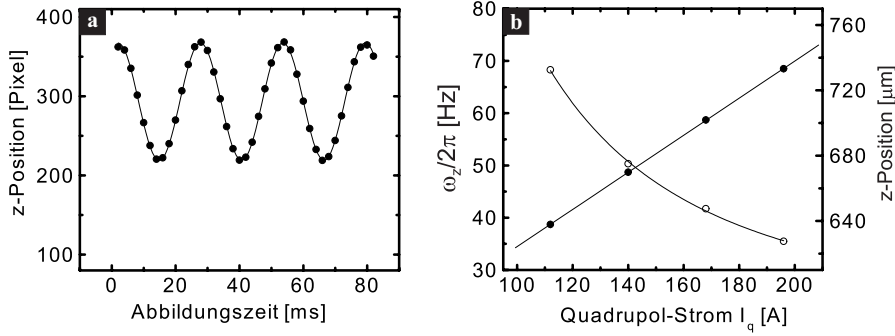


Abbildung 2.7: Messung der Magnetfallenfrequenz durch Anregung von Dipoloszillation. (a) Gezeigt ist die vertikale Position des Kondensats in Abhängigkeit vom Zeitpunkt der Abbildung bei einem Strom von 50 A durch die Biasfeldspulen und $I_q = 112$ A durch die Quadrupolspulen (schwarze Punkte). Jeder Datenpunkt entspricht einem BEC. Der sinusförmige Fit an die Daten ergibt eine Fallenfrequenz von $\omega_z = 2\pi \times 38.7$ Hz. (b) Fallenfrequenz als Funktion von I_q (schwarze Punkte) für vier verschiedene Quadrupolströme bei identischem Biasfeld. Aus dem linearen Fit erhält man das Verhältnis B_r^2/B_0 . Ebenfalls gezeigt ist die Ruhelage des Kondensats als Funktion von I_q (offene Kreise) mit einem Fit nach Gl. 1.5. Daraus erhält man die absolute Eichung für die Quadrupolfalle $B_r = B_r(I_q)$.

nahezu mit dem rechnerischen Wert von $\frac{B_r}{I_q} = 0.9 \frac{\text{G}}{\text{cmA}}$ nach dem Biot-Savart Gesetz anhand der Fallengeometrie überein. Für die Biasfelder erhält man den Zusammenhang $\frac{B_{01}}{I} = 0.78 \text{ G/A}$ in Richtung der Abbildung und $\frac{B_{02}}{I} = 0.75 \text{ G/A}$ senkrecht zur Abbildungsrichtung, wobei sich der Unterschied aus der Geometrie der beiden Spulenpaare ergibt¹⁷.

Eichung der Dipolfallen

Die Bestimmung der Fallenfrequenzen in den beiden optischen Dipolfallen erfolgt nach derselben Methode, wie für die Magnetfalle. Von besonderer Bedeutung ist dabei die longitudinale Fallenfrequenz des Wellenleiters. Diese sollte weniger als 1 Hz betragen, damit die Dynamik des Wellenpakets auf der Zeitskala der Experimente von 100 ms nicht beeinflusst wird. Die Leistung der Wellenleiters wurde auf 400 mW eingestellt. Das rotierende Biasfeld, wird für dieses Experiment während der Kondensation in die Dipolfalle nicht ausgeschaltet sondern bei 6 G belassen. Obwohl die relative Änderung dieses Feldes ($\delta B(x)/B_0 \simeq 10^{-3}$) über die Größe der Schwingungsamplitude der Wolke vernachlässigbar ist, bewirkt es auf Grund der absoluten Variation δB einen schwachen magnetischen Einschluss, der vom Absolutwert des Biasfelds abhängt. Man bestimmt somit die effektive Fallenfrequenz aus Dipolfalle und dem schwachen magnetischen Einschluss des Biasfelds. Die Schwingung wird angeregt, da das Zentrum dieser kombinierten Falle nicht mit demjenigen der gekreuzten Dipolfalle übereinstimmt.

Gezeigt sind in Abb. 2.8 (a) die Absorptionbilder dieser Messung, sowie in Grafik (b) die Positionen der Massenzentren (rot) zu den verschiedenen Zeitpunkten. Ein Sinusfit

¹⁷Die Eichung der Bias-Felder wurde zusätzlich überprüft, indem bei bekanntem Strom das Feld im Zentrum der einzelnen Bias-Spulen ausgemessen und auf den Ort der Atome zurückgerechnet wurde.

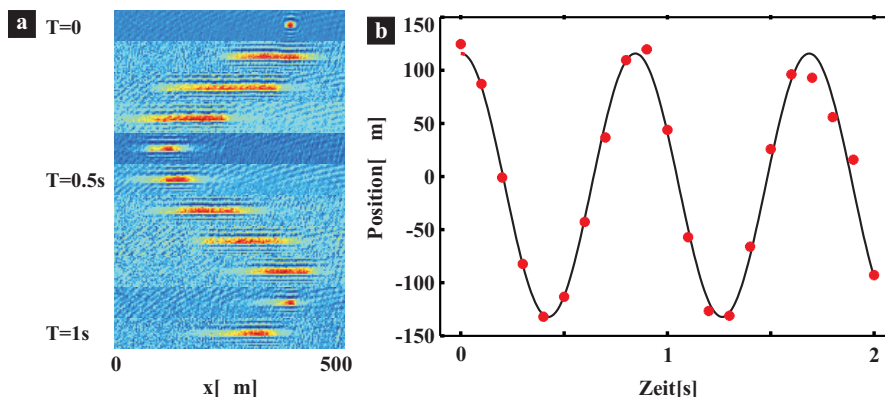


Abbildung 2.8: Messung der longitudinalen Fallenfrequenz im Potential des Wellenleiter mit einer Leistung von 400 mW und des schwach inhomogenen Biasfeld bei $B_0 = 6$ G. Nach dem Abschalten des Haltestrahls bei $T=0$ vollführt die Wolke Dipolschwingungen. (a) Aus den Absorptionbildern bestimmt man die Schwerpunktspositionen der Wolke. (b) Aus einem Sinusfit (schwarz) an die Messwerte (rot) erhält man für das gezeigte Beispiel eine Frequenz $\nu_{\perp} = 1.19$ Hz.

(schwarz) ergibt eine Frequenz von $\nu_{\parallel} = 1.19(8)$ Hz. Neben der Dipolschwingung kann man auch eine so genannte Quadrupolschwingung, d.h. eine Oszillation der Breite der Wolke mit einer Frequenz $\nu_{quad} = 2.16(4)$ Hz erkennen¹⁸. Für thermische Wolken erwartet man ein Verhältnis $\frac{\nu_{quad}}{\nu_{\parallel}} = 2$. In der gezeigten Messung, welche mit einem Kondensat durchgeführt wurde erhält man jedoch $\frac{\nu_{quad}}{\nu_{\parallel}} = 1.83$. Diese Modifikation stammt von der Wechselwirkung der Atome im Kondensat. Theoretisch erwartet man für das gezeigte Beispiel einen Wert $\frac{\nu_{quad}}{\nu_{\parallel}} \simeq 1.75$ in guter Übereinstimmung mit dem Experiment [86, 87].

Bei einer weiteren Messung wurde auch das Biasfeld ausgeschaltet, um die longitudinale Frequenz des Wellenleiters alleine zu bestimmen. Diese ist allerdings so klein, dass das Kondensat innerhalb der Messdauer von zwei Sekunden keine volle Oszillation vollführte. Man erhält somit eine obere Schranke dieser Frequenz von $\nu_{\parallel} < 0.5$ Hz. Im Gegensatz zur Magnetfalle stimmen die gemessenen Fallenfrequenzen der Dipolfallen nicht so gut mit den berechneten Werten aus der Leistung und der Strahltaile nach Gl. 1.12 überein. Die Messwerte waren ca. 25% kleiner als die berechneten Werte. Falls der Fokus des Wellenleiters nicht genau mit dem Zentrum der Magnetfalle überlappt, könnte dies die verminderten Fallenfrequenzen erklären.

¹⁸Genauer: Es handelt sich dabei um die langsame $m = 0$ Quadrupolmode, wobei m den Drehimpuls der Anregung entlang der Wellenleiterachse bezeichnet. Bei der langsamen Mode sind die axiale und radiale Schwingungsrichtung $\Delta\phi = \pi$ außer Phase, bei der schnellen Mode wären sie gleichphasig („breathing mode“) [9].

Teil II

Dynamik kohärenter Materiewellen in periodischen Potentialen

Kapitel 3

Theorie

In diesem Kapitel werden die theoretischen Grundlagen diskutiert, die zum Verständnis der durchgeführten Experimente notwendig sind. Von der Theorie der Bose-Einstein-Kondensation wird nach einer kurzen allgemeinen Einführung vor allem die Bewegungsgleichung des Kondensats sowie dessen Größe im Grundzustand einer harmonischen Falle besprochen (3.1). Die Größe bestimmt zusammen mit der Masse der Teilchen die Dispersion des Wellenpakets und ist insofern einer der wichtigsten Parameter der Dynamik kohärenter Wellenpakete. Anschließend wird diskutiert, wie durch Hinzufügen eines periodischen Potentials die Dispersion und damit die gesamte Wellenpaketevolution geändert werden kann (3.2). Die geänderte Dispersion führt insbesondere im Zusammenspiel mit der interatomaren Wechselwirkung zu neuen Effekten, die vor allem im Hinblick auf atomare Solitonen erörtert werden (3.3). Das Kapitel schließt mit einer Beschreibung der numerischen Methoden, die zur Simulation der Wellenpaketdynamik durchgeführt wurden (3.4).

3.1 Bose-Einstein Kondensation

3.1.1 Grundlegendes zur Kondensation

Im folgenden Abschnitt werden die grundlegenden Eigenschaften bosekondensierter Gase kurz zusammengefasst. Die ausführliche Diskussion der quantenstatistischen Zusammenhänge findet man in den Lehrbüchern der statistischen Physik [88, 89], sowie in Büchern und Übersichtsartikeln, die sich speziell auf die Bose-Einstein Kondensation schwach wechselwirkender Gase konzentrieren [11, 5].

Das ideale Bose-Gas

Im Folgenden betrachtet man ein ideales Gas aus ununterscheidbaren Bosonen in einem System, deren stationäre Zustände die Eigenenergien ϵ_i besitzen. Nach der Bose-Einstein-Statistik beträgt die Anzahl der Teilchen im Zustand i

$$n_i = \frac{1}{\exp\left(\frac{\epsilon_i - \mu}{k_B T}\right) - 1}, \quad (3.1)$$

wobei μ das chemische Potential bezeichnet. In einem großkanonischen Ensemble erhält man daraus die Gesamtzahl der Teilchen

$$N = \sum_i \frac{1}{\exp\left(\frac{\epsilon_i - \mu}{k_B T}\right) - 1} \quad (3.2)$$

und die Energie

$$E = \sum_i \frac{\epsilon_i}{\exp\left(\frac{\epsilon_i - \mu}{k_B T}\right) - 1} \quad (3.3)$$

des Systems. Der Grundzustand mit der Energie ϵ_0 wird von einer makroskopischen Anzahl an Teilchen besetzt, sobald sich das chemische Potential der Grundzustandsenergie nähert ($\mu \rightarrow \epsilon_0$). Man spricht allerdings nur von Bose-Einstein Kondensation, wenn der Phasenübergang einsetzt solange die thermische Energie noch sehr viel größer als die Grundzustandsenergie ($k_B T \gg \epsilon_0$) ist. Ob und wann dies geschieht hängt vom Eigenenergiespektrum ϵ_i ab, in welches auch die Form des Potentials und die Dimensionalität des Systems eingehen.

In den Gleichungen 3.1-3.3 ist ein großer Teil der Physik kondensierter idealer Gase enthalten. Man bestimmt durch sie z.B. die Übergangstemperatur, den Anteil kondensierter Atome und die spezifische Wärme. Die Übergangstemperatur ergibt sich, indem man den Ausdruck

$$N - N_0 = \sum_{i \neq 0} \frac{1}{\exp\left(\frac{\epsilon_i - \epsilon_0}{k_B T}\right) - 1}; \quad N - N_0 = \int_{\epsilon \neq \epsilon_0}^{\infty} \frac{g(\epsilon)}{\exp\left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{k_B T}\right) - 1} d\epsilon \quad (3.4)$$

für die Anzahl nicht kondensierter Atome auswertet. Man hat dabei in üblicher Weise die Teilchenzahl N_0 im Kondensat aus Gl. 3.2 absepariert und das chemische Potential durch die Grundzustandsenergie ersetzt. Analytische Ausdrücke ergeben sich durch eine halbklassische Betrachtungsweise, in der man statt der Summe das Integral über die Modendichte $g(\epsilon)$ berechnet [5] (zweite Formulierung in Gl. 3.4).

Für ein homogenes dreidimensionales System bekommt man daraus die bereits in der Einleitung erwähnte Kondensationsbedingung

$$\Omega = \rho \lambda_{dB}^3 = \zeta(3/2) > 2.613 \quad (3.5)$$

für die Phasenraumdicke [88]. Hierbei ist ρ die Dichte der Bosonen,

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}} \quad (3.6)$$

die thermische de Broglie-Wellenlänge und $\zeta(x)$ ist die Riemannsche ζ -Funktion. Die Größe λ_{dB} kann als die räumliche Ausdehnung der, den Atomen zugeordneten, Materiewellen interpretiert werden. Anschaulich setzt die Kondensation demnach ein, wenn die thermische de Broglie-Wellenlänge in die Größenordnung des mittleren Teilchenabstands kommt, oder anders ausgedrückt, wenn die Wellenfunktionen der einzelnen Atome anfangen zu „überlappen“.

Für Bosonen in einer 3-dimensionalen harmonischen Falle, wie sie in dieser Arbeit betrachtet werden, erhält man aus Gl. 3.4 eine Bedingung für die kritische Temperatur

$$k_B T_c = \hbar \bar{\omega} \left(\frac{N}{\zeta(3)} \right)^{1/3} = 0.94 \hbar \bar{\omega} N^{1/3} \quad (3.7)$$

in Abhängigkeit der Atomzahl und der geometrisch gemittelten Fallenfrequenzen $\bar{\omega}$. Typischerweise beträgt T_c im Experiment $\simeq 50 \text{ nK}$ ($N = 10^4$, $\bar{\omega} = 2\pi \times 50 \text{ Hz}$). Der Anteil an kondensierten Atomen N_0 beträgt unterhalb von T_c :

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^3 \quad (3.8)$$

Bei $T = 0.37 T_c$ sind bereits weniger als 5 Prozent der Atome nicht kondensiert, es liegt ein fast reines Kondensat vor.

Wechselwirkende, endlich große Kondensate in einer Dimension

Die zuletzt genannten Formeln 3.7 und 3.8 gelten für ideale Bosonen im thermodynamischen Limes¹ in drei-dimensionalen harmonischen Fallen. Für wechselwirkende Bosonen sind sie mit kleinen Korrekturen ebenso gültig, solange die Bedingung für ein verdünntes Gas $\rho a^3 \ll 1$ erfüllt ist. Die s-Wellen-Streulänge beträgt für ^{87}Rb $a = +5.32 \text{ nm}$ [90]. Während für ideale Systeme der Vielteilchen-Grundzustand das Produkt von N Einteilchen-Zuständen ist, gibt es für reale Systeme Beimischungen anderer Zustände. Diese Beimischungen nennt man „quantum depletion“, sie betragen für Alkalimetalle aber weniger als ein Prozent [9]. In diesem Sinne ist das System schwach wechselwirkend. Im Gegensatz dazu beträgt die „quantum depletion“ in suprafluidem Helium über 90 Prozent, die Wechselwirkung zwischen den Atomen ist sehr stark und verschleiert die Charakteristika der Bose-Einstein-Kondensation [91].

In Systemen mit endlich großer Atomzahl ist der Bruchteil kondensierter Atome kleiner als im thermodynamischen Limes. Allerdings ist die Korrektur (gültig für isotrope Fallen)

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^3 - \frac{3\zeta(2)}{2\zeta(3)^{2/3}} \left(\frac{T}{T_c}\right)^2 N^{-1/3} \quad (3.9)$$

selbst für $N = 1000$ und $T = 0.25 \times T_c$ kleiner als ein Prozent. Die in Kapitel 4 gezeigten Experimente wurde alle mit Bose-Einstein Kondensaten ohne erkennbaren thermischen Anteil durchgeführt, die genannten Korrekturen sind demnach vernachlässigbar.

Es ist bekannt, dass es in ein- und zweidimensionalen **homogenen** Systemen im thermodynamischen Limes keine Bose-Einstein Kondensation gibt [5]. In harmonischen Fallen jedoch kann sie zumindest für den 2D-Fall beobachtet werden. Auch in einer Dimension gibt es eine makroskopische Besetzung des Grundzustands, allerdings nur in endlich großen Systemen [92]. Die Übergangstemperatur ergibt sich in diesem Fall zu

$$k_B T_{1d} = \hbar\omega \frac{N}{\ln(2N)}. \quad (3.10)$$

Es hat sich gezeigt, dass damit keineswegs eine Erhöhung der kritischen Temperatur erzielt werden kann, da die Anzahl der Atome in einem eindimensionalen System beschränkt ist (s. Abschnitt 3.1.2). Einige der im folgenden Kapitel diskutierten Experimente wurden im Übergangsbereich zu eindimensionalen Situation durchgeführt. Die von Ketterle und van Druten [92] angestellten Überlegungen zeigen, dass auch in diesem Fall kohärente Wellenpaketdynamik beobachtet werden kann.

¹Den thermodynamischen Limes erhält man für den Fall $N \rightarrow \infty$ und $\bar{\omega} \rightarrow 0$, wobei für das Produkt $N\bar{\omega} = \text{const}$ gilt.

3.1.2 Die Dynamik kohärenter Wellenpakete

Nachdem bisher die grundlegenden statistischen Eigenschaften des BEC-Übergangs besprochen wurden, folgt nun die Diskussion der quantenmechanischen Bewegungsgleichung.

Die Gross-Pitaevskii-Gleichung in drei Dimensionen

Die Physik schwach wechselwirkender BECs wird unter Berücksichtigung der interatomaren Wechselwirkung zwischen den Atomen in einer Molekularfeldnäherung durch die Gross-Pitaevskii Gleichung (GPE) für die Kondensatwellenfunktion² $\Psi(\mathbf{r}, t)$ beschrieben [93, 94, 95]. Dabei werden Anregungen aus dem Kondensat vernachlässigt, was die Gültigkeit der Theorie auf $T = 0$ einschränkt. Für Temperaturen $T \ll T_c$ und hinreichend große Kondensate ($N \gg 1$) ist die Beschreibung durch die GPE jedoch eine gute Näherung.

In einem verdünnten Gas bei niedriger Temperatur ($\lambda_{dB}(T) \gg a$) wird die Wechselwirkung zwischen den Atomen durch elastische s-Wellen-Streuung dominiert, welche vollständig durch die Streulänge a charakterisiert ist. Das interatomare Potential kann durch ein Deltapotential verschwindender Reichweite $U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = g_{3d}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ ersetzt werden, wobei

$$g_{3d} = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \quad (3.11)$$

als dreidimensionale Kopplungskonstante bezeichnet wird. Für Atome mit repulsiver Wechselwirkung, wie im Falle von ^{87}Rb , ist a positiv, bei attraktiver Wechselwirkung entsprechend negativ. Die Gross-Pitaevskii Gleichung für die makroskopische Wellenfunktion $\Psi(\mathbf{r}, t)$ eines Bose-Einstein Kondensat lautet damit

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_{ext}(\mathbf{r}) + g_{3d}N |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \Psi(\mathbf{r}, t). \quad (3.12)$$

In dieser Darstellung ist Ψ auf eins, nicht auf die Teilchenzahl N , normiert. Der erste Term beschreibt die kinetische Energie, also die Dispersion des Wellenpakets auf Grund der endlichen Größe und der damit verbundenen endlichen Impulsbreite. Der zweite stellt ein beliebiges äußeres Potential $V_{ext}(\mathbf{r})$ dar. Auf Grund des Wechselwirkungsterms $g_{3d}N |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$ gehört die GPE zur Klasse der nichtlinearen Schrödingergleichungen.

Die durchgeführten Experimente zur Beobachtung der Wellenpaketdynamik wurden in einem schwach fokussierten Laserstrahl durchgeführt, der den Wellenleiter für das BEC darstellt. Obwohl sich das Kondensat im wesentlichen nur entlang der Strahlrichtung des Lasers ausbreiten kann, muss für hohe Dichten die transversale Dynamik des Wellenpakets berücksichtigt werden. Eine Dichteänderung in axialer Richtung des Wellenleiters beeinflusst auch die transversale Größe und wirkt somit auf die Wechselwirkungsenergie zurück. Die analytische Lösung der 3d-GPE ist nur in Ausnahmefällen möglich [96, 97]. Deren numerische Lösung erfordert hingegen einen erheblichen Rechenaufwand. Man reduziert deshalb die 3d-GPE auf eine eindimensionale Gleichung, die vergleichsweise schnell zu lösen ist, deren Anwendbarkeit aber anhand der experimentellen Daten geprüft werden muss.

²Die makroskopische Wellenfunktion stellt den Erwartungswert des Kondensat-Feldoperators $\Psi(\mathbf{r}, t) = \langle \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \rangle$ dar.

Der Übergang zur eindimensionalen GPE

Bevor die experimentellen Bedingungen diskutiert werden, die eine Beschreibung durch eine eindimensionale Gross-Pitaevskii-Gleichung erlauben, soll diese zunächst hergeleitet werden. Dazu wird im Folgenden angenommen, dass sich das Kondensat im transversalen Grundzustand des parabolisch genäherten Wellenleiterpotentials $V_{\perp}(y, z) = \frac{m}{2}\omega_{\perp}^2(y^2 + z^2)$ befindet. Die Wellenfunktion kann als Produkt eines longitudinalen und eines transversalen Anteils $\Psi(x, y, z) = \Psi_{\perp}(y, z)\Psi(x)$ geschrieben werden. Als transversale Wellenfunktion wird der Grundzustand des harmonischen Oszillators, eine Gaußverteilung mit der Oszillatorlänge $\sigma_{\perp} = \sqrt{\hbar/m\omega_{\perp}}$ (1/e-Breite) verwendet. Der Produktansatz wird in die dreidimensionale GPE 3.12 eingesetzt und über die transversalen Freiheitsgrade integriert. Dies führt auf folgende 1D Gross-Pitaevskii-Gleichung:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_{ext}(x) + g_{1d}N |\Psi(x, t)|^2 \right] \Psi(x, t). \quad (3.13)$$

Die eindimensionale Kopplungskonstante

$$g_{1d} = \frac{g_{3d}}{A_{\perp}} = 2\hbar a \omega_{\perp} \quad (3.14)$$

ergibt sich aus der dreidimensionalen Konstanten durch Division mit der effektiven transversalen Fläche

$$A_{\perp} = \left[\int dy |\Psi_{\perp}(y)|^4 \int dz |\Psi_{\perp}(z)|^4 \right]^{-1} = 2\pi\sigma_{\perp}^2. \quad (3.15)$$

Gleichung 3.12 ist (ohne externes Potential) aus der nichtlinearen Optik wohl bekannt. Ihr Analogon beschreibt dort die Ausbreitung kurzer Pulse in Glasfasern, worauf in Abschnitt 3.3.1 genauer eingegangen wird. Es stellt sich nun die Frage, wann die Annahme eines zeitlich konstanten transversalen Zustandes gerechtfertigt ist.

Voraussetzungen für quasi-eindimensionale Situationen

Ohne den Wechselwirkungsterm wäre die 3d-Gross-Pitaevskii-Gleichung separabel, der gemachte Ansatz wäre uneingeschränkt gültig. Da die Nichtlinearität jedoch die Dynamik in den verschiedenen Raumrichtungen koppelt, ist der Produktansatz nur dann eine gute Näherung solange die maximale nichtlineare Energie sehr viel kleiner als die Energie $\hbar\omega_{\perp}$ des ersten transversal angeregten Zustandes ist. Nur dann befindet sich das Kondensat, unabhängig von der Dichte, im Grundzustand des harmonischen Potentials. Diese Forderung kann näherungsweise³ in eine Bedingung an die maximale lineare Dichte $N(|\Psi(x, t)|^2)_{max}$ umgeschrieben werden.

$$g_{1d}N(|\Psi(x, t)|^2)_{max} \ll \hbar\omega_{\perp} \quad \Leftrightarrow \quad N(|\Psi(x, t)|^2)_{max} \ll \frac{1}{2a} = 94 \frac{1}{\mu m}. \quad (3.16)$$

Ist diese erfüllt, so ist das System dynamisch eindimensional, man sagt auch quasi-eindimensional⁴. Wellenpakete, deren 1/e-Breite $15 \mu m$ nicht überschreitet, dürfen höchstens 1000 Atome enthalten, damit eine Beschreibung durch die 1d-GPE gerechtfertigt ist.

³Die Näherung besteht gerade in der Annahme, dass der transversale Zustand nicht durch die Wechselwirkung verbreitert wird.

⁴Als eindimensional im engeren Sinne bezeichnet man Systeme in denen die „healing length“ $\epsilon = \sqrt{\frac{1}{8\pi\rho a}}$ kleiner als die Streulänge a ist. Dies führt zu einer Fermionisierung der Bosonen durch die repulsive Wechselwirkung. Man spricht von einem Tonks-Gas oder dem Tonks-Girardeau Regime [98, 99].

Der Nutzen dieser Gleichung liegt vor allem darin, dass sie in der nichtlinearen Optik genau studiert wurde und zumindest qualitativ die Ergebnisse auf den atomoptischen Fall übertragbar sind. Man bekommt ein intuitives Verständnis dafür, welche Effekte man zu erwarten hat (s. Abschnitt 3.3). Für quantitative Aussagen muss man jedoch auf eine andere Gleichung zurückgreifen.

Die effektive eindimensionale Schrödingergleichung

In den letzten Jahren gab es mehrere Versuche das Problem zu lösen eine eindimensionale Gleichung zu erhalten, die die transversale Dynamik der Materiewellen berücksichtigt [100, 101]. Ein Vergleich mit der „exakten“ Lösung der 3d-GPE zeigte, dass der Vorschlag von Salasnich et al. [101] die bisher beste Übereinstimmung ergab. Der Wechselwirkungsterm wird dabei durch einen wiederum dichteabhängigen Ausdruck korrigiert.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_{ext}(x) + g_{1d} N \frac{|\Psi(x, t)|^2}{\sqrt{1 + 2aN|\Psi(x, t)|^2}} \right] \Psi(x, t) \\ + \left[\frac{\hbar\omega_{\perp}}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + 2aN|\Psi(x, t)|^2}} + \sqrt{1 + 2aN|\Psi(x, t)|^2} \right) \right] \Psi(x, t). \quad (3.17)$$

Der Term in der unteren Zeile berücksichtigt die (reduzierte) kinetische und die (erhöhte) potentielle Energie des Wellenpakets im transversalen Potential. Diese nichtpolynomiale, nichtlineare Schrödingergleichung wird in der Literatur mit NPSE⁵ abgekürzt. Sie wurde gewonnen indem man annimmt, dass das Kondensat transversal einer Gaußverteilung

$$\psi(y, z, t, \sigma(x, t)) \propto \exp\left(-\frac{y^2 + z^2}{\sigma(x, t)^2}\right) \quad (3.18)$$

folgt, wobei die Breite $\sigma(x, t)$ eine Ortsabhängigkeit zeigt, die von der linearen Dichte $N|\psi(x, t)|^2$ bestimmt wird. Den gewünschten Zusammenhang

$$\sigma(x, t)^2 = a_{\perp}^2 \sqrt{1 + 2aN|\psi(x, t)|^2} \quad (3.19)$$

erhält man durch Minimierung des Wirkungsfunktional

$$S = \int dt d^3r \psi^* \left[i\hbar \frac{\delta}{\delta t} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - V_{ext} - \frac{1}{2} g_{3d} N |\psi|^2 \right] \psi \quad (3.20)$$

nach der Breite $\sigma(x, t)$, wobei zuvor über die (y, z) -Ebene integriert wurde. Die Annahme einer Gaußverteilung stimmt zwar nur für den Fall schwacher Wechselwirkung (s. Abschnitt 3.1.3), allerdings wurde gezeigt, dass auch für hohe Atomzahlen die kollektive Dynamik eines BEC in vielen Fällen zuverlässig durch diesen Ansatz beschrieben werden kann [102, 103, 104]. Bei der Dynamik atomarer Solitonen können jedoch transversale Anregungen des Wellenpakets eine entscheidende Rolle spielen [105], in diesem Fall müssen zwei- oder dreidimensionale numerischen Simulationen der GPE die Ergebnisse der NPSE bestätigen oder widerlegen. Für den Fall schwacher transversaler Wechselwirkung $Na|\Psi|_{max}^2 \ll 1$ geht die NPSE wie erforderlich in die quasi-eindimensionale Gl. 3.13 über⁶.

⁵NPSE steht für **n**on**p**olynomial **S**chrödingerequation.

⁶Der konstante Term $\hbar\omega_{\perp}$ kann dann vernachlässigt werden, da er die Dynamik nicht beeinflusst.

3.1.3 Der Grundzustand eines BEC in einer harmonischen Falle

Die Dynamik eines BEC wird entsprechend den Gleichungen 3.12, 3.13 und 3.17 durch die Dispersion, äußere Potentiale und durch die Wechselwirkung zwischen den Atomen bestimmt. Während man die Potentiale vorgibt, wird die Dispersion nur durch die Größe des Wellenpakets bestimmt. Die Wechselwirkungsenergie hängt über die Dichte ebenfalls von der Ausdehnung des BEC ab. Der anfänglichen Größe des BEC in der dreidimensionalen Falle kommt deshalb eine besondere Bedeutung zu. Sie hängt bei gegebener Masse und Streulänge von der Atomzahl und den Fallenfrequenzen ab. Die stationären Bewegungsgleichungen sind zwar im Allgemeinen nicht analytisch lösbar, es gibt jedoch für viele experimentelle Situationen gute Näherungen, die eine zeitaufwendige numerische Lösung nicht erforderlich machen. Die Wellenfunktion des Kondensats hat die allgemeine Form $\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r})e^{-\frac{i}{\hbar}\mu t}$ mit dem chemischen Potential μ , gesucht sind nun die stationären Dichteverteilungen $|\psi(\mathbf{r})|^2$.

Ideales Bose-Einstein-Kondensat

Ein ideales (wechselwirkungsfreies) Kondensat würde unabhängig von der Atomzahl den dreidimensionalen gaußschen Grundzustand

$$\rho(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2 = \left(\frac{m\bar{\omega}}{\pi\hbar}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m}{\hbar}(\omega_x x^2 + \omega_y y^2 + \omega_z z^2)\right) \quad (3.21)$$

einnehmen, wobei $\bar{\omega} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}$ die mittlere Fallenfrequenz darstellt. Die 1/e-Breiten $\sigma_i = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_i}} = \frac{10.8 \mu\text{m}}{[\sqrt{\text{Hz}}]}$ in den verschiedenen Raumrichtungen wären alleine durch die entsprechenden Fallenfrequenz festgelegt. Für die verwendeten experimentellen Parameter ist dies allerdings nur bei Kondensaten mit weniger als 100 Atomen eine gute Näherung, da die interatomare Wechselwirkung das BEC für realistische Atomzahlen vergrößert.

Das Kondensat in der 3d-Thomas-Fermi Näherung

Bei den meisten BEC-Experimenten weltweit ist die Atomzahl im Kondensat so hoch, dass der Wechselwirkungsterm sowohl den stationären Grundzustand als auch die Dynamik des Wellenpakets fast vollständig bestimmt. In diesem Fall kann man den Dispersionssterm $-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$ vernachlässigen, was als Thomas-Fermi Näherung bezeichnet wird. Die Gleichung 3.12 wird zu

$$\mu\Psi(\mathbf{r}) = \left[V_{ext}(\mathbf{r}) + g_{3d}N |\Psi(\mathbf{r})|^2 \right] \Psi(\mathbf{r}). \quad (3.22)$$

Die Dichteverteilung

$$\rho(\mathbf{r}) = |\Psi(\mathbf{r})|^2 = \begin{cases} g^{-1} [\mu - V_{ext}(\mathbf{r})] & \text{für } \mu > V_{ext}(\mathbf{r}), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.23)$$

wird durch das Potential $V(\mathbf{r})$ vorgegeben. Für harmonische Fallen erhält man demnach ein parabolisches Profil

$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{x^2}{R_{TFx}^2} - \frac{y^2}{R_{TFy}^2} - \frac{z^2}{R_{TFz}^2} \right). \quad (3.24)$$

mit der maximalen Dichte $\rho_0 = \frac{\mu}{g_{3d}}$. Das chemischen Potential [5]

$$\mu = \frac{\hbar\omega_{ho}}{2} \left(\frac{15Na}{\bar{\sigma}} \right)^{2/5}. \quad (3.25)$$

erhält man aus der Normierung der Wellenfunktion $\int \rho(r) dr = N$, wobei $\bar{\sigma} = \sqrt{\hbar/m\bar{\omega}}$ die mittleren Oszillatorlänge bezeichnet. Daraus lässt sich der sog. Thomas-Fermi Radius des Kondensats bestimmen:

$$R_{TFi} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_i}} \sqrt{\frac{\bar{\omega}}{\omega_i}} \left(\frac{15Na}{\bar{\sigma}} \right)^{1/5}, \quad i = x, y, z. \quad (3.26)$$

Der erste Term entspricht der Größe des idealen BEC, der zweite berücksichtigt die Anisotropie der Falle, der dritte beschreibt die Verbreiterung durch die Nichtlinearität. Die Thomas-Fermi Näherung ist gültig, solange das Verhältnis aus nichtlinearer und kinetischer Energie $E_{nl}/E_{kin} \simeq \frac{8\pi Na}{\bar{\sigma}} \gg 1$ ist. Typischerweise beträgt dieses Verhältnis bei Experimenten zum Dispersionsmanagement in Abschnitt 4.2 $\frac{8\pi Na}{\bar{\sigma}} \sim 2000$ (2×10^4 ^{87}Rb -Atome in einer Falle mit $\bar{\omega} = 2\pi \times 50$ Hz). Nur am Rand der Wolke ist die kinetische Energie nicht mehr vernachlässigbar, das parabolische Profil wird dort über eine Größe

$$d = 2^{-1/3} \bar{\sigma} \left(\frac{\bar{\sigma}}{R_{TF}} \right)^{1/3} \quad (3.27)$$

„ausgeschmiert“ ([106], in sphärischen Fallen). Für das zuletzt genannte Beispiel ergibt sich $d = 750$ nm bei einem Thomas-Fermi Radius von $6.2 \mu\text{m}$. In asymmetrischen Fallen kann die Korrektur des Parabelprofils je nach Verhältnis der Fallenfrequenzen auch deutlich größer ausfallen [5].

Das Kondensat in der 1d-Thomas-Fermi Näherung

Befindet sich das System in einem Zustand, der der in Abschnitt 3.1.2 beschriebenen quasi-eindimensionalen Situation entspricht, so kann die dreidimensionale Thomas-Fermi Näherung nicht gültig sein, da sich das Kondensat transversal im Grundzustand des harmonischen Oszillators befindet. Allerdings kann für die longitudinale Richtung dennoch die Bedingung $E_{nl}/E_{kin} \gg 1$ erfüllt sein, das System befindet sich eindimensional im Thomas-Fermi Regime. Dazu ist ein sehr großes Verhältnis zwischen transversaler und longitudinaler Fallenfrequenz $\frac{\omega_{\perp}}{\omega_x} \gg 1$ notwendig. Die Dichteverteilung wird wiederum vom äußeren Potential bestimmt und ist somit in einer longitudinal harmonischen Falle ebenfalls parabolisch,

$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{x^2}{R_{TF1d}^2} \right). \quad (3.28)$$

wobei die maximale Dichte $\rho_0 = \frac{\mu}{g_{1d}}$ aus dem chemischen Potential [107]

$$\mu = \frac{1}{2} (3\hbar a \sqrt{m\omega_x \omega_{\perp}} N)^{2/3} \quad (3.29)$$

folgt. Der Radius ergibt sich damit zu

$$R_{TF1d} = \left(\frac{3\hbar a \omega_{\perp} N}{m\omega_x^2} \right)^{1/3} \quad (3.30)$$

Es wird sich im Abschnitt 3.3 zeigen, dass atomare Solitonen nur entstehen können, wenn kinetische und Wechselwirkungsenergie von gleicher Größenordnung sind. Das Thomas-Fermi Limit ist in diesem Fall demnach nicht erfüllt. Für diesen Übergangsbereich kann die Größe des Grundzustands nur numerisch berechnet werden.

Numerische Berechnung des Grundzustands

Die genaueste Methode zur Berechnung des Grundzustands besteht in der numerischen Lösung der stationären 3d-Gross-Pitaevskii-Gleichung, wobei nach Salasnich et al.[101] auch die Lösung der 1d nichtpolynominalen Schrödingergleichung hervorragende Ergebnisse bei ungleich geringerem Aufwand liefert. Die dazu verwendete Methode der Propagation in imaginärer Zeit (iT) wird im Abschnitt 3.4 erläutert. Eine einfachere Näherungsmethode wurde von Baym und Pethick beschrieben [106]⁷. Wie bei der Herleitung der NPSE nimmt man dabei in erster Näherung an, dass das Dichteprofil einer Gaußverteilung folgt. Der Verbreiterung durch die repulsive Wechselwirkung trägt man Rechnung, indem man in jeder Raumrichtung eine größere Ausdehnung annimmt, die dem Grundzustand einer effektiv reduzierten Fallenfrequenz ω'_i entspricht. Man minimiert dazu das Energiefunktional

$$E(\omega'_x, \omega'_y, \omega'_z) = N\hbar \sum_i \frac{\omega'_i}{4} + \sum_i \frac{\omega_i^2}{4\omega'_i} + \frac{Na\sqrt{m}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \sqrt{\omega'_x \omega'_y \omega'_z}; \quad i = x, y, z \quad (3.31)$$

bei fester Atomzahl und „wirklichen“ Frequenzen ω_i nach den gesuchten Frequenzen ω'_i und erhält somit die Grundzustandsausdehnung gemäß $\sigma'_i = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega'_i}}$. Im Energiefunktional entspricht dem ersten Term die kinetische, dem zweiten die potentielle und dem dritten die Wechselwirkungsenergie. Eine geeignete einfache Routine zur Minimierung ist im MATLAB-Programmpaket enthalten. Der Nachteil dieser Methode besteht wiederum in der Annahme gaußscher Dichteverteilungen, welche für hohe Atomzahlen zwar ungefähr die richtige Größe, aber nicht die richtige Form beschreiben kann.

Vergleich der Grundzustandsgrößen

In Bild 3.1 sind die Ergebnisse der diskutierten Näherungsverfahren miteinander verglichen. Die Dichteverteilungen in der linken Hälfte entsprechen einer typischen Situation für Experimente welche zur Beeinflussung der Materiewellendynamik in Abschnitt 4.2 durchgeführt wurden. Bei 3×10^4 Atomen in einer Falle mit Fallenfrequenzen von $\omega_{y,z} = 2\pi \times 85$ Hz und $\omega_x = 2\pi \times 20$ Hz beträgt das Verhältnis $E_{nl}/E_{kin} \simeq 1400$ und das Verhältnis $E_{nl}/(\hbar\omega_{\perp}) \simeq 15$. Die 3d-Thomas-Fermi Näherung (grün) entspricht in diesem Fall nahezu der wirklichen Verteilung [5]. Die beiden numerischen Modelle (Propagation in imaginärer Zeit (iT) (schwarz) und Methode nach Baym (rot)) approximieren deren Breite gut. Ihre Form stimmt hingegen weniger gut mit der Thomas-Fermi-Parabel überein. Die 1d-TF-Näherung (schwarz, gestrichelt) ist für diese Parameter nicht geeignet, sie erzeugt eine deutlich zu große Breite. Ein ideales Gas (blau) würde hingegen eine wesentlich schmalere Verteilung aufweisen. Für 3000 Atome, im rechten Teil der Grafik gezeigt, wird die Dichteverteilung sehr gut durch die numerische Methode (iT)

⁷In dieser Veröffentlichung wird eine radialsymmetrische Situation angenommen, die Erweiterung auf eine anisotrope Falle in allen drei Raumrichtungen ist jedoch einfach.

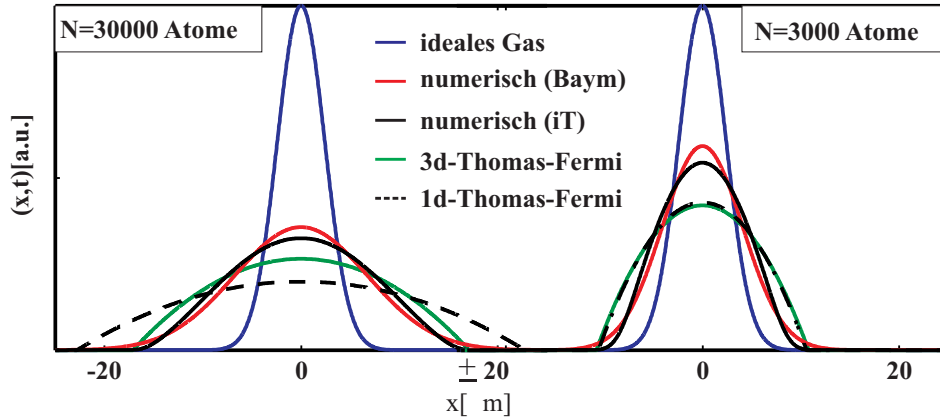


Abbildung 3.1: Profil der Grundzustandswellenfunktion in x -Richtung eines BECs in einer harmonischen Falle mit Fallenfrequenzen $\omega_{\perp} = 2\pi \times 85$ Hz und $\omega_x = 2\pi \times 20$ Hz in den verschiedenen Näherungen für zwei verschiedene Atomzahlen. Durch die repulsive Wechselwirkung ist die Ausdehnung deutlich größer als dies für ein ideales Gas (blau) der Fall wäre. Bei 3×10^4 ^{87}Rb -Atomen (linke Hälfte) beträgt das Verhältnis zwischen Wechselwirkungsenergie und kinetischer Energie etwa 1400. Die 3d-Thomas-Fermi-Näherung (grün) entspricht in diesem Fall nahezu der wirklichen Verteilung. Die beiden numerischen Methoden (iT -schwarz und Methode nach Baym (rot) approximieren diese gut. Die 1d-Thomas-Fermi-Näherung (schwarz, gestrichelt) erzeugt eine deutlich breitere Verteilung. Für 3×10^3 Atome sind die Unterschiede zwischen den Modellen wesentlich geringer. Beide TF-Näherungen erweisen sich als etwas zu groß, während die beiden numerischen Modelle fast identisch sind.

approximiert [101]. Die Methode nach Baym erzeugt ein sehr ähnliches Ergebnis. Beide TF-Modelle überschätzen die Breite etwas. Sie stimmen bei dieser Atomzahl fast überein, da die radiale 3d-TF Größe ungefähr der harmonischen Oszillatorlänge entspricht. Diese Atomzahl markiert bei gegebenen Frequenzen den Punkt, an welchem für sinkende Atomzahlen das 1d-Modell die bessere Näherung darstellt. Insgesamt sind die Unterschiede zwischen den Methoden in diesem Fall relativ klein. Die beiden numerischen Methoden haben den Vorteil, dass sie auch über die transversale Größe eine verlässliche Information liefern, die zur Berechnung der (3d-)Dichte und damit zur Wechselwirkungsenergie erforderlich ist.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass für hohe Atomzahlen die 3d-Thomas-Fermi Näherung verlässliche Ergebnisse erzeugt. Für kleine Atomzahlen ergibt die einfache numerische Methode nach Baym sinnvolle Resultate, während für quantitative Analysen die numerische Lösung (iT) berechnet werden muss.

Um Missverständnissen vorzubeugen sei nochmal kurz auf den Begriff des „schwach wechselwirkenden“ Gases eingegangen. Obwohl Statik und Dynamik des Wellenpakets in den Thomas-Fermi Regimen alleine durch die Wechselwirkung bestimmt sind, spricht man **nicht** von einem „stark wechselwirkenden“ Gas. Der Begriff bezieht sich alleine auf die in Abschnitt 3.1.1 beschriebene „quantum depletion“. Man kann dennoch einen Bezug zur Dynamik herstellen. Befindet sich das Ensemble gerade am Übergangspunkt zum Kondensat, so ist dort die Wechselwirkungsenergie sehr viel kleiner als die kinetische, dies gilt jedoch nicht mehr für das BEC bei weiterer Abkühlung.

3.2 Beeinflussung der Dynamik - BEC in periodischen Potentialen

Das Ziel der im nächsten Kapitel dargestellten Ergebnisse ist die gezielte Beeinflussung der Dynamik kohärenter Wellenpakete, welche durch die in Abschnitt 3.1.2 erläuterten Bewegungsgleichungen beschrieben werden. Den Wechselwirkungsterm kann man in ^{87}Rb Kondensaten nur durch die Änderung der Dichte des Ensembles verändern. Von der Möglichkeit der Änderung der Streulänge sei hier abgesehen. Das resonanzartige Verhalten der Streulänge bei Änderung eines homogenen äußeren Magnetfeldes bezeichnet man dabei als Feshbachresonanz. Am MPQ in München wurden mehrere dieser Resonanzen für ^{87}Rb gefunden [108], allerdings ist noch unklar, ob eine davon breit genug ist um die Streulänge definiert einstellen zu können. Was die Theorie dieser Resonanzen betrifft, sei hier auf die Literatur verwiesen [109].

Wie im Folgenden erläutert wird, benutzen wir stattdessen die Möglichkeit die Dispersion der Wellenpakete durch ein äußeres periodisches Potential zu ändern. Bevor darauf näher eingegangen wird, soll zunächst der Begriff der Dispersion anhand einer freien Materiewelle rekapituliert werden.

3.2.1 Dispersion freier Teilchen

Unter Dispersion versteht man ganz allgemein das Zerfließen eines Wellenpakets endlicher räumlicher Breite, wenn die Ursache dafür in der Abhängigkeit der Gruppengeschwindigkeit vom Wellenvektor liegt. Da Licht im Vakuum eine konstante Geschwindigkeit besitzt, dispergiert es nur in Materie. Im Gegensatz dazu ist die Dispersion freier Materiewellen wohlbekannt und eines der Paradebeispiele der Quantenmechanik. Auf Grund der Heisenbergschen Unschärferelation besitzt jedes lokalisierte Wellenpaket eine endliche Impulsunschärfe. Da die verschiedenen Impulskomponenten verschiedene (Gruppen-)Geschwindigkeiten $v = p/m = \hbar k/m$ besitzen, verbreitert sich das Wellenpaket im Laufe der Zeit. Diese Aussage erscheint so selbstverständlich, dass man sie als trivial ansehen könnte. Sie ist es jedoch nicht, wie die Überlegungen in Abschnitt 3.2.2 zeigen.

Wie die Dispersion mit der Masse der Materiewellen verknüpft ist soll anhand des eindimensionalen gaußschen Wellenpakets

$$\Psi(x, 0) \propto \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma_0^2}\right) \exp(ik_0x) \quad (3.32)$$

der anfänglichen Breite σ_0 erläutert werden, k_0 stellt dabei den Wellenvektor dar, welcher über $p = \hbar k_0$ mit dem Impuls verknüpft ist. Die lineare Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t). \quad (3.33)$$

wird gelöst durch ebene Wellen $\Psi(x, t) = \Psi(x, t = 0) \exp(-i/\hbar E t)$. Da die Energie $E(k) = p^2/2m = \hbar^2 k^2/2m$ in Abhängigkeit des Wellenvektors gegeben ist, löst man die Schrödingergleichung im Impulsraum und erhält nach Rücktransformation in den Ortsraum,

$$\Psi(x, t) = FT^{-1}(FT(\Psi(x, 0) \exp\left(-\frac{i\hbar k^2 t}{2m}\right))) \propto \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma(t)^2}\right) \exp(ik_0x) \quad (3.34)$$

wobei FT(FT⁻¹) eine Fourier(rück)transformation bedeutet. Das Wellenpaket bleibt also gaußförmig mit einer zunehmenden Breite

$$\sigma(t) = \sigma_0 \sqrt{1 + \frac{4t^2}{T_d^2}} \quad (3.35)$$

wobei die Zeitskala des Zerfließens durch die Dispersionszeit

$$T_D := \frac{m\sigma_0^2}{\hbar} \quad (3.36)$$

gegeben ist. Die Dispersion wird bestimmt durch die anfängliche Größe σ_0 des Wellenpakets, die für gaußsche Pakete mit der Impulsunschärfe⁸ $\Delta k_0 = 2/\sigma_0$ verknüpft ist, und durch die Masse m , welche sich aus der (Dispersions-)Relation $E(k) = \hbar^2 k^2 / 2m$ ergibt. Formal ergeben sich die Gruppengeschwindigkeit v_g und die Masse m durch die Beziehungen

$$v_g = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E(k)}{\partial k} = \frac{\hbar k}{m} \quad \text{und} \quad m = \text{const.} = \hbar \left(\frac{\partial v_g}{\partial k} \right)^{-1} = \hbar^2 \left(\frac{\partial^2 E}{\partial k^2} \right)^{-1}. \quad (3.37)$$

Anschaulich bestimmt die Masse die Dispersion, da sie festlegt, wie groß die Geschwindigkeitsdifferenz (Δv_g) von Wellenpaketen bei gegebenem Impulsunterschied (Δk) ist. Man erkennt hieran wie es möglich sein wird die Dispersion zu ändern. Eine geänderte nicht parabolische Dispersionsrelation wird zu einer impulsabhängigen Masse führen, die die Dynamik mitbestimmt.

3.2.2 Modifikation der Dispersionsrelation

Die Dispersionsrelation freier Teilchen kann modifiziert werden, indem man diese einem periodischen Potential aussetzt, wobei hier nur sinusförmige Potentiale, die durch Überlappung nicht resonanter gegenläufiger Laserstrahlen der Wellenlänge λ_{sw} (s. Abschnitt 1.4.2) entstehen, betrachtet werden. Wenn man die Wechselwirkung zwischen den Atomen für einen Augenblick außer Acht lässt, so könnte man die lineare Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_0 \sin(2k_r x - \Delta\omega t) \right] \Psi(x, t). \quad (3.38)$$

numerisch lösen, man erhält dabei aber wenig Einsicht in die Physik des Problems. Die Potentialtiefe V_0 ist, wie in Abschnitt 1.4.2 diskutiert wurde, durch die Intensität der Laserstrahlen mit dem Wellenvektor k_r und der Verstimmung $\Delta\omega$ gegeben. Für ein intuitives Verständnis hilft hingegen der Blick in die Lehrbücher der Festkörperphysik, die Physik von Elektronen im periodischen Feld der Atomkerne wird dort ausführlich diskutiert [110], sie sei hier kurz (z.T. nur für den Spezialfall sinusförmiger Potentiale) zusammengefasst.

⁸Memo: Die Größen σ_0 und Δk bezeichnen die $1/e^2$ -Breiten der entsprechenden Gaußverteilungen. Daraus ergeben sich die formalen Abweichungen der angegebenen Gleichungen von den meisten Lehrbüchern, die in Regel r.m.s.-Breiten verwenden.

3.2.3 Stationäre Lösungen im periodischen Potential

Das Bloch'sche Theorem [110] besagt, dass die stationären Lösungen der Gleichung 3.38, welche in ihrer zeitunabhängigen Form als Mathieugleichung bezeichnet wird, folgende Form annehmen:

$$\Psi(x) = \phi_{n,k}(x) = u_{n,k}(x) \exp(ikx), \quad (3.39)$$

wobei die Funktionen $u_{n,k}(x) = u_{n,k}(x + d)$, dieselbe Periode $d = \frac{\pi}{k_r}$ zeigen, wie das äußere Potential [111]. Die Energieeigenwerte $E_{n,k} = E_{n,k+2k_r}$ bilden eine Bandstruktur mit dem Bandindex n für jeden Wert des Wellenvektors k , der auch als Quasiimpuls⁹ bezeichnet wird. Da auch die Bandstruktur die Periode des Gitters besitzt, kann man sich auf Wellenvektoren innerhalb der ersten Brillouinzone $[-\pi/d < k \leq +\pi/d]$ beschränken. Die Bestimmung der Energieeigenwerte für jeden Quasiimpuls k erfolgt nach den Methoden der Festkörperphysik [110]. Kurz gefasst: man entwickelt die Funktionen $u_{n,k}(x) = \sum_K c_{k-K} e^{-iKx}$ und das Potential $V(x) = 1/4 \cdot V_0 \exp(2ik_r x) + 1/4 \cdot V_0 \exp(-2ik_r x)$ nach ebenen Wellen und löst die in den Impulsraum transformierte resultierende Gleichung

$$\frac{\hbar^2}{2m} (k - K)^2 c_{k-K} + \frac{1}{4} V_0 c_{k-K-Q} + \frac{1}{4} V_0 c_{k-K+Q} = E(k) c_{k-K} \quad (3.40)$$

für jeden Wellenvektor k . Dabei wurde verwendet, dass das periodische Potential nur ebene Wellen koppelt, die sich um vielfache des Gittervektors $K = m \cdot 2k_r$ ($m \in \mathbb{N}$) unterscheiden. Numerisch löst man das Problem durch Diagonalisierung der Eigenwertmatrix in Gl. 3.40 unter Berücksichtigung einer endlichen Zahl von Gittervektoren K . Man erhält die Eigenwerte $E_{n,k}$ und als Eigenvektoren die Entwicklungskoeffizienten c_{k-K} .

Die Näherung schwacher Potentiale

Die Potentialtiefe V_0 betrug bei den durchgeführten Experimenten $0.3 E_r$ bis $8 E_r$, wobei $E_r = \frac{\hbar^2 k_r^2}{2m}$ die Photonrückstoßenergie darstellt, sie entspricht der Energie eines freien Teilchens mit dem Wellenvektor k_r . Für schwache Potentiale $V_0 < 2 E_r$ werden nur die ersten beiden Bänder signifikant geändert, alle höheren Bänder entsprechen der Dispersionsrelation freier Teilchen. Es genügt demnach in der Entwicklung der Blochfunktionen nach ebenen Wellen nur die Impulskomponenten der ersten beiden Brillouinzone zu berücksichtigen. Daraus erhält man gute analytische Näherungen für die beiden Bänder. Aus den Energieeigenwerten des untersten Bandes

$$\frac{E_0(\kappa)}{E_r} = 1 + (\kappa - 1)^2 - \sqrt{4(\kappa - 1)^2 + s^2/16} \quad (3.41)$$

kann man wiederum die Gruppengeschwindigkeit

$$\frac{v_g(\kappa)}{v_r} = \frac{1}{2E_r} \frac{\partial E(\kappa)}{\partial \kappa} = (\kappa - 1) \left(1 - \frac{2}{\sqrt{4(\kappa - 1)^2 + s^2/16}} \right) \quad (3.42)$$

⁹Der Zusatz „quasi“ leitet sich von der Tatsache ab, dass es im periodischen Potential keine eindeutige Beziehung zwischen Impuls und Wellenvektor gibt.

und die Masse berechnen

$$\frac{m_{\text{eff}}(\kappa)}{m} = \frac{1}{2E_r} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial \kappa^2} \right)^{-1} = \left(1 - \frac{2}{\sqrt{4(\kappa-1)^2 + s^2/16}} + \frac{8(\kappa-1)^2}{(4(\kappa-1)^2 + s^2/16)^{3/2}} \right)^{-1}. \quad (3.43)$$

Dabei bezeichnet $s := \frac{V_0}{E_r}$ die Potentialtiefe in Einheiten der Photonrückstoßenergie. Die Rückstoßgeschwindigkeit v_r entspricht der Geschwindigkeit eines freien Teilchens mit der Energie E_r . Die Größe $\kappa = \frac{k}{k_r}$ bezeichnet den auf die Bandkante skalierten Wellenvektor. Im Gegensatz zu freien Teilchen ist die Gruppengeschwindigkeit nun nicht mehr proportional zum Wellenvektor und die Masse ist nicht mehr konstant, weshalb man auch von effektiver Masse spricht.

Bevor die Dispersionsrelation genauer diskutiert wird, soll zunächst die Frage beantwortet werden, wie sich die geänderte Dispersionsrelation auf die Dynamik der Wellenpakete auswirkt. Dazu wird im Folgenden eine Bewegungsgleichung hergeleitet, die das periodische Potential nicht mehr explizit enthält und somit ein intuitives Verständnis der physikalischen Abläufe ermöglicht.

3.2.4 Eine vereinfachte Bewegungsgleichung zur Beschreibung der Dynamik

Bei der Beschreibung von Materiewellen in periodischen Potentialen durch den Blochformalismus geht man davon aus, dass die Blochfunktionen unendlich ausgedehnt sind; im Potential der Schrödingergleichung 3.38 wurde kein äußeres begrenzendes Potential berücksichtigt. Im Experiment liegen hingegen immer endlich ausgedehnte Wellenpakete vor. Man kann jedes Wellenpaket zunächst formal nach Blochfunktionen¹⁰

$$\Psi(x, t) = \sum_n \sum_k A_{n,k}(t) \phi_{n,k} \exp\left(-i \frac{E_{n,k} t}{\hbar}\right) \quad (3.44)$$

entwickeln, wobei die $A_{n,k}$ die Entwicklungskoeffizienten darstellen. Im Allgemeinen vereinfacht dieser Ansatz die Beschreibung jedoch nicht, da eine große Anzahl $A_{n,k}$ notwendig wäre, um die Dynamik korrekt zu beschreiben. Für Bose-Einstein Kondensate, die im untersten Band ($n = 1$) präpariert werden können (s. Abschnitt 3.2.6), entfällt die Summe über die Bänder n . Man kann den Ansatz 3.44 zudem für Wellenpakete vereinfachen, die sich räumlich über viele Perioden des Potentials erstrecken. Im Impulsraum ist das Wellenpaket dann um einen bestimmten Wellenvektor k_0 lokalisiert. Man berücksichtigt die schnelle Oszillation der Wellenfunktion durch die Blockfunktion ϕ_{1,k_0} des zentralen Wellenvektors und beschreibt die Lokalisierung im Ortsraum durch eine langsam veränderliche Einhüllende:

$$\Psi(x, t) = f(x, t) \phi_{1,k_0} \exp\left(-i \frac{E_{1,k_0} t}{\hbar}\right) \quad (3.45)$$

Für die Einhüllende $f(x, t)$ kann man dann die Bewegungsgleichung

$$i\hbar \left(\frac{\partial f}{\partial t} + v_g(k_0) \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \left[\frac{\hbar^2}{2m_{\text{eff}}(k_0)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) + \alpha_{nl}(k_0, V_0) NG(|f|^2) \right] f(x, t) \quad (3.46)$$

¹⁰Die Blochfunktionen stellen einen vollständigen Satz von Funktionen des zugehörigen Hilbertraums dar.

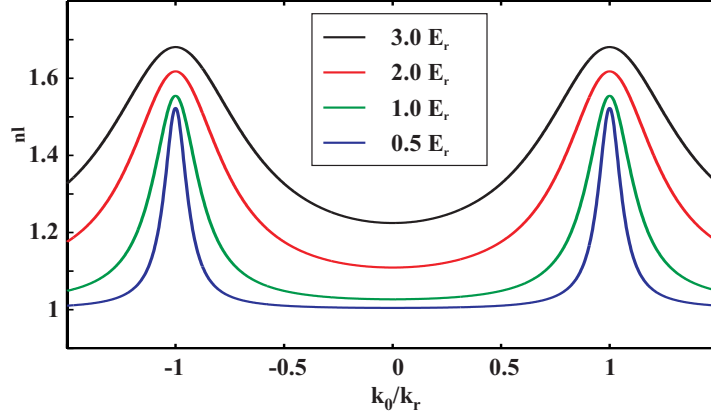


Abbildung 3.2: Abhängigkeit der Korrekturfaktors α_{nl} vom Quasiimpuls für verschiedene Potentialtiefen V_0 . α_{nl} wächst sowohl mit steigendem Quasiimpuls (bis zur Bandkante), als auch mit steigender Potentialtiefe monoton. Für kleine Potentialtiefen und Quasiimpulse im Zentrum der Brillouinzone ist die Korrektur vernachlässigbar klein. Im Bereich sehr tiefer Potentiale $V_0 > 10E_r$ würde die Abhängigkeit vom Quasiimpuls verschwinden.

herleiten, indem man den effektive Masseformalismus benutzt [112]. Sie wurde für Materiewellen von Steel et al. [113] formuliert, die ausführliche Herleitung ist in der Publikation von Pu et al. [114] nachzulesen. Eine alternative Ableitung nach der „multiple scales“ Methode findet sich in der Diplomarbeit von K.M. Hilligsøe [115], sie ist von der Ableitung der Einhüllendengleichung für optische Pulse in Glasfasern mit periodisch moduliertem Brechungsindex (einem nahezu identischen Problem) bekannt [116, 117].

Das Potential $V(x)$ in Gl. 3.46 beinhaltet nicht mehr das periodische Potential, sondern nur noch dasjenige, welches das Wellenpaket in seiner Ausdehnung beschränkt, für eine freie Propagation verschwindet dieser Term. Der Nichtlinearitätsterm $NG(|f|^2)$ wurde hier formal wieder eingefügt. Das nachträgliche Einfügen dieses Terms ist nur solange eine gute Näherung, solange die Nichtlinearität als kleine Störung betrachtet werden kann. Die maximale Nichtlinearität muss kleiner als die Bandaufspaltung zwischen den ersten beiden Bändern sein (s. Abschnitt 3.2.5). Diese Bedingung war bei den durchgeführten Experimenten immer erfüllt.

Die Funktion $G(|f|^2)$ entspricht je nach Näherung den nichtlinearen Ausdrücken aus Gl. 3.13 oder 3.17. Dieser Wechselwirkungsterm wird modifiziert durch die Größe

$$\alpha_{nl}(n, k, V_0) = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx |u_{n,k_0}(x)|^4. \quad (3.47)$$

Man berücksichtigt dadurch die geänderte mittlere Nichtlinearität auf Grund der Modulation der Wellenfunktion im periodischen Potential. In Abb. 3.2 ist α_{nl} in Abhängigkeit vom Quasiimpuls k_0 für verschieden Potentialtiefen gezeigt. Im untersten Band steigt $\alpha_{nl}(k_0, V_0)$ stetig mit wachsendem Quasiimpuls, wobei die Korrekturen für kleine Potentialtiefen und Quasiimpulse im Zentrum der Brillouinzone vernachlässigbar klein sind. Am Rand der Bandkante ist die Wellenfunktion u_{1,k_r} in der Näherung schwacher Potentiale eine Sinusfunktion und somit „maximal“ moduliert, dort erhält man $\alpha_{nl}(k_r) = 1.5$. Verlässt man den Bereich schwacher Potentiale so steigt α_{nl} stetig mit wachsender Poten-

tialtiefe V_0 für alle Quasiimpulse. Im Bereich sehr starker Potentiale $V_0 > 10E_r$ („Tight Binding regime“) verschwindet die Abhängigkeit vom Quasiimpuls. Die Dynamik des BEC wird dann nicht mehr durch die besprochenen Gleichungen sondern durch eine diskrete nichtlineare Schrödingergleichung beschrieben [118].

Die Gleichung 3.46 besagt in der dargestellten „effektiven Masse-Näherung“ demnach, dass sich eine Materiewelle in einem periodischen Potential genauso entwickelt wie es ein freies Teilchen mit der geänderten Masse $m_{\text{eff}}(k)$ ¹¹ und der Gruppengeschwindigkeit $v_g(k)$ tun würde. Die Auswirkungen der Nichtlinearität werden erst in Abschnitt 3.3 diskutiert. Zunächst wird die geänderte lineare Dispersion besprochen.

3.2.5 Lineare Dynamik im periodischen Potential

Die lineare Dynamik der Materiewellenpakete wird bestimmt durch die Dispersionsrelation $E(k)$. Da bei den durchgeführten Experimenten die Atome nur im untersten Band präpariert werden, wird dieses im Folgenden ausführlich diskutiert. In Abb.3.3(a) ist die numerisch bestimmte Dispersionsrelation unter Berücksichtigung von 9 Brillouinzone für die drei untersten Bänder, bei einer Potentialtiefe von $V_0 = E_r$ in Abhängigkeit des Wellenvektors dargestellt. Der Wellenvektor ist dabei auf denjenigen an der Bandkante (k_r) und die Energie auf die Rückstoßenergie E_r skaliert. Das dritte Band (grün) wird nur sehr schwach an der unteren Bandkante verändert, es kann als freies Band angesehen werden (d.h. die Dispersion ist dort nicht geändert). Auch die unteren beiden Bänder (blau und schwarz) unterscheiden sich im Zentrum der Brillouinzone (um $k=0$) über weite Bereiche nicht von der freien Parabel $E(k) = \hbar^2 k^2 / 2m$. Hingegen gibt es in der Nähe der Bandkante bei $k/k_r = \pm 1$ signifikante Abweichungen.

Aus diesen Abweichungen von der freien Dispersionsrelation ergibt sich die komplette geänderte Dynamik von Materiewellen in periodischen Potentialen. Dieser Bereich in den Abbildungen (b)-(e) gelb unterlegt.

In Abb. 3.3(b) ist nochmals die numerisch berechnete Bandstruktur des untersten Bandes (schwarz) zusammen mit der analytischen Näherung für schwachen Potentiale (grün) gezeichnet. Die Übereinstimmung ist so gut, dass zur besseren Unterscheidung letztere vertikal versetzt dargestellt ist. Bis etwa $0.5 k_r$ stimmen beide sehr gut mit der freien Parabel (blau, gestrichelt) überein. Bei $k_\infty \approx 0.8 k_r$ verschwindet die Krümmung der Dispersionsrelation (dies entspricht dem Beginn des gelb markierten Bereiches), im Bereich bis zur Bandkante ist diese dann negativ. An der Bandkante existiert eine Energielücke (engl. „band gap“) zum zweiten Band, die für kleine Potentiale $\Delta E = V_0/2$ beträgt.

Die Auswirkungen auf die Gruppengeschwindigkeit und auf die Masse, die entsprechend den Gl. 3.42 und 3.43 berechnet werden, sind in den Abbildungen (c) und (d) zu sehen. Beide Größen sind auf ihre „natürlichen“ Werte ($v_r = \hbar k_r / m$ und m_0) von freien Teilchen mit Quasiimpuls k_r skaliert. Die Funktionen für freie Teilchen sind wiederum gestrichelt eingezeichnet. Um $k = 0$ herum gibt es wie für $E(k)$ praktische keine Abweichungen. An der Stelle verschwindender Krümmung von $E(k)$ erreicht die Gruppengeschwindigkeit ihr Maximum, während die Masse dort divergiert. Für weiter zunehmende Wellenvektoren sinkt die Gruppengeschwindigkeit wieder, um direkt an der Bandkante zu verschwinden, Die Masse ist in diesem Bereich negativ und erreicht ihr betragsmäßi-

¹¹Der Index am zentralen Wellenvektor wird im Folgenden nicht mehr ausgeschrieben: $k_0 \rightarrow k$.

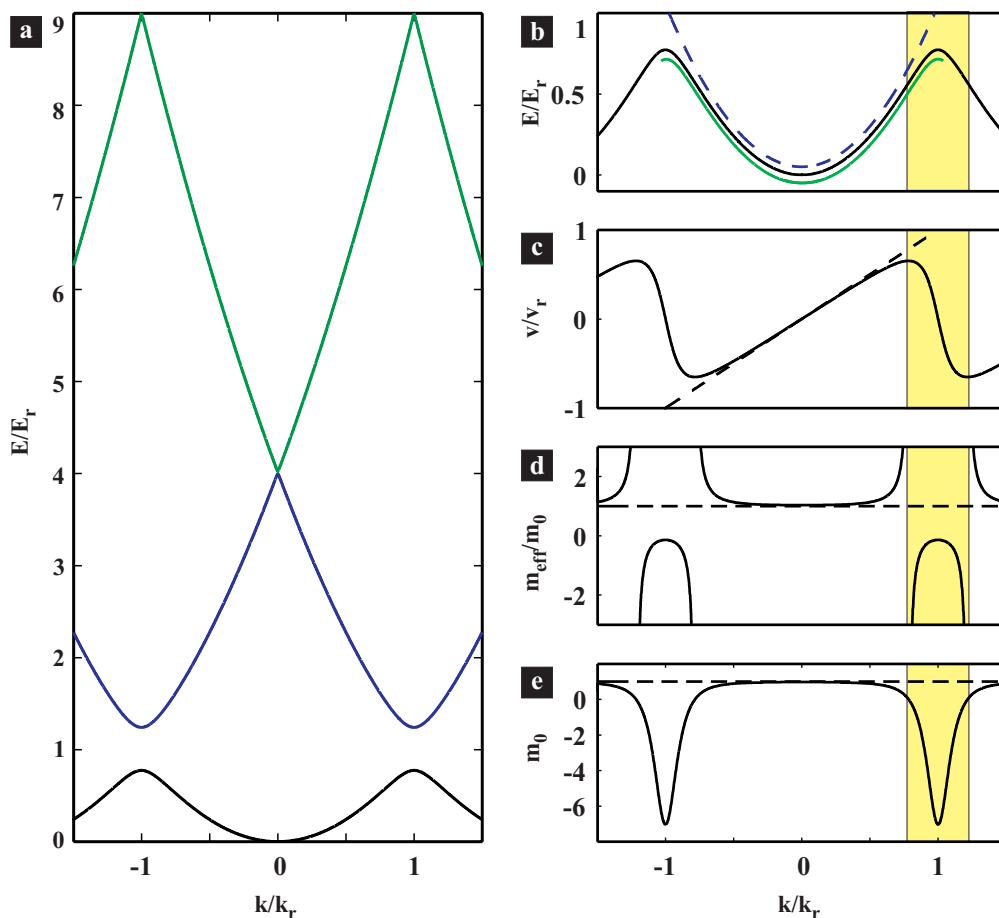


Abbildung 3.3: (a) Dispersionsrelation $E(k)$ für die untersten drei Bänder bei einer Potentialtiefe von $V_0 = E_r$. Während das dritte Band als frei angesehen werden kann, weichen die unteren beiden am Rand der Brillouinzone ($k = k_r$) von der freien Parabel $E \propto k^2$ ab. (b) Das unterste Band (schwarz) vergrößert dargestellt. Die Näherung schwacher Potentiale (grün) ist fast identisch mit der exakten Relation. Beide Kurven weichen erst am Rand der Brillouinzone von der freien Parabel (blau gestrichelt) ab. Die Kurven sind zur besseren Unterscheidung vertikal versetzt. (c) Die Gruppengeschwindigkeit v_g zeigt am Rand der Bandkante ebenso wie die Masse (d) signifikante Abweichungen von den Werten für freie Teilchen (jeweils gestrichelte Linien). In Bild (d) ist der Dispersionsparameter $\beta = 1/m_{\text{eff}}$ aufgetragen. Er veranschaulicht direkt, ob die lineare Dispersion verlangsamt ($|\beta| < 1$) oder verstärkt ist ($|\beta| > 1$).

ges Minimum für $k = k_r$. In der Näherung schwacher Potentiale beträgt die Masse dort $m_{\text{eff}} = \frac{s}{s-8}m_0$, wobei wiederum $s := V_0/E_r$ die skalierte Potentialtiefe bezeichnet. In Abb. 3.3 (e) ist der Dispersionsparameter $\beta = 1/m_{\text{eff}}$ aufgetragen. Er veranschaulicht direkt, ob die lineare Dispersion verlangsamt ($|\beta| < 1$) oder verstärkt ist ($|\beta| > 1$).

Man kann demnach in der Bandstruktur drei ausgezeichnete Punkte erkennen. Im Zentrum des Impulsraums ($k = 0$) ist die Dynamik nahezu unverändert. Hingegen ist für $k = k_\infty$ die Dispersion vollkommen unterdrückt ($\beta = 0$), ein Wellenpaket zerfließt dort

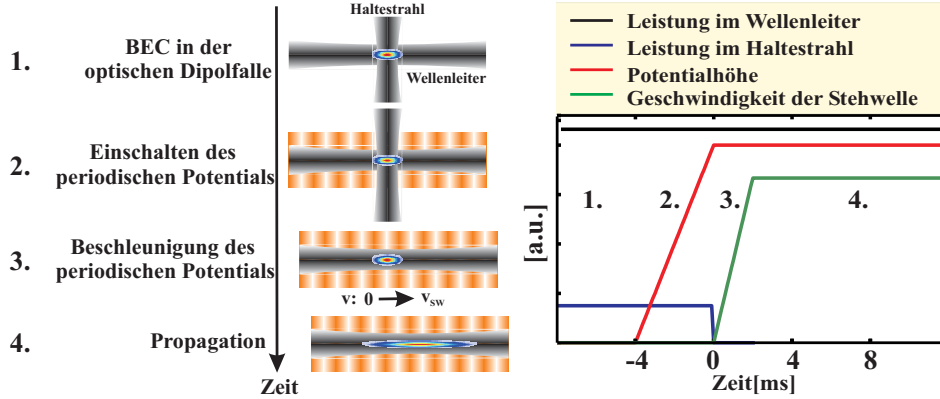


Abbildung 3.4: Präparation des Kondensats im Quasiimpulsraum. Nach der Erzeugung des Kondensats in der Dipolfalle (Phase 1) wird zunächst ein stehendes periodisches Potential eingeschaltet (Phase 2). Die bei $k = 0$ präparierten Atome werden anschließend durch die Beschleunigung der Stehwelle auf die gewünschte Position $k = \frac{m\delta\nu\lambda_{sw}}{2\hbar}$ im Impulsraum verschoben (Phase 3). Danach beginnt die Propagation des Wellenpakets mit geänderter Dispersion (Phase 4).

nicht¹². Im Gegensatz dazu wird das Zerfließen des Wellenpakets am Brillouinzone Rand $k = k_r$ sogar noch verstärkt, da die Masse dort ihren minimalen, bzw der Dispersionsparameter seinen maximalen Absolutwert annimmt. Anschaulich bedeutet eine negative Masse, dass sich Teilchen mit höherer Energie langsamer bewegen als diejenigen mit niedriger Energie. Eine Kraft auf das Teilchen führt demnach zu einer Beschleunigung in die entgegengesetzte Richtung.

3.2.6 Präparation der Wellenpakete im Quasiimpulsraum

Um die geänderte Dispersion ausnutzen zu können, verschiebt man die Wellenpakete im Quasiimpulsraum in die Nähe der Bandkante. Man könnte dazu durch ein äußeres Potential eine Kraft $F(t)$ auf das Kondensat ausüben, welche zu einer Veränderung des Quasiimpulses $dk/dt = F(t)/\hbar$ führt¹³. Wir beschleunigen stattdessen das periodische Potential, die Verschiebung im Quasiimpulsraum $dk/dt = ma(t)/\hbar$ wird in diesem Fall durch Trägheitskräfte beschrieben. Durch Variation der Leistung und des Frequenzunterschieds $\delta\nu$ der beiden gegenläufigen Laserstrahlen, die das periodische Potential erzeugen (s. Abschnitt 1.4.2), kann die Potentialtiefe und die Geschwindigkeit $v = \frac{\hbar k}{m} = \frac{\delta\nu\lambda_{sw}}{2}$ des Potentials eingestellt werden. In Abbildung 3.4 ist der Präparationsprozess schematisch dargestellt. Der Ausgangspunkt ist das Kondensat in der gekreuzten Dipolfalle. Man erhöht zunächst innerhalb von $t_1 = 4\text{ ms}$ linear die Amplitude des periodischen Potentials, wobei die Laser nicht gegeneinander verstimmte $\delta\nu = 0$ sind. Die Atome werden dadurch im Quasiimpulsraum bei $k = 0$ mit Heisenberg-limitierter endlicher Impulsbreite präpariert. Die Wellenpaketdynamik beginnt mit dem Abschalten des Haltestrahls. Zu

¹²genauer müsste man sagen: es zerfließt dort auf Grund der endlichen Impulsbreite und Dispersion höherer Ordnung sehr langsam. An dieser Stelle versagt der effektive Masseformalismus.

¹³Im periodischen Potential wirken Kräfte auf den Quasiimpuls, nur mittelbar über die Beziehung $v_g = v_g(k)$ wirken sie sich auf den Impulsraum aus.

diesem Zeitpunkt beginnt die Beschleunigung des Potentials. Durch eine lineare Rampe des Frequenzunterschieds $\delta\nu(t) = \alpha t$ werden die Atome im Impulsraum an die gewünschte Position $k = \frac{m\delta\nu\lambda_{sw}}{2\hbar}$ verschoben. Die Dauer t_2 dieser Beschleunigungsphase liegt im Bereich zwischen 1.4 ms und 3 ms.

Damit bei dieser Präparation Übergänge der Atome in höhere Energiebänder vermieden werden, muss der Prozess das Kriterium für Adiabaticität

$$\left| \langle n, k | \frac{d}{dt} | 1, k \rangle \right|^2 \ll \frac{|E_n(k) - E_1(k)|^2}{\hbar^2} \quad (3.48)$$

erfüllen [119], wobei $|n, k\rangle$ die Blochzustände bezeichnet. Dabei sind Übergänge zwischen benachbarten Bändern besonders kritisch. Daher wird im Folgenden nur $n = 2$ betrachtet. Vernachlässigt man die Nichtlinearität so kann man dieses Kriterium in der Näherung schwacher Potentiale $V_0 \leq 2E_r$ analytisch auswerten [120]. Bei einer Potentialtiefe $V_0 = E_r$ muss für die Dauer der linearen Amplitudenrampe im Zentrum der Brillouinzone nach Gl. 3.48 $t_1 \gg 1/32\sqrt{2}E_r/\hbar = 0.9 \mu\text{s}$ gelten. Man könnte die Amplitudenrampe noch sehr viel kürzer als im Experiment wählen.

Beschleunigt man das Potential, so ist die Adiabaticitätsbedingung umso schwerer zu erfüllen, je kleiner $|E_2(k) - E_1(k)|$ ist. Am kritischsten ist demnach eine Beschleunigung an die Bandkante oder über diese hinaus. Wertet man Gl. 3.48 für diesen Fall aus, so erhält man folgende Bedingung für die Dauer t_2 der Beschleunigungsphase

$$t_2(k, V_0) \gg \frac{16mE_r k}{k_r^3 \hbar V_0^2} = 0.34 \text{ ms} \frac{k[k_r]}{V_0^2 [E_r^2]} \quad (3.49)$$

Dieses Forderung ist schwieriger zu erfüllen, als diejenige für die Amplitudenrampe, da man die Beschleunigungszeit nicht beliebig lang machen kann. Damit die Dynamik der Materiewelle nicht wesentlich durch diese Phase beeinflusst wird, sollte $t_2 \simeq 2 \text{ ms}$ kürzer als die charakteristische Zeitskala der Wellenpaketdynamik sein. Diese kann im Experiment durchaus in der Größenordnung von einer ms liegen. Man hat dies in der Beurteilung der experimentellen Ergebnisse zu berücksichtigen.

Mit Ausnahme der Bandkante (wegen $|E_2(k_r, V_0 = 0) - E_1(k_r, V_0 = 0)| = 0$), könnte man die Präparation auch durchführen, indem man ein laufendes Gitter der gewünschten Geschwindigkeit einschaltet. Dies ist nicht geschehen, da ein wesentlicher Teil der Experimente im Bereich der Bandkante durchgeführt wurde.

Berücksichtigt man die Wechselwirkung zwischen den Atomen, so wurde von Wu und Niu gezeigt, dass sich die Wahrscheinlichkeit eines Übergangs in höhere Bänder erhöht [121, 122]. Als wesentlicher Parameter hat sich das Verhältnis von Potentialtiefe zu Nichtlinearität $\eta = \frac{V_0}{N\alpha_{nl}g|\Psi|_{\text{max}}^2}$ herausgestellt. Der lineare Fall liegt für $\eta \gg 1$ vor. Im Bereich $\eta \geq 1$ wurden die Korrekturen der Tunnelwahrscheinlichkeit in [121] für verschiedene η numerisch berechnet. Falls $\eta < 1$ wird, bricht die Beschreibung durch lineare Blochwellen zusammen. An der Bandkante entsteht eine Schleife in der Bandstruktur, die die adiabatische Präparation von Atomen mit Quasiimpulsen oberhalb der Bandkante verhindert [121, 123, 124]. Im Experiment wurden die Potentialhöhen und die Beschleunigungszeit t_2 so gewählt, dass kein signifikanter Anteil der Atome ins zweite Band gelangt. Zur Eichung der Potentialtiefe kann hingegen gerade die nicht adiabatische Präparation der Materiewelle benutzt werden (s. Abschnitt 4.1.2).

3.3 Nichtlineare Dynamik kohärenter Wellenpakete

3.3.1 Analogie zur nichtlinearen Optik

Um den Einfluss der Nichtlinearität auf die Dynamik der Materiewelle zu verstehen, lohnt sich ein Vergleich der freien Bewegungsgleichung 3.46 (ohne externes Potential) im Bezugssystem des Massenschwerpunkts

$$i\hbar \frac{\partial f}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m_{\text{eff}}(k)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \alpha_{nl} g_{1d} N |f|^2 \right] f \quad (3.50)$$

mit einer Gleichung, die in der nichtlinearen Optik wohlbekannt ist. Die Entwicklung der Einhüllenden¹⁴ $A(x,t)$ eines Laserpulses mit der Zentralfrequenz ν_0 in einer „single-mode“ Glasfaser wird dort durch die folgende Gleichung beschrieben [125]¹⁵:

$$i \frac{\partial A}{\partial x} = \left[\frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \gamma |A|^2 \right] A \quad (3.51)$$

Dabei sind

$$\beta_2 = \frac{1}{\nu_0} \frac{d^2 n}{d\lambda^2}; \quad \gamma = \frac{2\pi\nu_0 n_2}{c A_{\text{eff}}} \quad (3.52)$$

die Koeffizienten der Gruppengeschwindigkeitsdispersion und der Nichtlinearität, wobei A_{eff} die effektive transversale Fläche der Glasfaser (definiert analog zu Gl. 3.15) bezeichnet. Die Nichtlinearität stammt in diesem Fall von der Intensitätsabhängigkeit des Brechungsindex (Kerr-Effekt)

$$n(\nu_0) = n_0(\nu_0) + n_2 \frac{|A|^2}{A_{\text{eff}}}. \quad (3.53)$$

Die Parameter β_2 und n_2 sind materialabhängig und können als konstant angesehen werden, solange die Linienbreite des Lasers so klein ist, dass höhere Dispersionssterme vernachlässigt werden können¹⁶. Die beiden Gleichungen sind formal identisch wenn man gemäß der Übersetzungstabelle

t,x	\longleftrightarrow	x,t
β_2	\longleftrightarrow	$\hbar/m_{\text{eff}} = \hbar\beta$
γ	\longleftrightarrow	$2\alpha_{nl} a \omega_{\perp}$

die Zeit- und Ortsableitungen vertauscht, sowie die Koeffizienten von Dispersions- und nichtlinearem Term transformiert.

Auf Grund dieser Analogie sollten die aus der Optik bekannten nichtlinearen Phänomene auch für Materiewellen beobachtbar sein. Beide Systeme sind geeignet die Entwicklung von Wellenpaketen zu untersuchen, deren Dynamik entweder durch die lineare Dispersion, durch nichtlineare Prozesse oder durch deren gegenseitiges Wechselspiel bestimmt wird. Im Vergleich zur Optik bietet das System kohärenter Materiewellen in

¹⁴Die Einhüllende ist so normiert, dass $|A(x,t)|^2$ die Leistung darstellt.

¹⁵Diese Gleichung gilt im mitbewegten Bezugssystem des Laserpulses.

¹⁶In SiO₂-Glasfasern gilt dies für Pulse, die länger als 1 Pikosekunde dauern und deren Zentralfrequenz nicht am Ort verschwindender Dispersion ($\lambda = 1.27 \mu\text{m}$) liegt [125].

periodischen Potentialen den Vorteil, dass die Dispersion, wie vorher diskutiert, durch das optische Gitter sowohl in der Größe als auch im Vorzeichen gezielt eingestellt werden kann¹⁷. Desweiteren hat man die Möglichkeit die Ausbreitung der Materiewelle zu beliebigen Zeitpunkten zu beobachten, während in optischen Fasern deren Länge die Dauer des Experiments festlegt. Ein weiterer großer Unterschied besteht darin, dass die Wechselwirkung zwischen den Atomen in einem BEC „normalerweise“ so groß ist, dass der nichtlineare Term gegenüber der Dispersion dominiert. Im Gegensatz dazu konnten nichtlineare Effekte in Glasfasern erst beobachtet werden nachdem leistungsstarke Laser mit kurzer Pulsdauer (< 1 ns) verfügbar waren.

Besonders interessant ist die Entwicklung von Wellen, wenn dispersive und nichtlineare Effekte von gleicher Größenordnung sind. Eine bekannte Klasse von Lösungen der Gleichungen 3.50 und 3.51 sind in diesem Fall so genannte *Solitonen*. Diese stellen lokalisierte, nicht zerfließende, zeitunabhängige oder zeitperiodische Wellenpakete dar, die in Systemen entstehen, deren Dynamik durch bestimmte nichtlineare Gleichungen beschrieben wird¹⁸. Abhängig von den Vorzeichen der Nichtlinearität und des Dispersionsterms unterscheidet man zwei Arten von Solitonen: „dunkle“ Solitonen für verschiedenes Vorzeichen und „helle“ für gleiches Vorzeichen. Beschränkt man sich im Folgenden auf den Fall eines ⁸⁷Rb BECs, so ist das Vorzeichen des Wechselwirkungsterm $\alpha g_{1d} N |f|^2$ durch die Streulänge $a = +5.32$ nm in der Kopplungskonstante $g_{1d} = 2\hbar a \omega_{\perp}$ festgelegt. Das Vorzeichen des Dispersionsterms wird bestimmt durch die effektive Masse des Wellenpakets.

3.3.2 Dunkle Solitonen

Ohne periodisches Potential, also positive Masse $m_{\text{eff}} > 0$ existieren somit dunkle Solitonen¹⁹. Diese stellen ein formstabiles Dichteminimum mit einem Phasensprung der Wellenfunktion innerhalb eines breiten (idealerweise homogenen) Untergrundes dar. Liegt das Minimum der Wellenfunktion bei $|f|_{\text{min}}^2 = 0$, so beträgt der Phasensprung $\Delta\phi = \pi$, das Dichteminimum ist stationär, man spricht von einem „schwarzen“ Soliton. Bleibt das Dichteminimum endlich $|f|_{\text{min}}^2 > 0$ so ist der Phasensprung $\Delta\phi < \pi$, und das „graue“ Soliton bewegt sich mit einer endlichen Geschwindigkeit. Zur Veranschaulichung sind in Abbildung 3.5 (a) die Dichteverteilungen und die ortsabhängige Phase für ein stationäres schwarzes sowie für ein graues Soliton zu zwei verschiedenen Zeiten dargestellt. Das graue Soliton bewegt sich an den Rand des Wellenpakets. Dies ist in Abbildung 3.5 (b) nochmals verdeutlicht. Aufgetragen sind die Zeitentwicklungen der Dichteverteilungen. Für das schwarze Soliton in einem homogenen Untergrund (Dichte ρ_0) erhält man als Dichteverteilung

$$|f(x)|^2 = \rho_0 \tanh\left(\frac{x}{x_0}\right) \quad (3.54)$$

wobei $x_0 = \frac{\sqrt{2}\hbar}{\sqrt{m g_{3d} \rho_0}}$ die Solitonbreite bezeichnet. Auf die Details dunkler Solitonen wird hier nicht eingegangen. Sie konnten bereits in BECs mit repulsiver Wechselwirkung erzeugt und untersucht werden. Es wird diesbezüglich auf die Literatur verwiesen [125, 128, 129, 130, 131, 132].

¹⁷Mittlerweile ist dies auch in photorefraktiven Kristallen in optischen Systemen möglich [126, 127].

¹⁸Es sind über hundert Differentialgleichungen bekannt, die durch Solitonen gelöst werden.

¹⁹Man beachte das Minuszeichen vor dem Dispersionsterm in der Schrödinger-Gleichung.

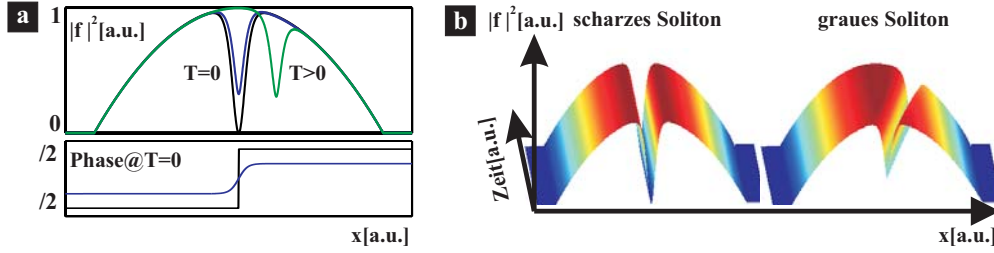


Abbildung 3.5: Dunkle Solitonen: (a) Dichteverteilungen $|f(x)|^2$ und Phase für ein stationäres schwarzes und ein sich bewegendes graues Soliton. (b) Zeitentwicklung der Dichteverteilungen für die beiden Fälle. Man erkennt, dass das schwarze Soliton stationär ist, während sich das graue Soliton an den Rand des Wellenpakets bewegt.

3.3.3 Helle Solitonen

Interessanter als „dunkle“ sind so genannte „helle“ Solitonen, die für gleiches Vorzeichen von Dispersions- und nichtlinearem Term existieren. Zum einen bildet bei ihnen das Wellenpaket als ganzes das Soliton und zum anderen sind sie stabiler als die dunkle Variante, die Solitodynamik kann für längere Zeit beobachtet werden. Sie bilden den stationären Grundzustand für Kondensate mit attraktiver Wechselwirkung ($a < 0$) und normaler Masse ($m = m_0 > 0$). Im Gegensatz dazu konzentriert sich diese Arbeit auf die Erzeugung heller Solitonen für Kondensate mit repulsiver Wechselwirkung ($a > 0$). Dazu muss die effektive Masse der Atome negativ sein, das Wellenpaket muss sich also im periodischen Potential im Bereich der Bandkante befinden²⁰.

Die Lösungen der Gleichung 3.50 erhält man durch die Methode der inversen Streuung. Diese wurde zunächst zur Lösung der Korteweg-de-Vries-Gleichung benutzt [133], ihre Anwendbarkeit konnte jedoch auch auf die nichtlineare Schrödingergleichung ausgedehnt werden [134]. Als stationäre Lösung erhält man das so genannte fundamentale Soliton mit der (auf eins normierten) Einhüllenden

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2x_0}} \operatorname{sech} \left(\frac{x - v_g t}{x_0} \right) \exp \left(-i \frac{t}{T_D} \right), \quad (3.55)$$

wobei x_0 die Breite der Verteilung darstellt. Die Atomzahl in diesem Wellenpaket ist festgelegt durch die Forderung, dass sich die Effekte der Dispersion und der Nichtlinearität gerade kompensieren müssen. Man erhält diese, indem man die mit beiden Effekten verbundenen charakteristischen Zeitskalen

$$T_D = \frac{m_{\text{eff}} x_0^2}{\hbar}, \quad T_{NL} = \frac{\hbar}{E_{NL}} = \frac{\hbar A_{\perp}}{\alpha_{NL} g_{1d} N |f(x, t=0)|_{\text{max}}^2} \quad (3.56)$$

miteinander vergleicht. Sind diese identisch so ergibt sich die Atomzahl des fundamentalen Solitons zu

$$N_0 = \frac{\hbar}{|m_{\text{eff}} \omega_{\perp} \alpha_{NL} a x_0|}. \quad (3.57)$$

²⁰Es sei nochmal daran erinnert, dass ohne periodisches Potential die Wellenfunktion $\psi(x, t)$ selbst das Soliton darstellt, während dies für $a > 0$ „nur“ für die Einhüllende $f(x, t)$ gilt.

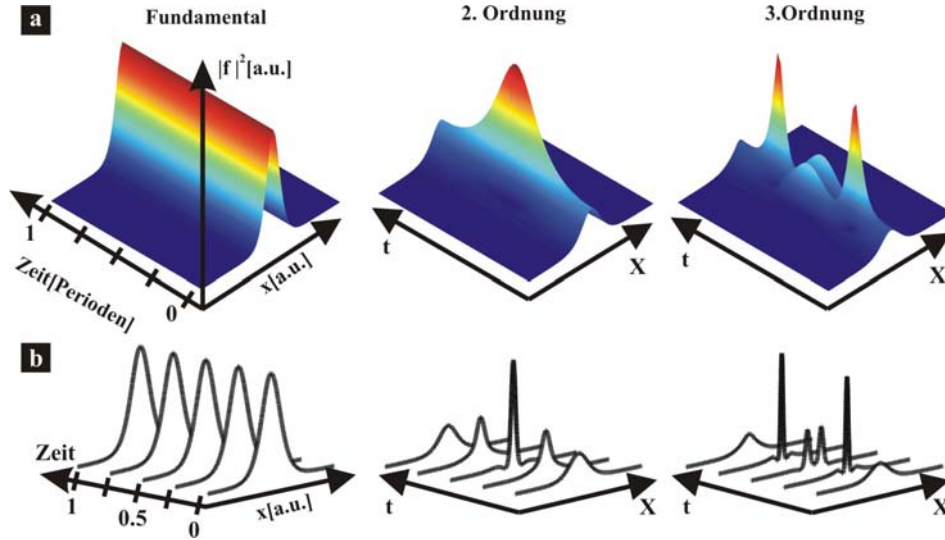


Abbildung 3.6: (a) Helle Solitonen als Lösung der nichtlinearen Schrödingergleichung für die Einhüllende $|f(x,t)|^2$. Gezeigt ist jeweils eine Solitonperiode $T_S = \frac{\pi}{2}T_D$ für die Solitonen erster bis dritter Ordnung, sowie die Dichteverteilungen zu verschiedenen Zeitpunkten innerhalb T_S . Im Gegensatz zum fundamentalen Soliton, welches zeitlich konstant ist, erkennt man das periodische Verhalten der Solitonen höherer Ordnung.

Für typische experimentelle Parameter ($m_{\text{eff}}/m = -0.1$, $\omega_{\perp} = 2\pi \times 80$ Hz und $x_0 = 5 \mu\text{m}$) beträgt dieser Wert „nur“ $N_0 = 350$ Atome. Die Herstellung einer so kleinen Anzahl an kohärenten Atomen war eine der Hauptschwierigkeiten bei der Durchführung dieses Experiments. Für höhere Atomzahlen existieren weitere Lösungen der Gl. 3.50, die nicht stationär sondern zeitperiodisch sind. Man nennt diese Solitonen höherer (n -ter) Ordnung. Die Atomzahl im Wellenpaket nach Gl. 3.55 muss dazu $N = n^2 N_0$ ($n \in \mathbb{N}$) betragen. In diesem Fall überwiegt die Wechselwirkung zwischen den Atomen, das Wellenpaket komprimiert, bis die dadurch erhöhte Dispersion eine weitere Kompression verhindert und schließlich zu einem periodischen Verhalten der Dichteverteilung mit der Solitonperiode $T_S = \frac{\pi}{2}T_D$ führt.

In Abb. 3.6 (a) sind die Solitonen erster bis dritter Ordnung zur Veranschaulichung dargestellt. Während das fundamentale Soliton zeitlich konstant ist, ändern diejenigen höherer Ordnung periodisch ihre Form. In Abb. 3.6 (b) sind die Dichteverteilungen innerhalb einer Solitonperiode zu verschiedenen Zeitpunkten gezeigt. Die Dichteachse ist jeweils auf deren maximalen Wert skaliert. Dieser ist für das Soliton 2. Ordnung um den Faktor 16 und für dasjenige 3. Ordnung um den Faktor 60 höher als für das fundamentale Soliton. Falls die Atomzahl des Ensembles nicht der Bedingung $N = n^2 N_0$ genügt, transformiert sich die Wolke in dasjenige Soliton, deren Ordnung es am nächsten kommt. Das fundamentale Soliton entsteht wenn die Atomzahl im Bereich $0.5N_0 < N < 1.5N_0$ liegt. Ebenso muss die Anfangsverteilung nicht genau Gl. 3.55 entsprechen, das Wellenpaket verändert seine Form bis es die Solitonbedingung erfüllt. Dies geschieht typischerweise innerhalb einiger Solitonperioden [125].

Ausgangspunkt diese Betrachtungen war Gleichung 3.50, also in der Näherung einer effektiven Masse und einer schwachen Nichtlinearität. Die zweite Bedingung ist aller-

dings schon für das fundamentale Soliton im obigen Beispiel nur näherungsweise erfüllt. Die maximale lineare Dichte mit 35 Atomen/ μm führt nach Gl. 3.19 zu einer signifikanten Erhöhung der transversalen Fläche des Grundzustands um 17% und somit zu einer Reduktion der Nichtlinearität. Hingegen ist die Näherung einer konstanten Masse gut erfüllt. Die endliche r.m.s-Impulsbreite Δk des Wellenpakets nach Gl. 3.55 führt zu einer kleinen Varianz der Masse $\frac{m_{\text{eff}}(k+\delta k)}{m_{\text{eff}}(k_r)} < 6\%$, wenn man annimmt, dass sich das Ensemble am Rand der Brillouinzone befindet.

Für Solitonen höherer Ordnung (oder kleinerer Größe x_0) wird jedoch auch die Annahme einer konstanten Masse verletzt. Um quantitative Aussagen zu erhalten, löst man deshalb statt Gl. 3.50 die effektive nichtpolynomiale Schrödingergleichung 3.17 numerisch (s. Abschnitt 3.4). Es wurde von Salasnich et al. [135] gezeigt, dass auch diese für positive Masse und attraktive Wechselwirkung solitonische Lösungen besitzt. Allerdings kann die Wellenfunktion des fundamentalen Solitons nur in (wenig intuitiver) impliziter Form angegeben werden, weshalb auf die Angabe hier verzichtet wird. Ebenso existieren solitonische Lösungen im periodischen Potential am Rand der Bandkante für repulsive Wechselwirkung, wie in dieser Arbeit gezeigt wird (s. Abschnitt 4.3).

Für diese Art von nicht-zerfließenden Wellenpaketen in periodischen Potentialen am Rand der Bandkante hat sich in der Literatur der Name „atomares Gap-Soliton“ durchgesetzt, obwohl es sich dabei im streng mathematischen Sinne um „solitäre Wellen“ handelt, da die nichtlineare Schrödingergleichung im periodischen Potential nicht integrabel ist [136, 116]. Auf Grund der nichtlinearen Wechselwirkung verschiebt sich die Energie des Solitons in den linear verbotenen Bereich der Bandlücke („band gap“), woraus sich der Zusatz „Gap-“ im Namen ableitet.

3.4 Numerische Lösung der nichtlinearen Schrödingergleichung

3.4.1 Die Split-Step Fouriermethode

Um die experimentellen Ergebnisse mit der Theorie vergleichen zu können, müssen die nichtlinearen Schrödingergleichungen 3.13 oder 3.17 (je nach Näherung) numerisch integriert werden. Die infinitesimale Zeitentwicklung der Wellenfunktion ist dabei durch den Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}(dt)$ bestimmt [137]:

$$f(x, t + dt) = \hat{U}(dt)f(x, t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}dt\right)f(x, t) \quad (3.58)$$

wobei \hat{H} den Hamiltonoperator darstellt. Eine geeignete Methode zur Lösung dieser Gleichung stellt die so genannte Split-Step-Fourier-Methode dar [138]. Die Idee besteht darin, den infinitesimalen Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}(dt)$ in Terme aufzuspalten, die jeweils leicht im Orts- bzw. im Impulsraum ausgewertet werden können:

$$f(x, t + dt) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(\hat{D} + \hat{V})dt\right)f(x, t) \approx \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{D}dt\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{N}dt\right)f(x, t) \quad (3.59)$$

Hierbei bezeichnet \hat{D} den Operatoren der Dispersion und \hat{N} umfasst diejenigen Anteile des Hamiltonoperators, die im Ortsraum berechnet werden. Neben dem Nichtlinearitätsterm sind dies auch das periodische, sowie eventuell weitere äußere Potentiale. Da

die Operatoren \hat{D} und \hat{N} nicht kommutieren, wird bei der letzten Aufteilung nach der Baker-Hausdorff-Formel ein Fehler gemacht, der jedoch für hinreichend kleine Zeitschritte dt vernachlässigbar ist. Da \hat{N} im Ortsraum diagonal ist, ergibt sich für diesen ersten Integrationsschritt:

$$f(x, t + dt) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{N}dt\right)f(x, t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}V(x) + G(|f|^2)dt\right)f(x, t) \quad (3.60)$$

Hingegen ist der Dispersionsterm im Impulsraum diagonal ist. Er wird deshalb nach einer Fouriertransformation $f(k, t) = FT(f(x, t))$ in diesem ausgewertet.

$$f(k, t + dt) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{D}dt\right)f(k, t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}E(k)dt\right)f(k, t) \quad (3.61)$$

Die Rücktransformation in den Ortsraum schließt die infinitesimale Zeitpropagation ab²¹.

Die bisher beschriebene Split-Step Methode umfasst noch keine Näherungen, sie ist für beliebige Operatoren \hat{D} und \hat{N} anwendbar. Die Berechnung ist besonders einfach, wenn die Operatoren im Impuls- bzw. Ortsraum diagonal sind. Man kann sie für die Propagation der Wellenfunktion $\psi(x, t)$ oder der Einhüllenden $f(x, t)$ benutzen. Auf Näherungen wird verzichtet, indem man die Wellenfunktion $\psi(x, t)$ propagiert, wobei das periodische Potential $V_{sw}(x, t) = V_0 \sin(2k_r x - \Delta\omega t)$ explizit im Operator \hat{N} berücksichtigt wird. Die in Abschnitt 3.2.4 beschriebenen Näherungen werden folgendermaßen implementiert.

- Man beschränkt sich auf die Dynamik der Einhüllenden $f(x, t)$ im untersten Band, indem man den Einfluss des periodischen Potentials durch die Dispersionsrelation $E(k)$ im Operator \hat{D} beschreibt.
- Die Näherung einer effektiven Masse bekommt man, indem man die vollständige Dispersionsrelation $E(k)$ um den betrachteten zentralen Wellenvektor parabolisch nähert: $E(k) = v_g k + \frac{\hbar^2(k-k_c)^2}{2m_{\text{eff}}}$

Das Programm zur numerischen Simulation wurde mit der Softwarepaket „MATLAB“ geschrieben. Der $400 \mu\text{m}$ große Ortsraum wurde dazu in 2^{14} Punkte mit einem räumlichen Abstand von $dx = 25 \text{ nm}$ eingeteilt. Der Impulsraum ist in diesem Fall 16 Brillouinzone breit, wobei jede in 2^{10} Punkte unterteilt ist. Die Fouriertransformation kann somit durch den schnellen FFT-(Fast Fourier Transform) Algorithmus durchgeführt werden²². Die Dauer der Zeitschritte ($200 \text{ ns} < dt < 20 \mu\text{s}$) wurde entsprechend den experimentellen Parametern so gewählt, dass für die maximale Phasenentwicklung pro Zeitschritt $|\frac{i}{\hbar}\hat{H}dt|_{\text{max}} \ll 2\pi$ gilt.

3.4.2 Grundzustandsberechnung - Propagation in imaginärer Zeit

Auch die Startwellenfunktion $\psi(x, t = 0)$ des Ensembles, die dem Grundzustand im gewählten Potential entspricht, muss numerisch berechnet werden. Eine einfache Möglichkeit dazu basiert auf der Methode der Propagation in imaginärer Zeit. Durch eine

²¹Es sei noch angemerkt, dass man den Fehler pro Zeitschritt von der Ordnung dt^2 auf dt^3 verbessern kann, indem man den ersten Propagationsschritt im Ortsraum in zwei Teilschritte der Länge $dt/2$ unterteilt, wobei der zweite Teilschritte erst am Ende der gesamten Simulation durchgeführt wird.

²²Der FFT- Algorithmus ist besonders effizient, falls die transformierten Vektoren eine Anzahl von Punkten besitzen, die einer Potenz von zwei entspricht.

Wick-Rotation

$$t \rightarrow \tau = -it \quad (3.62)$$

wird aus der GPE eine Diffusionsgleichung, die zu dem gewünschten Energieverlust, aber auch zu einem unerwünschten Teilchenzahlverlust führt. Man wählt nun eine Testfunktion $\psi_{\text{test}}(x, t = 0)$, die man z.B. durch die Abschnitt 3.1.3 beschriebenen analytischen Näherungsmethoden erhält, und propagiert diese durch die oben beschriebene Split-Step-Methode in imaginärer Zeit ($dt \rightarrow i dt$). Den Teilchenzahlverlust²³ gleicht man aus, indem man nach jedem Zeitschritt die Wellenfunktion neu normiert. Liegt die Startwellenfunktion genügend nahe beim Grundzustand, und wählt man $i dt \sim i \cdot 3 \mu\text{s}$ genügend klein, so konvergiert das Verfahren gegen den gesuchten Grundzustand $\psi(x, t = 0)$ [139, 140].

²³In einem expansiven Potential würde sich stattdessen ein Teilchenzahlgewinn einstellen.

Kapitel 4

Dynamik kohärenter Materiewellenpakete

In diesem letzten Kapitel werden die experimentellen Ergebnisse zur Dynamik kohärenter Wellenpakete in periodischen Potentialen vorgestellt. Zunächst werden einige notwendige Messungen zur Charakterisierung des experimentellen Aufbaus beschrieben (4.1). Anschließend folgt die Diskussion der Experimente zur geänderten Dispersion von Materiewellen in einem optischen Gitter (4.2). Im abschließenden Abschnitt 4.3 erfolgt die detaillierte Diskussion der erfolgreichen Erzeugung eines hellen Gap-Solitons.

4.1 Messungen zur Charakterisierung des Aufbaus

In Kapitel 1 wurde die Längeneichung der Abbildung sowie die Bestimmung der Atomzahl diskutiert. In Kapitel 2 wurden Experimente gezeigt, durch die die Fallenfrequenzen der Magnet- und der optischen Fallen ermittelt werden konnten. Zur vollständigen Charakterisierung des Aufbaus müssen noch das periodische Potential geeicht, sowie der Winkel zwischen Wellenleiter bzw. periodischem Potential und der Fokalebene der Abbildung gemessen werden (vgl. Abbildung 1.8).

4.1.1 Bestimmung des Winkels zwischen der Dipolfalle und der Fokalebene der Abbildung

Da aus den Absorptionsbildern nicht die Dichteverteilung im Wellenleiter, sondern deren Projektion auf die Fokalebene der Abbildung bestimmt wird, muss der Winkel zwischen beiden möglichst gut bekannt sein. Wesentlich genauer als die geometrische Bestimmung auf Grund der Anordnung der optischen Elemente, ist folgende indirekte Methode. Man erzeugt ein BEC in einem starken periodischen Potential ($U_0 > 10E_r$) und beschleunigt die Stehwelle auf die Gitterrückstoßgeschwindigkeit wodurch die Atome an der Bandkante präpariert werden. Das Wellenpaket erfährt auf Grund des hohen Potentials wenig Dispersion ($m_{\text{eff}} > 5m_0$) und bleibt somit lokalisiert. Das Massezentrum kann präzise bestimmt werden. Da die Gruppengeschwindigkeit an der Bandkante verschwindet bewegen sich die Atome mit der (genau bekannten) Geschwindigkeit¹ $v_r = 4\nu_r\lambda_{sw} = 5.86 \text{ mm/s}$ der Stehwelle entlang des Wellenleiters. Nach variabler Zeit bildet man die Atome ab

¹Für $\lambda_{sw} = 783 \text{ nm}$ und entsprechender Rückstoßfrequenz $\nu_r = 3.745 \text{ kHz}$

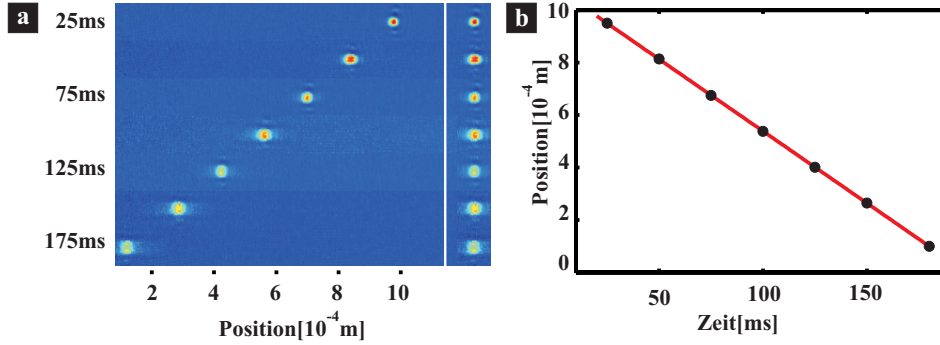


Abbildung 4.1: (a) Messung zur Bestimmung des Winkels zwischen Wellenleiter und der Fokalebene der Abbildung: Das Kondensat wird in einem tiefen periodischen Potential ($U_0 > 10E_r$) erzeugt und an der Bandkante präpariert. Es bewegt sich deshalb mit der Gitterrückstoßgeschwindigkeit v_r entlang des Wellenleiters. Durch Abbildung der Wolke zu verschiedenen Zeiten kann aus der ermittelten projizierten Geschwindigkeit v' der Winkel $\alpha = \arccos(v'/v_r) = 23^\circ$ bestimmt werden. (a) Absorptionsspektren des BEC zu verschiedenen Zeiten: zum einen sind diese über ihrer räumlichen Position aufgetragen, zum anderen am rechten Rand nochmals untereinander dargestellt, um die (bisher unverstandene) Oszillation der Breiten zu verdeutlichen. (b) Aus einer Regressionsgeraden (rot) durch die Positionen der Massezentren (schwarze Punkte) erhält man die Geschwindigkeit v' .

und erhält aus der ermittelten projizierten Geschwindigkeit $v' = 5.38 \text{ mm/s}$ den Winkel $\alpha = \arccos(\frac{v'}{v_r}) = 23^\circ$. Die dazugehörige Messung ist in Abbildung 4.1 (a) zu sehen. Gezeigt sind die Absorptionsspektren zu verschiedenen Zeitpunkten, aufgetragen über der räumlichen Position. Zusätzlich sind die Absorptionsspektren am rechten Rand nochmals untereinander gezeigt. Man erkennt, dass die Breite der Wolke oszilliert. Berücksichtigt man das sinkende Auflösungsvermögen der Abbildung (die Wolke entfernt sich aus dem tiefscharfen Bereich) so zeigen die BECs bei 25 ms, 75 ms und 125 ms eine Größe von $16 - 17 \mu\text{m}$ während diejenigen bei 50 ms, 100 ms und 150 ms im Bereich zwischen $21 - 24 \mu\text{m}$ liegen. Der Grund für diese Oszillation ist nicht bekannt. Sie konnten bisher weder numerisch simuliert werden, noch sind Veröffentlichungen bekannt, in denen dieser Effekt beschrieben wird. In Abb. 4.1 (b) sind die Positionen der Massenzentren in Abhängigkeit der Zeit und die lineare Regressionsgerade, aus der man die Geschwindigkeit v' erhält, dargestellt.

4.1.2 Eichung der Potentialtiefe des periodischen Potentials

Die Tiefe des periodischen Potentials könnte über Gl. 1.14 aus der Leistung und der Strahltaile der beiden gegenläufigen Laserstrahlen berechnet werden. Die dadurch ermittelten Werte sind aus folgenden Gründen zu ungenau. Zum einen ist die Bestimmung der Strahltaillen des Lasers mit einem Fehler im Bereich von 10% behaftet. Zum anderen ist der Überlapp zwischen beiden Strahlen nie perfekt, wovon bei der Herleitung von Gl. 1.14 ausgegangen wird. Wiederum ist die experimentelle Bestimmung die genauere Alternative. Es wurden dazu drei verschiedene Methoden benutzt:

Bragg-Oszillationen

Die Potentialtiefe wird ermittelt durch die Bestimmung der Periodendauer so genannter Braggoszillationen. Dazu wird ein ruhendes Kondensat durch nicht adiabatisches Einschalten eines mit Rückstoßgeschwindigkeit laufenden Potentials auf die Zustände an der Bandkante projiziert. In der Näherung schwacher Potentiale werden jeweils 50% der Atome im untersten und im ersten angeregten Band präpariert. Nach variabler Zeitdauer Δt schaltet man das periodische Potential wieder ab und projiziert das Ensemble auf die freien Zustände mit den Impulsen $-\hbar k_r$ und $+\hbar k_r$. Nach einer Wartezeit von mehreren Millisekunden haben sich die Impulsklassen im Ortsraum getrennt, wodurch deren Besetzungsverhältnis bestimmt werden kann. Dieses oszilliert auf Grund der verschiedenen Phasenentwicklung $\Delta\phi = \frac{\Delta E \Delta t}{\hbar} = \frac{V_0 \Delta t}{2\hbar}$ der Zustände in den beiden Bändern mit der Periode $T = \frac{4\pi\hbar}{V_0}$. Durch Variation von Δt bestimmt man die Periodendauer T und erhält somit die Potentialhöhe V_0 [141].

Landau-Zener-Tunneln

Beschleunigt man ein Kondensat nicht adiabatisch über die Bandkante hinweg, so tunnelt ein Teil der Atome in das erste angeregte Band. Dieser Effekt ist aus der Festkörperphysik bekannt. Man spricht von „Landau-Zener“-Tunneln [142, 143]. Liegt die Endgeschwindigkeit des Potentials nicht im Zentrum oder am Rand der Brillouinzone, so trennen sich die getunnelten und die nicht getunnelten Atome auf Grund der unterschiedlichen Gruppengeschwindigkeit auch im Ortsraum. In adiabatischer Näherung erhält man für die Tunnelwahrscheinlichkeit

$$r = \exp\left(-\frac{a_c}{a_{\text{exp}}}\right), \quad a_c = \frac{\pi V_0^2}{16k_r \hbar^2} \quad (4.1)$$

wobei die kritische Beschleunigung a_c von der Potentialhöhe V_0 abhängt, und a_{exp} die im Experiment eingestellte Beschleunigung darstellt. Diese Formel ist jedoch nur für den Grenzfall kleiner Tunnelwahrscheinlichkeiten $r \ll 1$ und verschwindender Nichtlinearität gültig. Im allgemeinen Fall muss r numerisch bestimmt werden [121, 144], wobei auch Abweichungen vom exponentiellen Verhalten auftreten können [145, 146], die im Folgenden aber vernachlässigt werden. In Abbildung 4.2 ist eine Reihe von Messungen gezeigt, die zur Eichung des periodischen Potentials dienen. Dazu wurden Kondensate innerhalb einer Zeit von 2.4 ms bis zum Quasiimpuls $k = 1.5 k_r$ beschleunigt und nach 30 ms Expansionszeit abgebildet. Mit abnehmender Tiefe des Potentials steigt der Anteil getunnelter Atome. Gezeigt sind die Absorptionsbilder (a) und der Bruchteil getunnelter Atome (b) für verschiedenen Potentialhöhen. Aus den Messungen, die zu einer kleinen Tunnelwahrscheinlichkeit führen, lässt sich aus Gl. 4.1 die Potentialhöhe bestimmen. Man erhält für die größte Potentialtiefe in der gezeigten Messreihe einen Wert von $V_0 = 0.96 E_r$.

Bestimmung der maximalen Gruppengeschwindigkeit des untersten Bandes

Die bisher besprochen Methoden haben den Nachteil, dass sie durch die nichtlineare Wechselwirkung zwischen den Atomen beeinflusst werden und somit ungenaue Resultate liefern können. Die folgende Methode ist davon unabhängig. Man bestimmt dazu die maximale Gruppengeschwindigkeit der Atome im untersten Band. Auch diese hängt streng

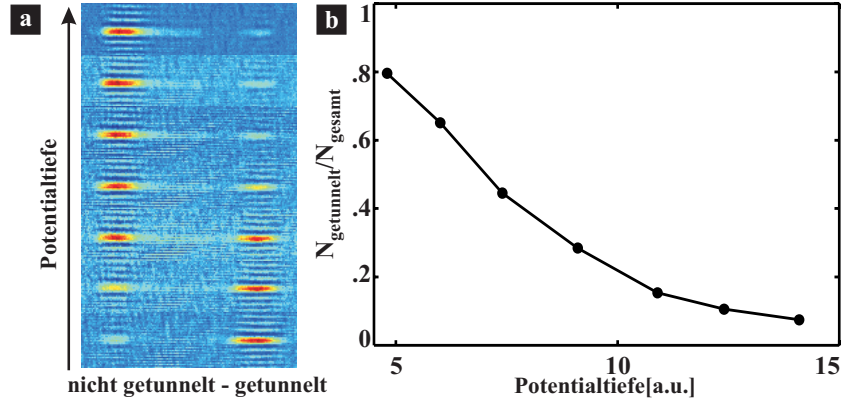


Abbildung 4.2: Bestimmung der Potentialtiefe mittels Landau-Zener getunnelter Atome. (a) Absorptionsbilder nach einer Beschleunigung der Kondensate über die Bandkante hinweg für verschiedene Potentialtiefen. Für kleine Potentiale erfolgt diese Präparation nicht adiabatisch, ein Teil der Atome tunnelt in das erste angeregte Band und trennt sich nach 30 ms Expansionszeit im Ortsraum vom verbliebenen Teil im untersten Band. Deutlich erkennt man, dass der Anteil getunnelter Atome mit der Potentialtiefe abnimmt. (b) Aus dem Bruchteil getunnelter Atome lässt sich über Gl. 4.1 die Potentialhöhe berechnen. Die durchgezogene Linie ist ein „guide to the eye“.

genommen von der Nichtlinearität ab, allerdings kann das Ensemble auf einfache Art und Weise so stark verdünnt werden, dass die atomare Wechselwirkung vernachlässigbar wird. Man präpariert ein Kondensat mit hoher Atomzahl ($N > 2 \times 10^4$ Atomen) am Rand der Bandkante bei kleinen Potentialtiefen ($V_0 < 2E_r$). Auf Grund der negativen Masse komprimiert das Wellenpaket zunächst. Die darauf folgende Dynamik ist im Detail kompliziert. Sie führt zu einem Wellenpaket das transversal angeregt [147] und im Impulsraum stark verbreitert ist [148]. Beide Effekte führen dazu, dass sich die Materiewelle anschließend ausdehnt und die Nichtlinearität schnell abgebaut wird. Für die Bestimmung der Potentialhöhe entscheidend ist dabei, dass auch die Impulsklassen mit maximaler Gruppengeschwindigkeit v_{\max} bevölkert werden. Es bilden sich dadurch für lange Propagationszeiten ($t > 20$ ms) steile Kanten an den Rändern des Wellenpakets aus, die sich mit v_{\max} bewegen. Da v_{\max} eindeutig von U_0 abhängt hat man damit die Potentialhöhe geeicht.

In Abbildung 4.3 ist eine solche Messung dargestellt. Gezeigt sind die Absorptionsbilder für verschiedene Expansionszeiten (Graphik (a)). Deutlich erkennt man die Ausbildung eines expandierenden Wellenpakets mit beidseitig scharfkantigen Randbereichen. In Grafik (b) ist exemplarisch die Dichteverteilung nach 30 ms dargestellt. Die Breite der Wolke wird bestimmt indem eine rechteckige Fitfunktion angepasst wird. Aus einer Regressionsgerade durch die ermittelten Breiten (für $t > 10$ ms) erhält man die gesuchte maximale Gruppengeschwindigkeit $v_g = 4.65$ mm/s $\approx 0.8v_r$ (Graphik (c)). Für das gezeigte Beispiel erhält man eine Potentialtiefe von $U_0 = 0.44(4) E_r$.

In Grafik (d) ist der Zusammenhang zwischen v_{\max} und der Potentialtiefe U_0 dargestellt. Die schwarzen Punkte repräsentieren numerisch bestimmte Werte. Sie werden hervorragend approximiert durch die Näherung schwacher Potentiale nach Gl. 3.42 (rote

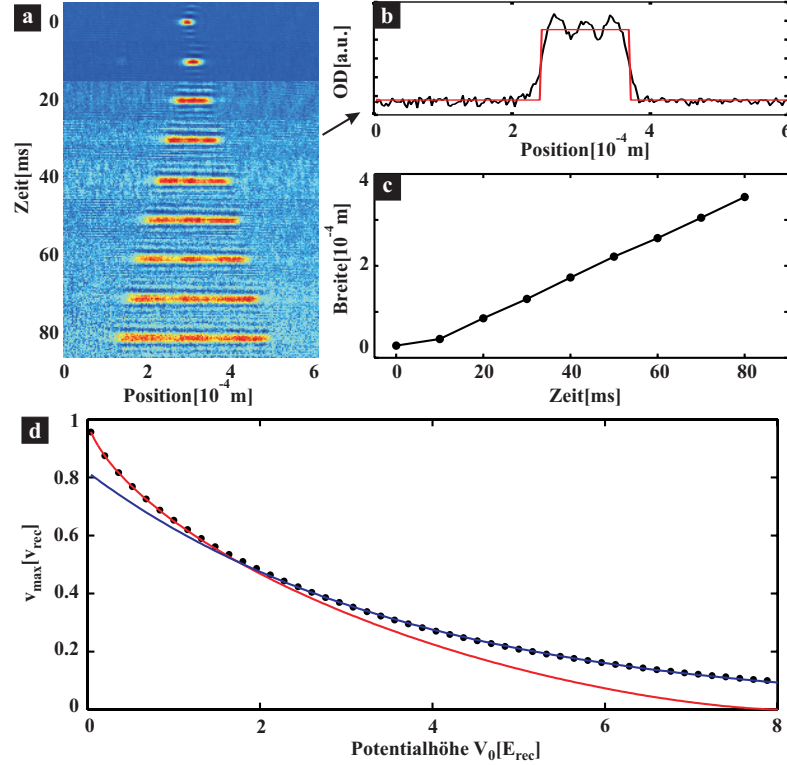


Abbildung 4.3: (a) Bestimmung der Potentialhöhe durch die Messung der maximalen Gruppengeschwindigkeit im untersten Band: Ein Wellenpaket das im Impulsraum die Klassen mit maximaler Gruppengeschwindigkeit bevölkert entwickelt während der Expansion steile Kanten am Rand der Materiewelle. Aus den Absorptionen (a) und rechteckigen Fitkurven an die Dichteverteilungen (b) lässt sich die maximale Gruppengeschwindigkeit ermitteln (c). Diese ist eindeutig mit der Potentialtiefe verknüpft (d).

Kurve) für $U_0 < 2 E_r$ und durch eine exponentielle Kurve mit angepassten Koeffizienten $v_{\max}[v_r] = 0.81 \exp(-0.27 U_0[E_r])$ (blaue Kurve) für $2 E_r < U_0 < 8 E_r$.

4.1.3 Konsistenzprüfung und Messung der Impulsbreite

Als letzte vorbereitende Messung wird nun die freie Expansion (ohne periodisches Potential) eines Bose-Einstein Kondensats im Wellenleiter besprochen. Aus ihr lässt sich die Impulsbreite der Materiewelle bestimmen, nachdem die anfängliche Wechselwirkungsenergie in kinetische Energie umgesetzt wurde. Diese wird für numerische Simulationen der Wellenpaketdynamik im folgenden Abschnitt 4.2 benötigt. Zudem dient diese Messung zur Überprüfung der Atomzahlbestimmung und der Frequenzen der optischen Fallen. Durch diese ist die Dynamik des Wellenpakets festgelegt. Es existiert kein freier Parameter. Schließlich soll in dieser Arbeit eine Vergleichsmessung vorhanden sein, die den Unterschied der geänderten Dynamik in periodischen Potentialen im Vergleich zur freien Dynamik verdeutlicht.

Wie in Abschnitt 3.1.3 beschrieben wurde, hat der Grundzustand eines BEC im Thomas-Fermi Limit eine parabolischen Dichteverteilung in allen drei Raumrichtun-

gen mit den Radien $R_{\text{TF},i}$. Die Expansion der Wolke bei beliebiger Änderung der Fallenfrequenzen² $\omega_i(t)$ wird durch einen selbstkonsistenten Skalierungsansatz beschrieben [97, 96]. Das Kondensat behält seine parabolische Form, es expandiert selbstständig, wobei sich die Radien gemäß

$$R_{\text{TF},i}(t) = \lambda_i(t)R_{\text{TF},i}(t=0) \quad (4.2)$$

entwickeln. Die Dynamik ist vollständig in den Skalierungsfaktoren $\lambda_i(t)$ enthalten. Die Zeitentwicklung der Skalierungsfaktoren ist durch folgendes Differentialgleichungssystem bestimmt:

$$\ddot{\lambda}_i = \frac{\omega_i^2(0)}{\lambda_i \prod_j \lambda_j} - \omega_i^2(t) \lambda_i \quad (i, j = x, y, z). \quad (4.3)$$

Es sei angemerkt, dass die Atomzahl nicht in die Skalierungsfaktoren λ_i eingeht, sondern nur über die Anfangsgröße $R_{\text{TF},i}(t=0)$ (s. Gl. 3.26) die absolute Größe der Wolke bestimmt.

In Abbildung 4.4 ist die Expansion eines Kondensats mit $N = 2.1 \times 10^4$ Atomen bei einer Fallenfrequenz des Wellenleiters von $\omega_{\perp} = 2\pi \times 85$ Hz gezeigt, nachdem der Haltestrahl mit einer Frequenz von $\omega_{\parallel} = 2\pi \times 20$ Hz ausgeschaltet wurde. Grafik (a) zeigt

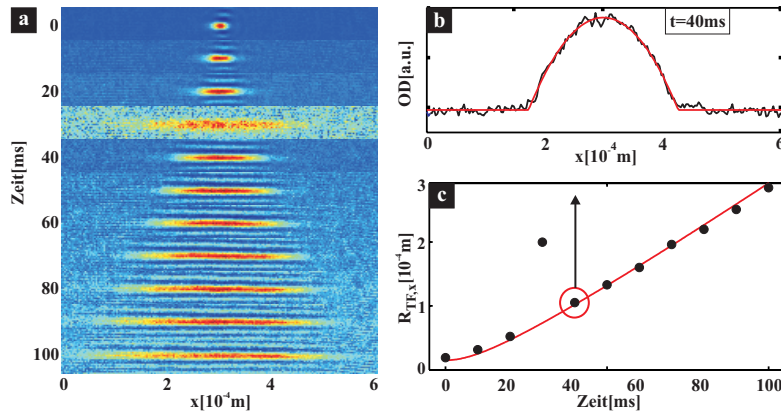


Abbildung 4.4: Konsistenzprüfung der Fallenfrequenzen und der Atomzahlbestimmung - Beobachtung eines frei expandierenden Kondensats im Wellenleiter: (a) aus den Absorptionsspektroskopischen Bildern zu verschiedenen Zeitpunkten erhält man die Dichteverteilungen der Wolken. An die Messwerte (schwarz) werden parabolische Fitkurven (rot) angepasst und daraus der Thomas-Fermi Radius $R_{\text{TF},i}(t)$ bestimmt. (c) Die Theorie nach Gl. 4.3 (rot) wird durch die erhaltenen Messwerte (schwarze Punkte) bestätigt.

wiederum die Absorptionsspektroskopischen Bilder für verschiedene Expansionszeiten. In Grafik (b) ist die Dichteverteilung für die Zeit $t = 40$ ms (schwarz) zusammen mit einer parabolischen Fitkurve (rot) gezeigt. Die dadurch bestimmten Radien $R_{\text{TF},i}(t)$ (schwarze Punkte) zeigen eine gute Übereinstimmung mit der Theorie (rote Kurve) nach Gl. 4.3 in Grafik (c). Die Atomzahl N wurde jedoch nicht aus den gezeigten Bildern bestimmt, sondern aus dem Absorptionsspektroskopischen Bild eines identisch erzeugten aber frei fallenden (nach Abschalten beider Dipolfallen) Kondensats nach 13 ms Fallzeit. Da dieses in allen Raumrichtungen

²Dazu zählt auch das Abschalten der Falle in einzelnen oder allen Raumrichtungen.

größer als das Auflösungsvermögen der Abbildung und zudem optisch weniger dicht als die Wolken in der Dipolfalle ist, erhält man eine genauere Bestimmung der Atomzahl (vgl. Abschnitt 1.5). Erst dadurch konnte die gute Übereinstimmung von Theorie und Experiment erreicht werden.

Das Absorptionbild für $t = 30$ ms zeigt, dass bei diesem Experiment kein Kondensat erzeugt wurde, obwohl der experimentelle Ablauf identisch demjenigen bei den anderen Realisierungen war. Ein möglicher Grund dafür könnte eine Positionsveränderung der Magnetfalle sein, die in Zusammenhang mit anderen Experimenten beobachtet wurde. Durch diese Veränderung wird der Transfer der Wolke in die Dipolfalle gestört und eine Kondensation in dieser verhindert.

4.2 Dispersionsmanagement

Einordnung der Experimente

Der Begriff des „Dispersionsmanagement“ stammt ursprünglich aus der nichtlinearen Optik. Er beschreibt dort die unterdrückte Dispersion von optischen Pulsen in Glasfasern, in denen der Dispersionskoeffizient räumlich periodisch moduliert ist ([149] und Referenzen darin). Er wird heute in der Atomoptik verallgemeinert für die geänderte Dispersion in periodischen Potentialen benutzt. Die folgende kurze Zusammenfassung bisher weltweit publizierter Arbeiten bezieht sich alleine auf Experimente, die in schwachen Potentialen ($V_0 < 10 E_r$) durchgeführt wurden. Von denjenigen, die in tiefen optischen Gittern stattfinden, sei hier stellvertretend nur die Arbeit von Greiner et al. erwähnt. In ihr wird eindrucksvoll die Beobachtung des „lange“ vorhergesagten Mott-Isolator-Übergangs [150, 151] beschrieben.

Erste Experimente in dieser Richtung wurden schon mit kalten Atomen durchgeführt, wobei bekannte Effekte aus der Festkörperphysik wie Blochoszillationen [120], Landau-Zener-Tunneln [152, 153] und „Wannier-Stark-Ladders“ [154, 153] beobachtet wurden. Diese Experimente wurden teilweise mit Kondensaten in modifizierter Art wiederholt [19, 155, 156]. Weiterhin wurde die verschobene Frequenz der Dipolschwingungsmode eines Kondensats auf Grund der veränderten Dispersionsrelation untersucht [157, 158]. Die kohärente Präparation eines BEC in den verschiedenen Energiebändern, sowie deren Anwendung als Beschleuniger und Strahlteiler von Materie ist Bestandteil einer weiteren Arbeit [159].

Im Gegensatz zu den oben genannten Experimenten, bei denen die Bewegung des Massenschwerpunkts bzw. die Impulsverteilung der Wolke nach Abschalten des optischen Gitters im freien Fall studiert wurde, konzentriert sich diese Arbeit auf die zeitlichen Entwicklung der Ortsverteilung der atomaren Wolke. Dies wird ermöglicht durch die beschriebene Präparation des Kondensats in der optischen Dipolfalle, die die Atome gegen die Gravitation hält, aber die Expansion des Wellenpakets entlang des Wellenleiters erlaubt. Die Beobachtungszeit kann damit auf mehrere hundert Millisekunden ausgedehnt werden, einer Größenordnung länger als dies für Experimente im freien Fall möglich ist. Eine ähnliche Untersuchung, wie die im folgenden Abschnitt 4.2.1 beschriebene, wurde in der Gruppe von M. Inguscio durchgeführt, allerdings wiederum mit Kondensaten im freien Fall und für kurze Beobachtungszeiten [160].

In der nichtlinearen Optik sind ebenfalls einige Experimente durchgeführt wurden, deren physikalischer Ansatz demjenigen in der vorliegenden Arbeit vergleichbar ist [161,

162].

4.2.1 Publikation: „Dispersion Management for atomic matter waves“

Die Experimente, die zur geänderten Dynamik in periodischen Potentialen durchgeführt wurden, sind zusammengefasst in der Zeitschrift „Physical Review Letters“ veröffentlicht worden [163]. Sie zeigen, dass das Konzept, die Dispersion eines Wellenpakets durch periodische Potentiale zu ändern, erfolgreich auf atomare Materie angewandt werden kann. Die Details dieser Versuche sind in der folgenden Publikation beschrieben. Zusammengefasst konzentrieren sich diese auf folgende drei Aspekte:

1. Zunächst wird ein Experiment durchgeführt, welches zeigt, dass das Verhalten der Atome im Bereich der Bandkante demjenigen von Teilchen mit negativer Masse entspricht. Dazu lässt man ein Kondensat für die Zeit t_1 im Zentrum der Brillouinzone bei positiver Masse expandieren. Danach präpariert man das Wellenpaket innerhalb kurzer Zeit $dt \ll t_1$ an der Bandkante und beobachtet das Wellenpaket nach einer weiteren variablen Zeit t_2 . Das negative Vorzeichen der effektiven Masse im Phasenfaktor $\exp(-\frac{\hbar k^2}{2m_{\text{eff}}}t)$ der linearen Zeitentwicklung nach Gl. 3.61 kann dabei formal auch als Zeitinversion interpretiert werden. Das während t_1 expandierte Wellenpaket kehrt die Dynamik um und komprimiert, bis es seine ursprüngliche Größe wieder erreicht hat. Berücksichtigt man die intrinsische Nichtlinearität des Kondensats so ändert diese zwar die Zeitskala des Experiments, qualitativ bleibt der Effekt jedoch erhalten. Dieser Versuch entspricht der namensgebenden Idee des Dispersionsmanagement aus der nichtlinearen Optik.
2. In einer zweiten Experimentreihe wird die Anwendbarkeit der effektive-Masse-Näherung untersucht. Dazu wird die Propagation von Wellenpaketen an der Bandkante für verschiedene Modulationstiefen V_0 des periodischen Potentials beobachtet. Für kleine Potentialtiefen ist der Bereich konstanter Masse so klein, dass auch Dispersionsterme höherer Ordnung berücksichtigt werden müssen. Diese führen zu einer Verzerrung des ursprünglich gaußschen Wellenpakets. Die Verzerrungen verschwinden bei höheren Potentialtiefen, wodurch der Übergang in den Bereich gekennzeichnet ist, für den die Masse als konstant angenommen werden kann. Für diese Messung wurde die in Abschnitt 4.1.3 beschriebene Impulsbreitenbestimmung benötigt.
3. Eine dritte Experimentreihe befasst sich schließlich mit einer systematischen Studie der maximalen und minimalen Gruppengeschwindigkeit im untersten Energieband, die dem zweiten Experiment aus Abschnitt 4.1.2 entspricht.

Dispersion Management for Atomic Matter Waves

B. Eiermann,¹ P. Treutlein,^{1,2} Th. Anker,¹ M. Albiez,¹ M. Taglieber,¹ K.-P. Marzlin,¹ and M. K. Oberthaler¹

¹Fachbereich Physik, Universität Konstanz, Fach M696, 78457 Konstanz, Germany

²Sektion Physik, Ludwig-Maximilians-Universität, Schellingstrasse 4, 80799 München, Germany

We demonstrate the control of the dispersion of matter wave packets utilizing periodic potentials. This is analogous to the technique of dispersion management known in photon optics. Matter wave packets are realized by Bose-Einstein condensates of ^{87}Rb in an optical dipole potential acting as a one-dimensional waveguide. A weak optical lattice is used to control the dispersion relation of the matter waves during the propagation of the wave packets. The dynamics are observed in position space and interpreted using the concept of effective mass. By switching from positive to negative effective mass, the dynamics can be reversed. The breakdown of the approximation of constant, as well as experimental signatures of an infinite effective mass are studied.

The broadening of particle wave packets due to the free space dispersion is one of the most prominent quantum phenomena cited in almost every textbook of quantum mechanics. The realization of Bose-Einstein condensates of dilute gases allows for the direct observation of wave packet dynamics in real space on a macroscopic scale [1]. Using periodic potentials it becomes feasible to experimentally study to what extent the matter wave dispersion relation can be engineered. This approach is similar to dispersion management for light pulses in spatially periodic refractive index structures [2].

First experiments in this direction have already been undertaken in the context of Bloch oscillations of thermal atoms [3] and condensates [4]. The modification of the dipole mode oscillation frequency of a condensate due to the changed dispersion relation in the presence of a periodic potential has been studied in detail [5,6]. In contrast to these experiments where the center of mass motion was studied, we are investigating the evolution of the spatial distribution of the atomic cloud in a quasi-one-dimensional situation. Our experiments show that the dispersion and thus the wave packet dynamics can be experimentally controlled. This is a new tool which also allows one to study the interplay between dispersion and atom-atom interaction and to realize predicted non-spreading wave packets such as gap solitons [7] and self-trapped states [8].

For atomic matter waves inside a one-dimensional optical waveguide, we have achieved dispersion management by applying a weak periodic potential with adjustable velocity. Figure 1 shows the results of an experiment in which the propagation of an atomic wave packet is studied in the normal [Fig. 1(b)] and anomalous [Fig. 1(c)] dispersion regime corresponding to positive and negative effective mass, respectively. A broadening of the wave packet is observed in both cases. The faster spreading in the case of anomalous dispersion is a consequence of the smaller absolute value of the negative effective mass. However, if we switch from one regime to

the other during the propagation by changing the velocity of the periodic potential, the effects of normal and anomalous dispersion cancel. The wave packet, which has initially broadened under the influence of normal dispersion, reverses its expansion and compresses until it regains its initial shape [Fig. 1(d)]. This is a direct proof of the realization of negative effective mass.

The wave packets have been realized with a ^{87}Rb Bose-Einstein condensate. The atoms are collected in a magneto-optical trap and subsequently loaded into a

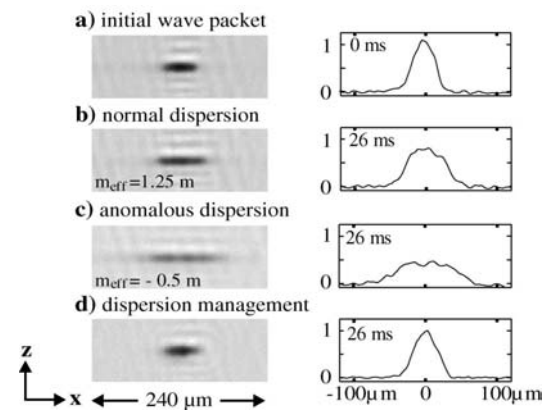


FIG. 1. Controlling the dispersion of an atomic wave packet in a waveguide using a periodic potential. Shown are absorption images of the wave packet averaged over four realizations (left) and the corresponding density distributions $n(x, t)$ along the waveguide (right). (a) Initial wave packet. (b), (c) Images taken after an overall propagation time of $t = 26$ ms for different dispersion regimes with different effective masses as indicated. (d) Wave packet subjected to dispersion management: an initial stage of expansion for $t = 17$ ms with normal dispersion is followed by propagation with anomalous dispersion for $t = 9$ ms. The broadening in the normal dispersion regime has been reversed by anomalous dispersion.

magnetic time-orbiting potential trap. By evaporative cooling we produce a cold atomic cloud which is then transferred into an optical dipole trap realized by two focused Nd:YAG laser beams with $60\ \mu\text{m}$ waist crossing at the center of the magnetic trap. Further evaporative cooling is achieved by lowering the optical potential leading to pure Bose-Einstein condensates with up to 3×10^4 atoms in the $|F = 2, m_F = +2\rangle$ state. By switching off one dipole trap beam the atomic matter wave is released into a trap acting as a one-dimensional waveguide with radial trapping frequency $\omega_{\perp} = 2\pi \times 80\ \text{Hz}$ and longitudinal trapping frequency $\omega_{\parallel} = 2\pi \times 1.5\ \text{Hz}$.

The periodic potential is realized by a far off-resonant standing light wave with a single beam peak intensity of up to $5\ \text{W}/\text{cm}^2$. The chosen detuning of $2\ \text{nm}$ to the blue off the D2 line leads to a spontaneous emission rate below $1\ \text{Hz}$. The frequency and phase of the individual laser beams are controlled by acousto-optic modulators driven by a two channel arbitrary waveform generator allowing for full control of the velocity and amplitude of the periodic potential. The absolute value of the potential depth was calibrated independently by analyzing results on Bragg scattering [9] and Landau Zener tunneling [4,10].

The wave packet evolution inside the combined potential of the waveguide and the lattice is studied by taking absorption images of the atomic density distribution after a variable time delay. The density profiles along the waveguide, $n(x, t)$, are obtained by integrating the absorption images over the transverse dimension z .

The concept of effective mass m_{eff} [11] allows one to describe the dynamics of matter wave packets inside a periodic potential in a simple way via a modified dispersion relation. The periodic potential in our experiments is well described by

$$V(x) = \frac{V_0}{2} \cos(Gx)$$

with a modulation depth V_0 on the order of the grating recoil energy $E_G = \hbar^2 G^2 / 8m$, with $G = 2\pi/d$ where $d = 417\ \text{nm}$ represents the spatial period. The energy spectrum of atoms inside the periodic potential exhibits a band structure $E_n(q)$ which is a periodic function of quasimomentum q with periodicity G corresponding to the width of the first Brillouin zone [Fig. 2(a)]. In our experiment, we prepare condensates in the lowest energy band ($n = 0$) with a quasimomentum distribution $w(q)$ centered at $q = q_c$ with an rms width $\Delta q \ll G$ [12].

It has been shown by Steel *et al.* [13] that in this case the condensate wave function in a quasi-one-dimensional situation can be described by $\Psi(x, t) = A(x, t) \phi_{q_c}(x) \times \exp[-iE_0(q_c)t/\hbar]$, where ϕ_{q_c} represents the Bloch function in the lowest energy band corresponding to the central quasimomentum. The evolution of the envelope function $A(x, t)$, normalized to the total number of atoms N_0 , is described by

$$i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_g \frac{\partial}{\partial x} \right) A = - \frac{\hbar^2}{2m_{\text{eff}}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} A + \tilde{g} |A|^2 A. \quad (1)$$

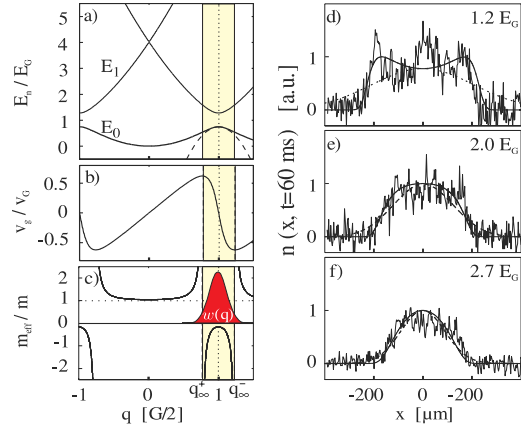


FIG. 2. (a) Band structure in the first Brillouin zone for atoms in an optical lattice with $V_0 = 1.2 E_G$ (solid), parabolic approximation to the lowest energy band at $q = G/2$ (dashed), corresponding group velocity (b), and effective mass (c) in the lowest energy band. The vertical dashed lines at $q = q_{\infty}^{\pm}$ indicate where $|m_{\text{eff}}| = \infty$. (d)–(f) Spatial densities of the wave packet after $t = 60\ \text{ms}$ of propagation with $q_c = G/2$ for different V_0 . The position x along the waveguide is measured in the moving frame of the optical lattice. The solid lines represent the theoretical predictions using linear propagation with the exact band structure and the quasimomentum distribution given in graph (c). The dashed lines in graphs (d)–(f) represent the prediction of the constant effective mass approximation.

The strength of the atom-atom interaction is given by $\tilde{g} = \alpha_{nl} 2\hbar\omega_{\perp} a$, with the s -wave scattering length a , and a renormalization factor $\alpha_{nl} = (1/d) \int_0^d dx |\phi_{q_c}|^4$. Besides the modification of the nonlinear term the periodic potential leads to a group velocity of the envelope $A(x, t)$ determined by the energy band via $v_g(q_c) = \hbar^{-1} [\partial E_0(q) / \partial q]_{q_c}$ [Fig. 2(b)]. In addition, the kinetic energy term describing the dispersion of the wave packet is modified by the effective mass [Fig. 2(c)]

$$m_{\text{eff}}(q_c) = \hbar^2 \left[\frac{\partial^2 E_0(q)}{\partial q^2} \Big|_{q_c} \right]^{-1}.$$

Since this approximation of constant effective mass corresponds to a parabolic approximation of the energy band, it is valid only for sufficiently small Δq .

The general solution of Eq. (1) is a difficult task, but simple analytic expressions can be found in the special cases of negligible and dominating atom-atom interaction. Omitting the last term in Eq. (1) it is straightforward to see that $|m_{\text{eff}}|$ controls the magnitude of the dispersion term and thus the time scale of the wave packet broadening. A change in sign of m_{eff} corresponds to time reversal of the dynamics in a frame moving with velocity v_g . In the regime where the atom-atom interaction is dominating, e.g., during the initial expansion of a condensate, the evolution of the envelope function can be

found in standard nonlinear optics textbooks [2] and in the form of scaling solutions in the context of Bose-Einstein condensates [14]. Note that in this regime the kinetic energy term is still relevant and thus a change of the sign of the effective mass will reverse the dynamics.

In the following we will analyze the obtained experimental results in more detail. The initial wave packet shown in Fig. 1(a) contains 2×10^4 atoms and is characterized by $\Delta x_0 = 14.8(6) \mu\text{m}$ (Δx is the rms width of a Gaussian fit). Before releasing the atomic cloud into the one-dimensional waveguide, a weak periodic potential along the waveguide is adiabatically ramped up to $V_0 = 2.8(2) E_G$ within 6 ms. This turns the initial Gaussian momentum distribution of the atoms into a Gaussian distribution of quasimomenta $w(q)$ centered at $q_c = 0$ with a corresponding effective mass $m_{\text{eff}} = 1.25 m$. The density distribution shown in Fig. 1(b) is a result of propagation within the stationary periodic potential for $t = 26$ ms and exhibits a spread of $\delta x := \sqrt{\Delta x(t)^2 - \Delta x_0^2} = 18.4(12) \mu\text{m}$ in contrast to $\delta x_f = 20.2(14) \mu\text{m}$ for expansion without periodic potential. The resulting ratio $\delta x_f / \delta x = 1.10(15)$ indicates that the evolution is dominated by the nonlinearity, in which case one expects $\delta x_f / \delta x \approx \sqrt{m_{\text{eff}} / m} = 1.11$ in the short-time limit [15]. In the case of linear propagation one expects $\delta x_f / \delta x = m_{\text{eff}} / m = 1.25$.

The dynamics in the anomalous dispersion regime [Fig. 1(c)] are investigated by initially accelerating the periodic potential within 3 ms to a velocity $v = v_G := \hbar G / 2m$, thus preparing the atomic wave packet at the edge of the Brillouin zone ($q_c = G/2$), where $m_{\text{eff}} = -0.5 m$. The velocity is kept constant during the subsequent expansion. In the regime of negative mass a condensate exhibits collapse dynamics. Two-dimensional calculations for our experimental situation reveal that this collapse happens within the initial 3–6 ms of propagation. Subsequently this leads to an excitation of transverse states and thus to a fast reduction of the density and the nonlinearity. An indication of the population of transverse states is the observed increase of the transverse spatial extension of the wave packets by almost a factor of 2. The optical resolution of our setup does not allow for a quantitative analysis of the transverse broadening. Because of the fast reduction of the nonlinearity the subsequent expansion should be well described by linear theory predicting a ratio $\delta x_f / \delta x = 0.5$ which is close to the observed value $0.46(5)$ [$\delta x = 38.5(15) \mu\text{m}$ after 23 ms].

In the case of dispersion management Fig. 1(d) the wave packet was first subjected to normal dispersion for 17 ms at $q_c = 0$. The time of subsequent propagation with anomalous dispersion at $q_c = G/2$ was adjusted to achieve the minimal wave packet size of $\Delta x = 15.4(2) \mu\text{m}$. The minimum was achieved for times ranging from 7 to 9 ms which is in rough agreement with the

expected time resulting from effective mass considerations $\sqrt{0.5/1.25} \times 17 \text{ ms} = 10.7 \text{ ms}$.

Since the assumption of a constant effective mass used so far is only an approximation, it is important to check its applicability in experiments. Therefore we investigate the dynamics of wave packets prepared at the Brillouin zone edge for different potential depths. The observed density profiles after 60 ms of propagation are shown in Figs. 2(d)–2(f). While both the initial wave packet shape $n(x, 0)$ and the quasimomentum distribution $w(q)$ are measured to be approximately Gaussian, the wave packet changes its shape during evolution. We attribute this distortion to the invalidity of the constant effective mass approximation, which assumes that the populated quasimomenta experience the same negative curvature of $E_0(q)$. Since the range of quasimomenta fulfilling this criterion becomes smaller with decreasing modulation depth, a more pronounced distortion of the wave packet shape for weak potentials is expected [see Fig. 2(d)].

This explanation is confirmed more quantitatively by comparing the observed wave packets with the results of a linear theory. Since the initial collapse of the condensate cannot be described by a linear theory, we take a Gaussian function fitted to the density distribution measured at 20 ms as the initial wave packet for the numerical propagation. Because of the fact that this is not a minimum uncertainty wave packet we add a quadratic phase in real space such that the Fourier transform of the wave packet is consistent with the measured momentum distribution. In first approximation this takes into account the initial expansion including the repulsive atom-atom interaction. For the subsequent propagation of 40 ms in quasimomentum space we use the full expression for $E_0(q)$ which is obtained numerically. In Fig. 2(d)–2(f) we compare the data with the linear theory described above (solid line) and with the constant effective mass approximation (dashed line). Clearly the constant effective mass approximation cannot explain the observed distortion and it strongly overestimates the expansion velocity for weak potentials. Additionally, for small potential modulation depths new features appear in the central part of the wave packet which cannot be explained using the linear theory. We are currently investigating these features in more detail.

The observed distortion is mainly a consequence of another very interesting feature of the band structure: the existence of $|m_{\text{eff}}| = \infty$ for certain quasimomenta $q = q_{\infty}^{\pm}$ [see Fig. 2(c)]. A diverging mass implies that the group velocity is extremal and the dispersion vanishes as can be seen from Eq. (1). As a consequence an atomic ensemble whose quasimomentum distribution is overlapping $q = q_{\infty}^{\pm}$ will develop steep edges as can be seen in Fig. 2(d) and in Fig. 3. These edges propagate with the maximum group velocity of the lowest band.

The systematic investigation of the velocities of the edges is shown in Fig. 3 for different values of V_0 . In order to get a significant overlap of $w(q)$ with $q = q_{\infty}^{\pm}$, we

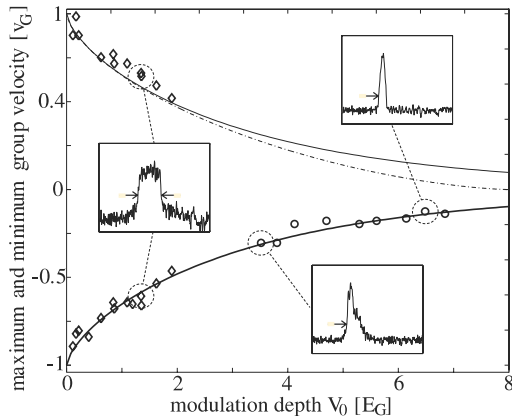


FIG. 3. Group velocities of steep edges emerging from an initial wave packet with significant overlap with q_{∞}^{\pm} in quasi-momentum space. The measured velocities of the indicated positions (arrows in insets) agree very well with the expected maximum and minimum velocity in the lowest band (solid line) corresponding to the infinite masses. The dashed line represents the prediction of the weak potential approximation [11]. For potentials smaller than $2 E_G$ (diamonds) data are obtained by preparing the initial wave packet at $q = G/2$ leading to two steep edges (see inset). For higher potentials (circles) the wave packet is prepared at $q = G/4$ to ensure population of the quasimomentum corresponding to infinite mass.

prepare atomic ensembles with $\Delta q = 0.17 G/2$ at $q_c = G/2$ realized by Bose-Einstein condensates of 2×10^4 atoms with a spatial extension of $\Delta x = 15 \mu\text{m}$. The velocities of the edges are derived from two images taken at 20 and 60 ms, respectively. In each image the position of the edge is evaluated at the levels indicated by the arrows in the insets of Fig. 3 (50% and 25% of the maximum density). Since the momentum spread is too small to populate the infinite mass points for potentials deeper than $2 E_G$ the atomic ensemble was then prepared at $q_c = G/4$. The resulting wave packet shapes are asymmetric exhibiting a steep edge on one side which becomes less pronounced for potentials deeper than $5 E_G$. The obtained experimental results in Fig. 3 are in excellent agreement with the numerically calculated band structure predictions. In contrast to the good agreement of the maximum velocity for all potential depths we find that for $V_0 > 5 E_G$ the group velocity of the center of mass is only 10% of the expected velocity. This could be an indication of entering the tight binding regime where the nonlinear effect of self-trapping, i.e., stopping and nonspreading wave packets, has been predicted [8]. We are currently investigating the transport properties in this regime in more detail.

In conclusion, we have demonstrated experimentally that the dispersion of atomic matter waves in a waveguide can be controlled using a weak periodic potential. Matter wave packets with positive, negative, and infinite effec-

tive masses are studied in the regime of weak and intermediate potential heights. The preparation of matter waves with engineered dispersion ($m_{\text{eff}} < 0$) is an important prerequisite for the experimental investigation of atomic gap solitons and other effects arising from the coherent interplay of nonlinearity and dispersion in periodic potentials.

We wish to thank J. Mlynek for his generous support, A. Sizmann and B. Brezger for many stimulating discussions, and J. Bellanca and K. Forberich for their help in building up the experiment. This work was supported by Deutsche Forschungsgemeinschaft, Emmy Noether Program, and by the European Union, Contract No. HPRN-CT-2000-00125.

Note added.—Only recently, we became aware of an experimental work [16] which is closely related to the work presented in this Letter.

-
- [1] *Bose-Einstein Condensation in Atomic Gases*, edited by M. Inguscio, S. Stringari, and C. Wieman (IOS Press, Amsterdam, 1999).
 - [2] G. P. Agrawal, *Applications of Nonlinear Fiber Optics* (Academic Press, San Diego, 2001); *Nonlinear Fiber Optics* (Academic Press, San Diego, 1995).
 - [3] M. Ben Dahan, E. Peik, J. Reichel, Y. Castin, and C. Salomon, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4508 (1996).
 - [4] B. P. Anderson and M. A. Kasevich, *Science* **282**, 1686 (1998); O. Morsch, J. Müller, M. Cristiani, D. Ciampini, and E. Arimondo, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 140402 (2001).
 - [5] S. Burger, F. S. Cataliotti, C. Fort, F. Minardi, M. Inguscio, M. L. Chiofalo, and M. P. Tosi, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 4447 (2001).
 - [6] M. Krämer, L. Pitaevskii, and S. Stringari, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 180404 (2002).
 - [7] P. Meystre, *Atom Optics* (Springer-Verlag, New York, 2001), p. 205, and references therein.
 - [8] A. Trombettoni and A. Smerzi, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 2353 (2001).
 - [9] M. Kozuma, L. Deng, E. W. Hagley, J. Wen, R. Lutwak, K. Helmerson, S. L. Rolston, and W. D. Phillips, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 871 (1999).
 - [10] C. F. Bharucha, K. W. Madison, P. R. Morrow, S. R. Wilkinson, Bala Sundaram, and M. G. Raizen, *Phys. Rev. A* **55**, R857 (1997).
 - [11] N. Ashcroft and N. Mermin, *Solid State Physics* (Saunders, Philadelphia, 1976).
 - [12] J. Hecker-Denschlag, J. E. Simsarian, H. Häffner, C. McKenzie, A. Browaeys, D. Cho, K. Helmerson, S. L. Rolston, and W. D. Phillips, *J. Phys. B* **35**, 3095 (2002), and references therein.
 - [13] M. Steel and W. Zhang, cond-mat/9810284.
 - [14] Y. Castin, and R. Dum, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 5315 (1996); Yu. Kagan, E. L. Surkov, and G. V. Shlyapnikov, *Phys. Rev. A* **54**, R1753 (1996).
 - [15] M. J. Potasek, G. P. Agrawal, and S. C. Pinault, *J. Opt. Soc. Am. B* **3**, 205 (1986).
 - [16] L. Fallani, F. S. Cataliotti, J. Catani, C. Fort, M. Modugno, M. Zawada, and M. Inguscio, cond-mat/0303626.

4.2.2 Kontinuierliches Dispersionsmanagement

Bei den bisher besprochenen Versuchen wurde das Wellenpaket meist im Impulsraum an eine bestimmte Position k_c präpariert und dort für die weitere Propagation belassen. Man kann dieses Konzept erweitern, indem man kontinuierlich k_c verändert und den Einfluss auf die Dynamik beobachtet. Diese Experimente wurden in einem modifizierten Aufbau durchgeführt. Der Wellenleiter und das periodische Potential sind dabei nicht kollinear, stattdessen schließen sie einen Winkel $\alpha = 23^\circ$ ein.

Dies ist in Abbildung 4.5(a) schematisch dargestellt. Ist die Beschleunigungszeit t_{prep} des periodischen Potentials nicht sehr viel länger als die Periodendauer der transversalen Schwingung $T = 2\pi/\omega_\perp$, so ist die Präparation in dieser Hinsicht nicht adiabatisch und führt zu einer transversalen Anregung des Wellenpakets im Wellenleiter. Die somit

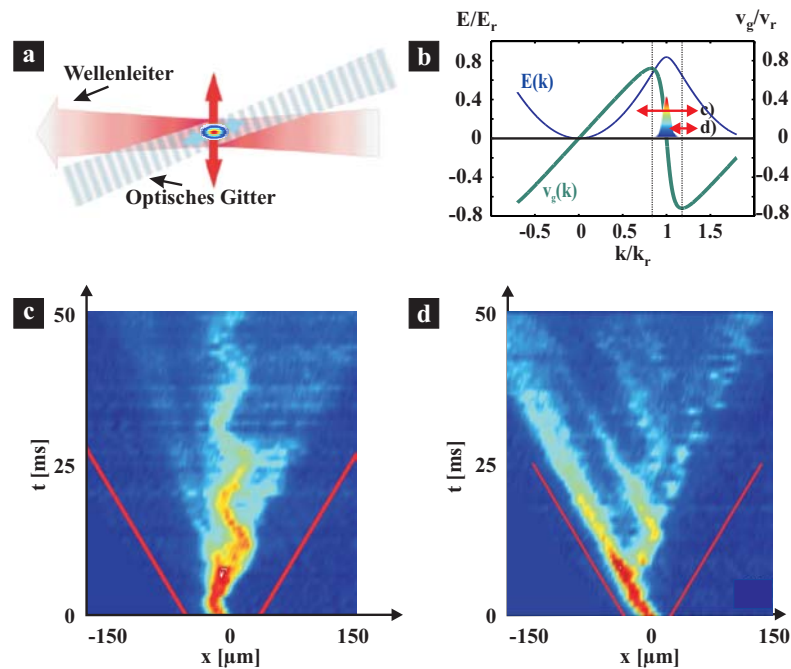


Abbildung 4.5: Experimente zum kontinuierlichen Dispersionsmanagement: (a) Da der Wellenleiter und das periodische Potential einen Winkel einschließen führt die Beschleunigung des periodischen Potentials zu einer transversalen Schwingung des Wellenpakets. (b) Die Komponente dieser Schwingungen entlang der Stehwelle führt somit auch zu einer Oszillation im Quasiimpulsraum, deren Amplitude und Zentralposition je nach Präparationsmuster variiert (rote Pfeile). (c)+(d) Zwei Beispiele der Wellenpaketdynamik für eine große Oszillationsperiode um die Bandkante (c) und eine kleine Oszillationsperiode, die asymmetrisch um die Bandkante erfolgt (d) (Details: s. Text).

angeregte Schwingung hat auch eine Komponente in Richtung der Stehwelle und führt dadurch zu einer kontinuierlichen Variation des Quasiimpulses. Die Amplitude und das Zentrum dieser Oszillationen sind in der Grafik (b) für zwei verschiedene Präparationsmuster durch die roten Pfeile im Quasiimpulsraum zusammen mit der Bandstruktur und der Gruppengeschwindigkeit im untersten Band dargestellt. Es wurden dazu jeweils

Kondensate mit 10^4 Atomen benutzt, die in einer anfänglichen Dipolfalle mit Frequenzen $\omega_{\perp} = 2\pi \times 80$ Hz und $\omega_{\parallel} = 2\pi \times 25$ Hz erzeugt wurden. Die Potentialtiefe betrug $U_0 = 0.5 \times E_r$.

In Grafik (c) ist das Ergebnis der Messung gezeigt, für die der Quasiimpuls eine Oszillationsamplitude um die Bandkante herum besaß, die so groß war, dass sich das Wellenpaket zeitweise bei positiver Masse und zeitweise bei negativer Masse befand. Dazu wurden die Dynamik mit einer zeitlichen Auflösung von einer Millisekunde beobachtet. Die eindimensionalen Querschnitte durch die Absorptionen entlang des Wellenleiters werden zur dargestellten Matrix lückenlos zusammengesetzt, um einen Eindruck über die räumliche Bewegung der Kondensate zu erhalten. Da die Dispersion um den Quasiimpuls bei unendlicher Masse verschwindet und sich zudem die Dynamik bei positiver und negativer Masse teilweise kompensiert, führt dies insgesamt zu einer unterdrückten Verbreiterung des Wellenpakets. Auf Grund der unterschiedlichen Gruppengeschwindigkeiten beidseits der Bandkante oszilliert das Wellenpaket auch deutlich sichtbar im Ortsraum. Die Grafik (d) zeigt hingegen eine Messung mit kleinerer Amplitude, die zudem asymmetrisch um die Bandkante erfolgte.

Die Dynamik ist hierbei wesentlich komplexer, sie kann bisher quantitativ noch nicht erklärt werden. Deutlich ist jedoch ein wohlbekannter Effekt aus der nichtlinearen Optik zu beobachten. Hält sich das Wellenpaket genügend lange bei den Impulsen mit verschwindender Dispersion auf, so führt die Selbstphasenmodulation durch die Nichtlinearität zu einer Aufspaltung des Wellenpakets im Impulsraum [125]. Bei einer Verschiebung der Impulse in Richtung der Bandkante trennen sich diese Teilpakete auch im Ortsraum auf Grund der zunehmend unterschiedlichen Gruppengeschwindigkeiten. Dieser Prozess ist mehrfach in Grafik (d) zu beobachten.

Die detaillierte Beschreibung des Präparationsprozesses, sowie die genaue Analyse der Daten und numerischer Simulationen wird in der Doktorarbeit von Thomas Anker erfolgen. Die Zusammenfassung dieser Experimente ist bei der Online-Zeitschrift „Optics Express“ veröffentlicht worden [164]. Der Vorteil dieser Anordnung lag darin, dass der Wellenleiter in der Fokalebene der Abbildungslinse stand und somit diese auch für lange Experimentzeiten nicht „nachjustiert“ werden musste. Die soeben besprochenen Versuche zum kontinuierlichen Dispersionsmanagement könnten ebenso gut in kollinear Anordnung erfolgen. Dabei würde die Verschiebung im Impulsraum durch periodische Variation des Frequenzunterschieds $\delta\nu$ der beiden Laserstrahlen des periodischen Gitters erreicht.

4.3 Atomare Gap-Solitonen

Einordnung des Experiments

In optischen Systemen wurden Solitonen bereits Anfang der 80er Jahre des letzten Jahrhunderts erzeugt und in einer Reihe von Experimenten im Detail untersucht ([165, 125] und Referenzen darin). Auch die Beobachtung von Solitonen in Glasfasern mit periodisch moduliertem Brechungsindex erfolgte bereits vor der Jahrtausendwende [166]. Mittlerweile konnten in einer Anordnung von Wellenleitern, die in einem photorefraktiven Medium erzeugt werden, auch zweidimensionale Solitonen beobachtet werden [127].

Die Liste heller atomarer Solitonen ist wesentlich kürzer. Bisher gelang es nur zwei Gruppen in Kondensaten mit attraktiver Wechselwirkung hellen Solitonen zu erzeugen.

Allerdings waren bei beiden systematische Untersuchungen nicht möglich. Im Experiment von Khaykovich et al. war die Beobachtungszeit auf Grund eines starken expulativen Potentials auf 8 ms beschränkt [167, 168]. In der Arbeit von Strecker et al. [169] bildeten sich auf Grund einer hohen anfänglichen Atomzahl Solitonzüge aus vier bis zehn einzelnen Solitonen aus. Die Dynamik, die zu deren Entstehung führt, ist im Detail kompliziert und wird bis heute kontrovers diskutiert [170, 171].

Im Gegensatz dazu wird im Folgenden über die erste Realisierung eines stehenden hellen atomaren Gap-Solitons berichtet. Es sind die ersten Solitonen aus Atomen, die repulsiv miteinander wechselwirken. Weiterhin wurden zum ersten Male systematische Messungen zur Dynamik der Wellenpakete durchgeführt, die ihr solitonisches Verhalten bestätigen. Sie wurden in der hier realisierten Weise zuerst von Steel und Zhang vorgeschlagen [113]. Ein ähnlicher Vorschlag wurde von Zobay et al. publiziert [172, 173].

Voraussetzungen für die Beobachtung atomarer Gap-Solitonen:

Bei den bisher durchgeführten Experimenten lag der Mittelpunkt des Interesses in der Beobachtung der geänderten Dispersion der Materiewellen. Diese stellen unerlässliche Vorarbeiten dar, um das eigentliche Ziel dieser Promotion, die Untersuchung des Wechselspiels von linearer Dispersion und nichtlinearer Wechselwirkung, zu erreichen. Wie in Kapitel 3 beschrieben wurde, liegt das Hauptinteresse dabei in der Realisierung atomarer Gap-Solitonen. Kurz gefasst ist es dazu notwendig ein BEC an der Bandkante eines periodischen Potentials zu präparieren. Dies wurde schon in Abschnitt 4.1 zur Eichung des Winkels und zur Eichung der Potentialtiefe, sowie in Abschnitt 4.2 zur Untersuchung des Bereichs konstanter effektiver Masse getan; es wurden jedoch keine Solitonen beobachtet. Die experimentellen Parameter bei diesen Experimenten lagen in einem Bereich, der dies verhindert hat. Die notwendigen Bedingungen zur Beobachtung eines Gap Solitons seien im Folgenden zusammengefasst:

1. Die Breite des Wellenpakets im Ortsraum muss wesentlich größer als die Periode des optischen Gitters sein. Nur dann kann das Wellenpaket nach Gl. 3.44 durch den Blochformalismus mit einer Einhüllendenfunktion $f(x, t)$ sinnvoll beschrieben werden. Zudem muss die Impulsbreite kleiner als der Bereich negativer Masse sein, wodurch (je nach Potentialtiefe) ebenfalls eine Mindestgröße vorgegeben ist. Andererseits sollte die Ausdehnung des BEC nicht zu groß sein, da mit zunehmender Breite nach Gl. 3.57 die Atomzahl im Soliton sinkt, sowie nach Gl. 3.56 die Solitonzeit ansteigt, wodurch die Beobachtung erschwert wird.
2. Numerische und analytische Simulationen zeigen, dass sowohl helle [105, 171, 148] als auch dunkle Solitonen [174, 175, 131] instabil werden, sobald ihre lineare Dichte einen gewissen Wert n_{\max} übersteigt. Die experimentelle Situation ist dann nicht mehr quasi-eindimensional; die Solitonen zerfallen in Wirbelzustände („Vortices“). Allerdings beziehen sich die Analysen für helle Solitonen in periodischen Potentials auf Fallstudien, so dass bisher kein exakter Grenzwert für n_{\max} bekannt ist. Man kann jedoch aus den genannten Arbeiten abschätzen, dass die Stabilität gewährleistet ist, solange $n_{\max} < 1/a = 188 \frac{\text{Atome}}{\mu\text{m}}$ ist, dies entspricht dem doppelten Wert, der den Übergang in das Regime der Eindimensionalität nach Gl.

3.16 markiert³. Andererseits sollte eine lineare Dichte von $n_{\min} \approx 10 \frac{\text{Atome}}{\mu\text{m}}$ nicht unterschritten werden, damit ein Nachweis durch Absorptionsabbildung mit dem gegenwärtigen Aufbau möglich ist.

3. Die Verschiebung des Wellenpakets im Impulsraum durch die longitudinale Falle des Wellenleiters muss wesentlich kleiner als der Bereich negativer Masse sein. Da $\omega_{\parallel} < 2\pi \times 0.5 \text{ Hz}$ ist, beschränkt dies die Beobachtungszeit auf etwa $T_{\max} = 100 \text{ ms}$ bei einer typischen Potentialtiefe von $U_0 = E_r$. Damit diese mindesten 10 Solitonperioden entspricht, ist auch eine untere Schranke für das Produkt $|m_{\text{eff}} x_0^2| \leq \frac{\hbar T_{\max}}{5\pi}$ festgelegt.
4. Um den Einfluss der Gravitation auf die Wellenpaketdynamik vernachlässigen zu können, ergibt sich eine technische Anforderung an das System: Der Wellenleiter sollte möglichst senkrecht zur Gravitationsrichtung stehen, die Winkelabweichung darf höchstens $200 \mu\text{rad}$ betragen.

Es sei noch angemerkt, dass die adiabatische Präparation des Wellenpakets im Quasiimpulsraum an den Rand der Brillouinzone zwar wünschenswert, aber nicht notwendig ist. In höhere Bänder angeregte Atome zerfließen schnell und beeinflussen die weitere Dynamik nicht mehr.

Die genannten Bedingungen müssen nicht nur für das ursprünglich präparierte Wellenpaket, sondern auch während der anschließenden Dynamik erfüllt sein. In Abschnitt 3.3 wurde gezeigt, dass Solitonen höherer Ordnungen eine Kompression zeigen, die zur Verletzung der Punkte 1 und 2 führen kann, obwohl diese anfänglich erfüllt waren. Unter Berücksichtigung der obigen Bedingungen ist die Beobachtung eines Solitons höherer als 2. Ordnung nicht möglich. Die Atomzahl des fundamentalen Solitons enthält nach Gl. 3.57 für realistische Größen des Wellenpakets $3 \mu\text{m} < x_0 < 10 \mu\text{m}$ bei einer Potentialtiefe im Bereich der Photonenrückstossenergie⁴ nur wenige hundert Atome. Es bleibt als Herausforderung die reproduzierbare Erzeugung eines kohärenten (kondensierten) Wellenpakets mit weniger als 1000 Atomen. Zuvor soll jedoch ein Experiment vorgestellt werden, wie der Übergang vom dreidimensionalen in das quasi-eindimensionale Regime experimentell beobachtet werden kann.

4.3.1 Übergang ins Regime der Eindimensionalität

Die Messung dazu ist einfach: man bildet das Kondensat nach der Erzeugung in der Dipolfalle ($\omega_{\perp} = 2\pi \times 70 \text{ Hz}$, $\omega_{\parallel} = 2\pi \times 12 \text{ Hz}$) und anschließender freier Expansion ($t_{\text{TOF}} = 15 \text{ ms}$) ab. Der Übergang in das quasi-eindimensionale Regime deutet sich bei einer Verminderung der Atomzahl durch ein wachsendes Aspektverhältnis $\eta = \frac{\sigma_z}{R_{\text{TF},x}}$ der Höhe (senkrecht zum Wellenleiter) zur Breite (entlang des Wellenleiters) der expandierten Wolke an [176, 177]. Solange sich das Kondensat im 3D-Thomas-Fermi Regime

³In der Arbeit von Muryshev et al. [175] für dunkle Solitonen wird dieser Wert für zigarrenförmige Fallen mit großen Frequenzverhältnis $\frac{\omega_{\perp}}{\omega_{\parallel}}$ mit $n_{\max} < 1.2/a$ angegeben. Für den Fall heller Solitonen bei attraktiver Wechselwirkung wird von Carr und Brand der Wert $n_{\max} < 0.91/a$ genannt.

⁴Die räumliche Größe des Kondensats sowie die Potentialtiefe können durch die gewählten Fallenfrequenzen der Dipolfalle und durch die Leistung der Laserstrahlen des optischen Gitters eingestellt werden.

befindet, ist die Zeitentwicklung durch die Gleichungen 4.3 bestimmt. Man erhält ein Verhältnis

$$\eta = \frac{R_{\text{TF},z}(t)}{R_{\text{TF},x}(t)} = \frac{\lambda_z(t) R_{\text{TF},z}(0)}{\lambda_x(t) R_{\text{TF},x}(0)} = \frac{\lambda_z(t) \omega_{\parallel}(0)}{\lambda_x(t) \omega_{\perp}(0)} \quad (4.4)$$

welches zwar abhängig von der Zeit, aber unabhängig von der Atomzahl ist, da diese in Gl. 4.3 nicht eingeht⁵. Mit sinkender Atomzahl nähert sich jedoch der Radius $R_{\text{TF},z}$ nach Gl. 3.26 der Größe des Grundzustand des harmonischen Oszillators $l_z = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_z}}$ an. Die Thomas-Fermi Näherung in dieser Richtung (die gerade die damit verbundene kinetische Energie vernachlässigt) verliert ihre Gültigkeit (s. Abschnitt 3.1.3). Man definiert den Übergang durch diejenige Atomzahl, bei der das chemische Potential nach der 3D-TF Näherung $\mu_{3d} = \hbar\omega_{\perp}$ dem Abstand der transversalen Zustände im Wellenleiter entspricht⁶ [176]. Man erhält

$$N_{1d} = \sqrt{\frac{32\hbar}{225ma^2}} \sqrt{\frac{\nu_{\perp}}{\nu_{\parallel}^2}} = 1760 \times \sqrt{\frac{\omega_{\perp}}{\omega_{\parallel}^2}} \sqrt{\frac{\text{rad}}{\text{s}}}, \quad (4.5)$$

entsprechend 470 Atome bei den oben genannten Fallenfrequenzen. In transversaler Richtung muss neben der Wechselwirkungsenergie zunehmend die Impulsbreite $\Delta p = \hbar/\Delta l_z$ auf Grund der kinetischen Energie des Wellenleiters berücksichtigt werden. Für sinkende Atomzahlen nimmt deshalb die absolute Höhe des Kondensats weniger schnell ab als die Breite. Für diese gilt auf Grund der geringeren Fallenfrequenz noch immer das TF-Limit, das Verhältnis η steigt. Befindet sich das Wellenpaket für $n_{1d} \ll 1/2a$ im gaußförmigen transversalen Grundzustand so wird die transversale Expansion nur noch durch die Impulsbreite Δp bestimmt und wird nach Gl. 3.35 unabhängig von N . Der Anstieg des Aspektverhältnisses ist in Abbildung 4.6 gezeigt. Die Breite der Wolke wurde dabei durch Parabeln, die Höhe jedoch aus Konsistenzgründen für alle Atomzahlen durch Gaußfunktionen approximiert. Deutlich erkennbar ist der Anstieg von η für sinkende Atomzahlen. Die beiden roten Linien markieren das Verhältnis $\eta_{\text{TF}} = 0.93$ für Kondensate tief im 3d-TF Regime (waagrecht) und die kritische Atomzahl $N_{1d} = 1890$ Atome (senkrecht) bei der die lineare Dichte den Wert $n_{1d} = 1/a = 188 \frac{\text{Atome}}{\mu\text{m}}$ erreicht. Weiterhin fällt die starke Streuung der Werte vor allem für kleine Atomzahlen auf. Die Ursache liegt vermutlich darin begründet, dass die Atomzahl reduziert wurde indem man die Dipolfallentiefe beim Umladen der Wolke aus der Magnetfalle abgesenkt hat. Auf Grund der kleineren Rethermalisierungsrate wird dadurch jedoch auch der Kondensationsprozess empfindlicher auf anfängliche Schwankungen der Phasenraumdichte, bei manchen Realisierungen entstanden nur teilweise kondensierte Wolken. Die besprochene Messung zeigt zwar, dass man in das notwendige Regime kleiner linearer Dichte vordringen kann, allerdings ist für die Herstellung atomarer Solitonen die Atomzahl, bei der *reproduzierbar reine* Kondensate hergestellt werden können, noch immer zu groß.

4.3.2 Beobachtung des Gap-Solitons

Durch Optimierung der Verdampfungskühlung in der Dipolfalle ist es schließlich gelungen reproduzierbar reine Kondensate mit 3000 Atomen herzustellen. Die Präparation

⁵Dies gilt für eine beliebige Zeitabhängigkeit der Fallenfrequenzen $\omega_i(t)$!

⁶Dies entspricht einer Bedingung an die lineare Dichte $n_{1d} \approx 1/4a$.

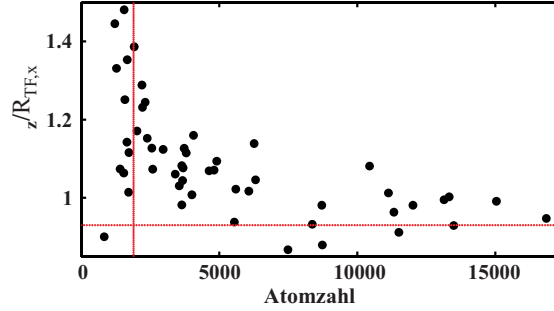


Abbildung 4.6: Signatur für den Übergang atomarer Wellenpakete ins Regime der Quasi-Eindimensionalität: Beobachtung des Aspektverhältnisses $\eta = \sigma_z / R_{\text{TF},x}$ eines frei expandierenden Kondensats nach 15 ms Fallzeit in Abhängigkeit der Atomzahl N . Solange sich das Kondensat im 3d-Thomas-Fermi Regime befindet ist η unabhängig von N (waagerechte Linie). Bei sinkender Atomzahl wird jedoch die Thomas-Fermi Näherung ungültig, die transversale kinetische Energie wird zunehmend durch die Impulsunschärfe des Grundzustands und weniger durch die Wechselwirkungsenergie bestimmt. Da in longitudinaler Richtung auf Grund des großen Verhältnisses der Fallenfrequenzen $\frac{\omega_{\perp}}{\omega_{\parallel}} = 6$ das Thomas-Fermi Limit noch gültig ist, steigt η sobald die lineare Dichte einen gewissen Grenzwert unterschreitet. Die senkrechte Linie markiert die Atomzahl für die die lineare Dichte unter $n_{1d} < 188 \frac{\text{Atome}}{\mu\text{m}}$ sinkt.

dieser Kondensate führte allerdings nicht zur Ausbildung von Solitonen, da die lineare Dichte in einem solchen Wellenpaket deutlich den im letzten Abschnitt angegebenen kritischen Wert übersteigt. Das Kondensat unterliegt dem bereits angesprochenen zweidimensionalen Kollaps [148]. Aus diesem Grund ist eine weitere Reduktion der anfänglichen Atomzahl notwendig. Diese erfolgt durch die bereits in Abschnitt 4.1.2 beschriebene Methode der Bragg-Beugung [141]. Dort wurde sie verwendet, um die Potentialtiefe des optischen Gitters zu bestimmen. Hier nutzt man die Möglichkeit, sie als kohärenten „Atomstrahlteiler“ einzusetzen.

Die Potentialtiefe und die Dauer des Braggpulses werden so eingestellt, dass etwa 70% der anfänglich 3000 Atome einen Impuls von $2\hbar k_r$ erhalten und sich mit einer Geschwindigkeit von $11.8 \mu\text{m}/\text{ms}$ vom verbleibenden Kondensat mit $900(\pm 300)$ Atomen entfernen⁷. Der kohärente Braggpuls erfolgt noch in der gekreuzten Dipolfalle mit Frequenzen $\omega_{\perp} = 2\pi \times 85 \text{ Hz}$ und $\omega_{\parallel} = 2\pi \times 38 \text{ Hz}$. Durch den starken axialen Einschluss besitzt das Wellenpaket zu diesem Zeitpunkt eine Größe⁸ $\sigma_z = 4 \mu\text{m}$ wobei σ_z die $1/e^2$ -Breite einer Gaußfunktion darstellt. Das periodische Potential wird nun innerhalb von 4 ms auf einen variablen Endwert $U_0 = 0.4 - 1.2 \times E_r$ linear erhöht. Die Geschwindigkeit des gebeugten Braggpulses wird durch die axiale Falle währenddessen auf $1.08 v_r$ reduziert⁹.

Nach dem Abschalten des Haltestrahls wird das BEC in zwei Stufen an der Band-

⁷Bei einer Größe des BEC von $10 \mu\text{m}$ sind die bragggebeugten Atome bereits nach 1 ms vom verbleibenden Kondensat räumlich getrennt.

⁸Die Form des Wellenpakets ist zu diesem Zeitpunkt parabolisch im Zentrum der Wolke und nähert sich am Rand einer Gaußverteilung an.

⁹Die Messung der Geschwindigkeit der gebeugten Atome nach der Verweildauer von $t = 4.2 \text{ ms}$ in der harmonischen Falle stellt eine weitere Möglichkeit dar, die Fallenfrequenz ω_{\parallel} zu bestimmen.

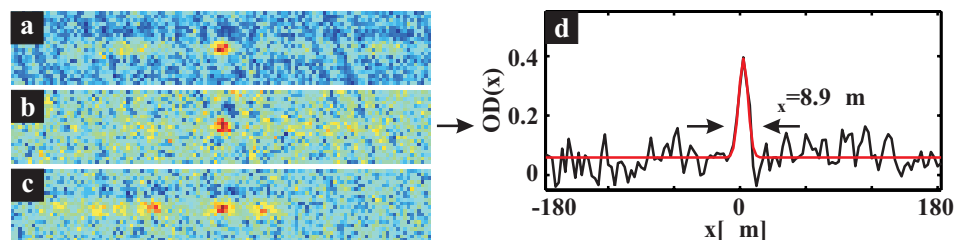


Abbildung 4.7: Erste Beobachtung atomarer Gap-Solitonen am 3. Juni 2003. (a)+(b) In beiden Absorptionbildern ist deutlich zu erkennen, dass die Wellenpakete nach einer Expansionszeit von 30 ms noch nicht zerflossen, sondern räumlich lokalisiert sind. Grafik (c) zeigt ein Experiment mit nahezu identischen Parametern, wobei sich kein einzelnes Soliton gebildet hat. (d) Ein Querschnitt durch das Soliton in (b) mit gaußscher Fitkurve zeigt, dass die Breite $\sigma_x = 8.9 \mu\text{m}$ nahezu mit dem Auflösungsvermögen des Abbildungssystems ($\sim 8 \mu\text{m}$) übereinstimmt, wodurch eine präzise Bestimmung der Solitonbreite nicht möglich ist.

kante präpariert. Innerhalb von $700 \mu\text{s}$ verschiebt man die Wolke auf einen Quasiimpuls $k_c = 0.8 \times k_r$, innerhalb weiterer $700 \mu\text{s}$ erfolgt der fehlende kritischere Teil bis an die Bandkante. Diese Art der Präparation ist zwar nicht adiabatisch, numerische Simulationen zeigen jedoch, dass weniger als fünf Prozent der Atome ins erste angeregte Band tunneln. Damit ist der Präparationsprozess abgeschlossen. Nach variabler Propagationszeit im Wellenleiter wird die Wolke abgebildet.

Wäre die dargestellte Methode nicht erfolgreich gewesen, hätte ich diese Arbeit nicht bis zu dieser Stelle geschrieben. In Abb. 4.7 (a)+(b) sind zwei Beispiele von Absorptionbildern atomarer Gap-Solitonen zu sehen. Nach einer Expansionszeit von 30 ms sind die Wellenpakete noch immer lokalisiert. Es sind die ersten hellen Solitonen, die am 3. Juni 2003 für ein System mit repulsiver Wechselwirkung erzeugt wurden. Im Soliton (a) sind 500 Atome enthalten, in guter Übereinstimmung mit der einfachen Theorie nach Gl. 3.57, die bei einer Potentialtiefe $U_0 = 0.48 \times E_r$ und einer deduzierten Breite $x_0 = 6.3 \mu\text{m}$ einen Wert von 400 Atomen vorhersagt. Die Vorhersage der nichtpolynomialen Schrödinger-Gleichung 3.17 beträgt 470 Atome, noch näher am Messwert. Die Solitonbreite x_0 , die der Breite des fundamentalen Solitons $f(x, t) \propto \text{sech}^2(x/x_0)$ entsprechen soll wurde abgeleitet, indem die gemessene $1/e^2$ -Breite $\sigma_x = 13.8 \mu\text{m}$ einer angepassten Gaußfunktion mit dem Auflösungsvermögen¹⁰ entfaltet wurde. Unter Berücksichtigung des Umrechnungsfaktors $\sigma_x = 1.58 \times x_0$ zwischen Solitonbreite x_0 und der $1/e^2$ -Breite einer Gaußfunktion erhält man den angegebenen Wert. Die soeben getroffene Terminologie für die Größen x_0 und σ_x wird auch im Weiteren beibehalten.

Das Soliton in Grafik (b) ist so klein, dass dessen Größe nicht genau zu bestimmen ist. Die gemessene Breite $\sigma_x = 8.9 \mu\text{m}$ stimmt im Bereich der Messgenauigkeit mit dem Auflösungsvermögen der Abbildung überein. Der Querschnitt durch die Dichteverteilung (schwarz) ist in Grafik (d) zusammen mit der gefitteten Gaußfunktion (rot) gezeigt. Die gemessene Atomzahl von 350 Atomen würde bei einer Potentialtiefe $U_0 = 0.73 \times E_r$ zu einem Soliton der Breite $x_0 = 4.6 \mu\text{m}$ passen.

¹⁰Für diese Messung wurde das Auflösungsvermögen durch die gemessene $1/e^2$ -Breite der Wolke in z-Richtung zu $10 \mu\text{m}$ bestimmt.

Es soll hier nicht der Eindruck entstehen, dass jeder experimentelle Versuch auch zu einem Soliton führt. Ein Beispiel dafür ist in Grafik (c) für $U_0 = 0.84 E_r$ bei ansonsten identischer Präparation gezeigt. Auch in diesem Bild sind kleine Strukturen zu erkennen, allerdings konnten diese nicht reproduziert werden und sind somit in Detail nicht zu untersuchen. Zudem ist ein „deutlicher“ Untergrund an Atomen um die Dichtemaxima zu erkennen. Dieser ist bei genauerer Betrachtung auch in den Grafiken (a) und (b), wenn auch weniger deutlich ausgeprägt, zu beobachten. Die Qualität der Bilder für Kondensate mit weniger als 1000 Atomen ist nicht mehr vergleichbar mit derjenigen bei höheren Atomzahlen. Das Rauschen, welches vor allem von zeitabhängigen Interferenzmustern des Abbildungslasers stammt, limitiert neben dem endlichen Auflösungsvermögen die Genauigkeit, mit der die Größe und die Atomzahl der Solitonen bestimmt werden können.

Systematische Untersuchungen der Solitonen

Über die Analyse einzelner Realisierungen hinaus wurden systematische Untersuchungen durchgeführt, die den Nachweis erbringen, dass die beobachteten Kondensate sich wie Solitonen verhalten. Dazu wurde zunächst eine Zeitreihe für eine feste Potentialhöhe $U_0 = 0.73 E_r$ aufgenommen. Im Bereich zwischen 5 ms und 20 ms wurde die Evolutionsdauer jeweils in Schritten von 1 ms geändert; bis 70 ms betrug die Schrittweite 5 ms. In die Grafiken der Abbildung 4.8 wurden nur diejenigen Messungen aufgenommen, die eine sinnvolle Bestimmung der Größe und Atomzahl erlauben.

Grafik (a) zeigt die gemessene Breite σ_0 der solitonisch präparierten Wellenpakete (schwarze Kreise, mit Fehlerbalken des Gaußfits) in Abhängigkeit der Zeit. Innerhalb der ersten 20 ms variiert diese stark von einem Experiment zum folgenden im Bereich zwischen $10 \mu\text{m} < \sigma_x < 19 \mu\text{m}$. Danach zeigt sich, dass ein Teil des Wellenpakets ein atomares Soliton gebildet hat. Die gemessene Breite bleibt bis zur maximalen Zeit von $t = 65$ ms, länger als 15 Solitonperioden, nahezu konstant bei $\sigma_z \approx 10 \mu\text{m}$. Aus dieser deduziert man eine Solitonbreite von $x_0 = 4.1 \mu\text{m}$. Um den Unterschied zum Verhalten eines Kondensats mit repulsiver Wechselwirkung im Bereich positiver Masse zu verdeutlichen, wurde eine Vergleichsmessung aufgenommen, die die Evolution für ein Kondensat mit 300 Atomen im Zentrum der Brillouinzone ($m_{\text{eff}} \approx +m_0$) zeigt (rote Kreise). Obwohl die *lineare* Dispersion 10-fach langsamer als an der Bandkante ist, zerfließt das Ensemble innerhalb von 40 ms auf $\sigma_x = 35 \mu\text{m}$.

Zur deduzierten Breite $x_0 = 4.1 \mu\text{m}$ der Solitonen erwartet man eine Atomzahl von $N = 400$ Atomen, die in Grafik (b) als roter Balken gezeigt ist, wobei dessen Breite die Ungenauigkeit in deren Bestimmung wiedergibt. Sie stimmt bis 30 ms gut mit den Messwerten überein, danach liegt sie signifikant darunter. Der Zerfall des Solitons wurde noch nicht im Detail untersucht, zweidimensionale numerische Rechnungen müssen in Zukunft zeigen, ob die transversale Dynamik während der Präparation und während der ersten Phase der Solitonbildung für diesen verantwortlich sind [105].

In Grafik (c) ist die Position des Solitons im Bezugssystem des periodischen Potentials gezeigt. Die Messwerte zeigen, dass die Gruppengeschwindigkeit vernachlässigbar ist. Dies bestätigt, dass das Wellenpaket an der Bandkante präpariert wurde. Es hat sich ein „stehendes“ Soliton gebildet. Diese Messung ist notwendig, um sicher zu stellen, dass das Wellenpaket (aus welchem Grund auch immer) *nicht* am Quasiimpuls verschwindender Dispersion präpariert wurde. In diesem Falle würde das Wellenpaket nur langsam auf

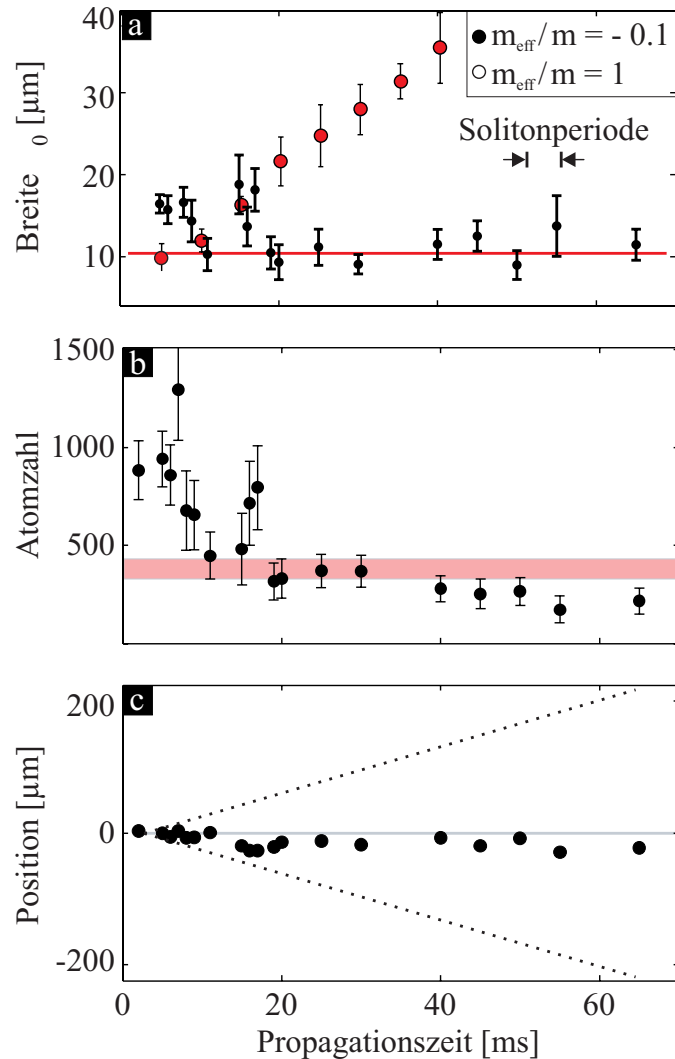


Abbildung 4.8: Signaturen eines hellen atomaren Gap-Solitons bei einer Potentialtiefe $U_0 = 0.73E_r$: (a) Die gemessene Breite der Wellenpakete bleibt für Evolutionszeiten $t > 20$ ms konstant bei $\sigma_x \approx 10 \mu\text{m}$. Aus der deduzierten korrespondierenden Solitonbreite $x_0 = 4.1 \mu\text{m}$ ergibt sich eine Atomzahl von $N \approx 400$ Atomen. (b) Die gemessene Atomzahl stimmt mit diesem Erwartungswert (roter Balken mit einer Breite, die der Ungenauigkeit der Bestimmung entspricht) gut überein, wobei für $t > 40$ ms zu kleine Werte gemessen werden. (c) Die konstante Position der Wellenpakete im Bezugssystem des periodischen Potentials bestätigt, dass die Präparation an der Bandkante (verschwindenden Gruppengeschwindigkeit) erfolgte; es hat sich ein „stehendes“ Soliton ausgebildet.

Grund der Dispersion höherer Ordnung zerfließen, dies ist jedoch ein linearer Effekt und stellt kein solitonisches Verhalten dar. Die Gruppengeschwindigkeit wäre in diesem Fall maximal bzw. minimal, die entsprechenden Positionen sind durch die gestrichelten Linien dargestellt. Zusammenfassend zeigt diese Messung, dass sich nach einer Zeit von $t \approx 20$ ms nicht zerfließende Wellenpakete, helle Solitonen, gebildet haben, die relativ

stabil über viele Solitonperioden beobachtet werden konnten. Die beobachtete Beziehung zwischen Größe und Atomzahl passt gut zum erwarteten Wert für das fundamentale Soliton nach Gl. 3.57.

Ungeklärt blieben bisher einige auffällige Details der Messung. Dazu gehört die Frage, warum sich ein großer Teil der anfänglich 1000 Atome nicht zum Soliton entwickelt und, eng verknüpft damit, warum die Wellenpakete bis $t \approx 20$ ms eine räumliche Breite zeigen, die sehr viel größer als diejenige des folgenden Solitons ist. Da die Unterschiede zwischen verschiedenen Realisierungen, bei gleichen Parametern, sehr groß sein können, lässt sich aus einer einzelnen Zeitreihe noch keine Antwort auf diese Fragen ableiten. Um zu beobachten, welche Prozesse „im Durchschnitt“ bei der Solitonbildung ablaufen, wurden deshalb mehrere Bilder aus Experimenten mit identischen Parametern aufsummiert. Dies hat den zusätzlichen positiven Effekt, dass das Rauschen der Absorptionsbilder reduziert wird¹¹.

Die Resultate sind in Abb. 4.9 als 3d-Darstellung der optischen Dichte gezeigt, gemittelt wurde über fünf Experimente. Im ersten Bild nach 15 ms ist noch der sich entfernende Braggpuls am Rand des Ausschnitts zu erkennen. Aus dem an die Bandkante präparier-

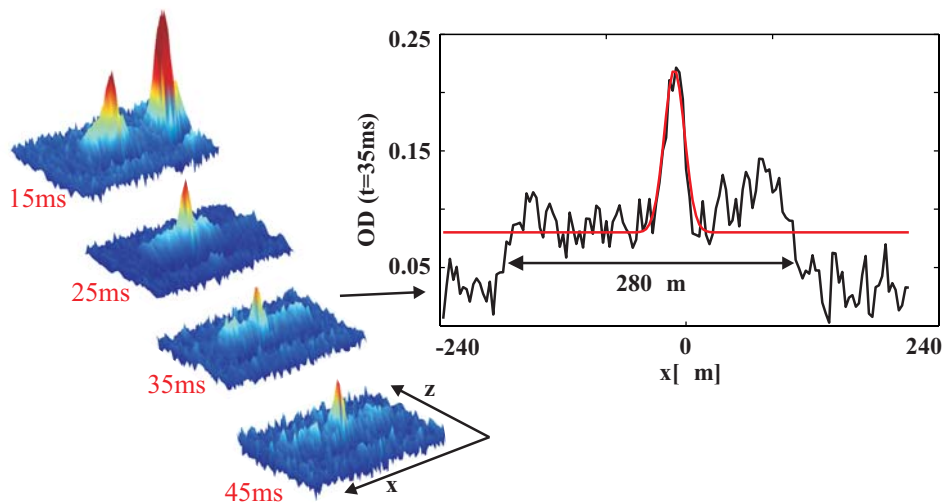


Abbildung 4.9: Verdeutlichung der Solitondynamik durch Summation von jeweils fünf Experimenten bei identischen Parametern: (a) Am Bildrand erkennt man für $t = 15$ ms die mittels Braggpuls entfernten Atome. Aus dem an der Bandkante präparierten Ensemble bildet sich ein Soliton auf einem Untergrund aus. Während der Untergrund rasch zerfließt, bis er für $t > 45$ ms nicht mehr erkennbar ist, behält das Soliton seine Form bei. (b) Aus Querschnitten durch die summierten Absorptionsbilder lässt sich die Atomzahl im Soliton und im Untergrund bestimmen. Die Analyse der Breite des Untergrunds bestätigt die Annahme, dass dieser Teil des Ensembles im Impulsraum mit den Quasiimpulsen bei verschwindender Dispersion k_∞ überlappt. Für $t = 35$ ms befinden sich nur 20% der Atome im Soliton, während die restlichen 80% den Untergrund bilden.

ten Ensemble bildet sich ein zentrales Maximum auf einem breiteren Untergrund aus. Deutlich erkennt man für die folgenden dargestellten Zeiten zwischen 25 ms und 45 ms,

¹¹Um kleine Variationen der räumlichen Positionen der Solitonen zu eliminieren, wurden die einzelnen Bilder so verschoben, dass die Dichtemaxima auf dieselbe Stelle fallen.

dass der Untergrund zerfließt und für lange Beobachtungszeiten $t > 45$ ms im Rauschen verschwindet. Dagegen behält das Soliton seine Form und bleibt gut beobachtbar.

Ein Querschnitt durch die summierten Aufnahmen bei $t = 35$ ms verdeutlicht diesen Sachverhalt. Der Untergrund hat im Ortsraum am Rand steile Kanten ausgebildet, die darauf schließen lassen, dass die Impulsverteilung dieses Teils des Wellenpakets mit den Quasiimpulsen bei verschwindender Dispersion k_∞ überlappen. Dies wird bestätigt durch die räumliche Breite von $280 \mu\text{m}$, aus der man die maximale bzw. minimale Gruppengeschwindigkeit $v_{\text{max/min}} = \pm 0.68v_r$ deduziert. Der Wert entspricht annähernd dem berechneten Wert $v_{\text{max}} = 0.73v_r$ für die eingestellte Potentialtiefe $U_0 = 0.66 E_r$. Die Atomzahl im Soliton beträgt für diese Messung $N_0 = 230$, für den Untergrund hingegen $N = 900$ Atome. Um eine Erklärung zu erhalten, warum 50-80 % der Atome „abgestrahlt“ werden, wurden eindimensionale numerische Simulationen für die gewählten experimentellen Parameter durchgeführt.

Numerische Simulation der Solitondynamik

Es wurde dazu die nichtpolynomiale Schrödingergleichung 3.17 benutzt, wobei das periodische Potential explizit berücksichtigt wurde. Es wurde also mit Ausnahme der Reduktion der 3d-Gross-Pitaevskii Gleichung 3.12 auf eine effektiv eindimensionale Situation keine Näherung gemacht. Die Parameter der Simulation entsprechen der Zeitreihe, die in Abbildung 4.8 gezeigt ist ($\omega_\perp = 2\pi \times 85$ Hz, $\omega_\parallel = 2\pi \times 38$ Hz, $U_0 = 0.7 E_r$). Der Grundzustand wurde für $N = 3000$ Atome berechnet. Der Braggpuls wurde berücksichtigt, indem die Atomzahl danach auf $N = 1000$ reduziert wurde.

In Abbildung 4.10 sind die Ergebnisse der Simulation dargestellt. Grafik (a) zeigt dabei die Entwicklung der Kondensatwellenfunktion $N|\psi(x, t)|^2$ während der Präparation an die Bandkante. Die Wellenpakete sind zur besseren Übersicht in x -Richtung versetzt dargestellt. Das linke Bild zeigt die Wellenfunktion für $t = 0$ ohne (schwarze Kurve) bzw. mit stehendem periodischem Potential bei $k_c = 0$ (rote Kurve). In der ersten Millisekunde der Präparation an die Bandkante, bleibt die Breite der Wolke praktisch unverändert, die Wellenfunktion wird jedoch zunehmend stärker moduliert. Bei $t = 1.5$ ms ist die Präparation abgeschlossen. Wie man es an der Bandkante erwartet ist $|\psi(x, t)|^2$ nahezu vollständig moduliert ($u_k(x) = \sin(kx)$). Das Ensemble beginnt zu komprimieren, da die Atomzahl ($N = 1000$) größer ist, als es dem fundamentalen Soliton ($N_0 = 400$) entspricht. Bereits nach $t \simeq 2$ ms erreicht die Wolke ihre größte Dichte, danach verbreitert sich das Soliton wieder.

Die Langzeitdynamik ist in Grafik (b) gezeigt, wobei die Verschiebung der Wellenpakete in diesem Fall vom Einfluss der schwachen longitudinalen Falle des Wellenleiters stammt. Als Vergleich ist wiederum $N|\psi(x, t)|^2$ für die Zeit $t = 0$ sowie für $t = 25$ ms und $t = 50$ ms gezeigt. Die räumliche Verteilung entspricht für die beiden langen Zeiten einem sekans hyperbolicus: für die nichtpolynomiale Schrödingergleichung stellt dieser zwar keine exakte Lösung aber eine sehr gute Näherung dar.

In Grafik (c) ist die Breite x_0 der Wellenpakete über der Zeit aufgetragen. Sie wurde bestimmt indem $|\psi(x, t)|^2$ durch eine Fitfunktion der Form des fundamentalen Solitons mit variabler Höhe und Breite approximiert wurde. Nach anfänglicher Kompression steigt die Breite stark an. Für lange Zeiten $t > 20$ ms oszilliert sie mit abnehmender Amplitude um einen Mittelwert $x_0 = 3.8 \mu\text{m}$, nahe am deduzierten experimentellen Mittelwert ($4.1 \mu\text{m}$). Diese Oszillation entspricht nicht einem Soliton höherer Ordnung, sondern

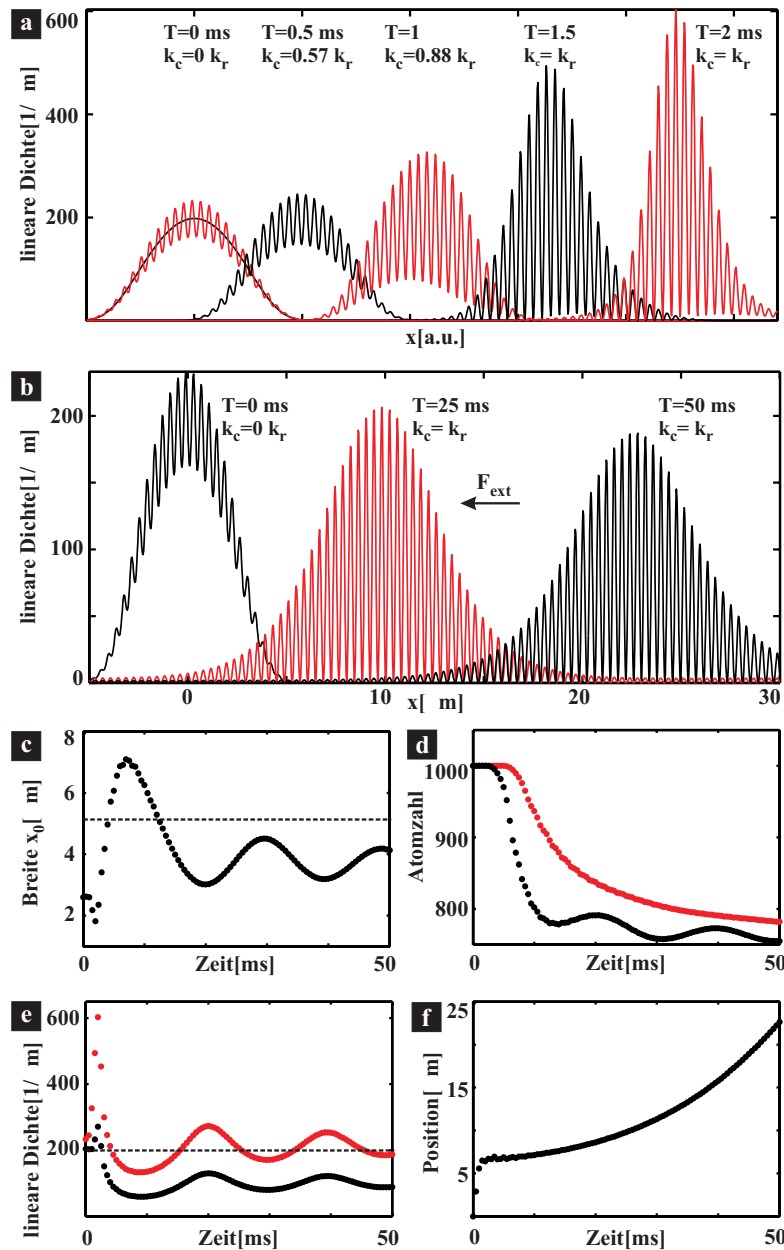


Abbildung 4.10: Numerische Simulationen zur Solitonbildung durch Lösung der nichtpolynominalen Schrödingergleichung mit Randbedingungen, wie sie auch im Experiment verwendet wurden. (a) Gezeigt sind die Wellenfunktionen $N|\psi(x,t)|^2$ während und kurz nach der Präparation des Kondensats an die Bandkante, die eine deutliche anfängliche Kompression des Kondensats zeigen. (b) Für lange Zeiten passt sich die Wellenfunktion derjenigen des fundamentalen Solitons an. (c-e) Aus den Analysen der Breite, der linearen Dichte und der Atomzahl im Soliton ergeben sich Hinweise, warum Experiment und die eindimensionale Rechnung nicht identische Ergebnisse erzeugen. (f) Die Verschiebung des Massenzentrums des Solitons ist eine Folge der schwachen longitudinalen Falle des Wellenleiters und zugleich eine Manifestation der negativen Masse, da Kraft und Beschleunigung in verschiedene Richtungen zeigen.

zeigt den langsamen Anpassungsprozess des Wellenpakets an das fundamentale Soliton. Gestrichelt ist das Auflösungsvermögen des Abbildungssystems eingezeichnet, wodurch verdeutlicht wird, dass Solitondynamik auf dieser Längenskala momentan nicht im Detail beobachtet werden kann.

Weniger gute Übereinstimmung mit dem Experiment zeigt hingegen die beobachtete Atomzahl im Soliton, dargestellt in Grafik (d). Dazu wurde die lineare Dichte um ihr Maximum aufsummiert. Für die rote Kurve wurde eine Gesamtbreite von $\Delta x = 50 \mu\text{m}$, für die schwarze Kurve $\Delta x = 25 \mu\text{m}$ benutzt. Sie stellen die obere bzw. untere Grenze der wirklichen Atomzahl dar. In der Rechnung resultiert der Verlust an Atomen aus der endlichen Impulsbreite, also einer Abhängigkeit der effektiven Masse vom Quasiimpuls, und der nicht zum Soliton passenden Ortsverteilung des Wellenpakets nach der Präparation. Allerdings befinden sich für $t = 50 \text{ ms}$ mehr als 750 Atome im Soliton, der Verlust ist wesentlich kleiner als experimentell beobachtet.

Einen Hinweis auf einen weiteren Verlustkanal gibt Grafik (e) in der zwei Kurven für die lineare Dichte aufgetragen sind, zum einen der Maximalwert der Wellenfunktion $N|\psi(x, t)|_{\text{max}}^2$ (rot), zum anderen die maximale über eine räumliche Periode $\Delta x = 390 \text{ nm}$ gemittelte lineare Dichte (schwarz). Beide Werte übersteigen während der anfänglichen Kompressionsphase den kritischen Wert von $\sim 200 \text{ Atomen}/\mu\text{m}$. Man kann vermuten, dass ein Teil des Wellenpakets in dieser Zeit einem 2-dimensionalen Kollaps unterliegt. Nach Scott et al. [148] führt dieser zu einer Verbreiterung im Impulsraum, wodurch man erklären kann, dass der beobachtete Untergrund nahezu mit der maximalen Gruppengeschwindigkeit expandiert. Diese Aussage stellt jedoch nur eine Vermutung dar, die konsistent mit den experimentellen Beobachtungen ist. Es existieren bisher keine 2-dimensionalen numerischen Rechnungen für die benutzten Parameter, die dies bestätigen oder widerlegen könnten.

Den Einfluss der longitudinalen schwachen Falle kann man an der Position des Solitons im Bezugssystem des mit v_r laufenden periodischen Potentials in Grafik (f) sehen. Die anfängliche Verschiebung stammt von der Präparation. Das Wellenpaket ruht zunächst im Laborsystem, bewegt sich also in Bezugssystem der laufenden Stehwelle mit v_r . Durch die Präparation an die Bandkante verschwindet die Gruppengeschwindigkeit. Danach führt die langsame Verschiebung des zentralen Wellenvektors durch die longitudinale Falle zu einer zunehmenden Gruppengeschwindigkeit, die jedoch die interne Solitondynamik nur schwach beeinflusst. Die „erstaunlichen“ Auswirkung der negativen effektiven Masse erkennt man gut daran, dass sich das Wellenpaket *entgegen* der Kraftrichtung des Potentials bewegt (s.a. Grafik (b)).

Variation der Potentialtiefe

Als Abschluss der systematischen Untersuchungen wurde eine weitere Experimentreihe durchgeführt, bei der die Potentialtiefe des optischen Gitters verändert wurde. Dies dient zum einen als zusätzliche Bestätigung des solitonischen Charakters der erzeugten Wellenpakete, zum anderen erhält man durch Vergleich mit numerischen Simulationen weitere Hinweise auf die Mechanismen, die zum beobachteten Teilchenzahlverlust führen. Bei ansonsten identischen Parametern wie bisher wurde die Potentialtiefe im Bereich zwischen $0.37 E_r < U_0 < 0.92 E_r$ variiert und die Evolutionszeit fest auf $t = 40 \text{ ms}$ eingestellt. Bei jeder Potentialhöhe wurden mehrere identische Experimente durchgeführt, von insgesamt ca. 100 Realisierungen führten etwa 50 zu Solitonen.

Aufgetragen ist in Abbildung 4.11(a) das Produkt aus Teilchenzahl und Solitonbreite Nx_0 über dem negativen Verhältnis aus normaler und effektiver Masse. Nach Gl.

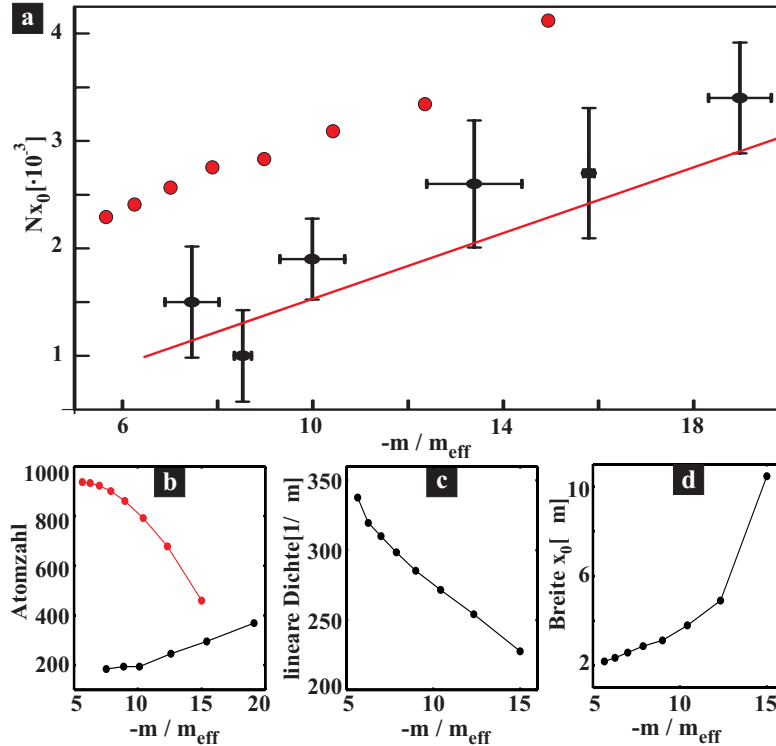


Abbildung 4.11: (a) Vergleich numerischer Simulationen und experimenteller Messungen zum Skalierungsverhalten des Produkts $N \times x_0$ aus Atomzahl und Solitonbreite in Abhängigkeit der Potentialtiefe. Die Messwerte (schwarz) liegen zwischen der einfachen Theorie nach Gl. 3.57 (rote Gerade) und den Ergebnissen der Rechnungen (rote Punkte). (b-d) Durch die Analyse der berechneten Atomzahl im Soliton, der linearen Dichte und der Breite ergeben sich weitere Hinweise, dass der beobachtete Untergrund in den Experimenten für große Potentiale wahrscheinlich eine Folge eines 2-dimensionalen Kollaps ist (s. Text).

3.57 sollte sich eine lineare Abhängigkeit ergeben, die durch die rote Gerade markiert ist. Die experimentellen Ergebnisse (schwarze Punkte) bestätigen die Erwartungen für solitonisches Verhalten. Die Übereinstimmung mit der einfachen Theorie ist gut, wobei tendenziell höhere Werte gemessen wurden. Man kann dies wiederum erklären durch die Berücksichtigung der transversalen Grundzustandsverbreiterung nach Gl. 3.17, welche zu einer erhöhten Atomzahl führt. Die Fehlerbalken repräsentieren die Standardabweichungen der effektiven Masse (horizontal) sowie der Messwerte (vertikal) für die verschiedenen Realisierungen.

Als Vergleich sind die Ergebnisse der numerischen Integration der NPSE nach Gl. 3.17 eingetragen (rote Punkte). Diese liegen alle über den Messwerten. Noch größer werden die Unterschiede, wenn man in Grafik (b) nicht das Produkt Nx_0 sondern die Atomzahlen im Soliton von Experiment und Numerik (ebenfalls nach 40 ms) vergleicht. Während mit sinkender Potentialtiefe (größeres $m/|m_{\text{eff}}|$) die beobachtete Atomzahl (schwarz) steigt, sinkt sie in der Numerik (rot), da der Bereich konstanter Masse kleiner

wird. Die beiden Kurven nähern sich an. Falls der Atomzahlunterschied auf einen 2d-Kollaps zurückzuführen ist, so sollte dieser demnach für sinkende Potentialtiefen kleiner werden. Diese Vermutung wird unterstützt durch die in Grafik (c) gezeigte maximale lineare Dichte (gemittelt über eine räumliche Periode) nach der Präparation des Ensembles. Die anfängliche Dichteverteilung entspricht für steigende $m/|m_{\text{eff}}|$ immer besser dem fundamentalen Soliton, die Kompression fällt schwächer aus. Deshalb sinkt die maximale lineare Dichte und damit auch die Wahrscheinlichkeit eines 2d-Kollaps. Für $m/|m_{\text{eff}}| = 15$ nähert sie sich dem Bereich $N|\psi(x, t)|^2 < 200$ Atome/ μm an, für den das System stabil quasi-eindimensional sein sollte. In Grafik (d) ist schließlich die Breite x_0 der Solitonen aufgetragen. Wie bereits erwähnt, verkleinert sich der Bereich konstanter negativer Masse mit sinkender Potentialtiefe. Die Breite der S...¹² muss zunehmen, damit das Wellenpaket im Impulsraum eine genügend schmale Verteilung besitzt.

Zusammenfassend kann man demnach vermuten, dass für große Potentialtiefen die Verletzung der Bedingung für Quasi-Eindimensionalität zum beobachteten Untergrund führt, während bei kleinen Potentials abnehmender Bereich negativer (konstanter) Masse dafür verantwortlich ist. Auch diese These muss noch durch 2d-Rechnungen bestätigt werden. Außerhalb des Bereichs $0.37 E_r < U_0 < 0.92 E_r$ wurden bisher keine Solitonen beobachtet, wobei anzunehmen ist, dass die Grenzen durch andere Startbedingungen (Atomzahlen, Fallenfrequenzen) verschoben werden können. Interessanterweise wurden im Experiment für $m/|m_{\text{eff}}| = 18$ noch Solitonen beobachtet, während die Simulationen für $m/|m_{\text{eff}}| \geq 17$ kein solches Verhalten mehr zeigten, es bleiben noch genügend offene Fragen für weitere Experimente.

Die vorliegenden experimentellen Ergebnisse zu atomaren Gap-Solitonen wurden zusammengefasst bei der Zeitschrift „Physical Review Letters“ zur Veröffentlichung eingereicht.

¹²Ich kann das Wort jetzt auch nicht mehr sehen.

Kapitel 5

Resümee und Ausblick

5.1 Resümee

Zielsetzung dieser Arbeit:

Ziel dieser Arbeit war die Untersuchung der Wellenpaketdynamik eines verdünnten bose-kondensierten ^{87}Rb Gases. Diese wird durch die lineare Dispersion, auf Grund der endlichen Impulsbreite der Materiewelle, und durch die nichtlineare Wechselwirkung zwischen den Atomen durch s-Wellen-Streuung bestimmt. Das besondere Interesse bestand dabei an der experimentellen Erzeugung heller atomarer Solitonen. Sie entstehen falls sich die Effekte der Dispersion und der Nichtlinearität kompensieren. Es bildet sich eine lokalisierte Materiewelle mit zeitunabhängiger Dichteverteilung aus. In einem BEC mit repulsiver Wechselwirkung, wie es für ^{87}Rb der Fall ist, erfordert dies eine anomale Dispersion des Ensembles. Die Dispersion des Wellenpakets kann sowohl in der Größe als auch im Vorzeichen geändert werden, indem man das BEC einem periodischen Potential kontrollierbarer Tiefe aussetzt und den Quasiimpuls gezielt verändert.

Experimenteller Aufbau:

Es wurde zunächst eine Apparatur zur Erzeugung von Bose-Einstein Kondensaten aus $^{87}\text{Rubidium}$ Atomen - als Quelle kohärenter Materiewellen - errichtet und charakterisiert. Der Beginn meiner Promotion stellte gleichzeitig den Anfang der Aufbauphase des Experiments dar. Es konnte auf keine Vorarbeiten zurückgegriffen werden. Das experimentelle Design orientiert sich weitgehend an den Standardmethoden zur Erzeugung ultrakalter atomarer Gase. Einer zweistufigen Phase der Laserkühlung in einem Funnel und einer dreidimensionalen magneto-optischen Falle schließt sich der Transfer der Atomwolke in eine rein magnetische Falle an. Der BEC-Phasenübergang wurde durch Verdampfungskühlung in der verwendeten TOP-Falle beobachtet.

Die Experimente zur Untersuchung der Materiewelldynamik wurden in einem Wellenleiter, realisiert durch eine optische Dipolfalle, durchgeführt. Dieser kann die Atome gegen die Gravitation halten, erlaubt aber gleichzeitig die freie Propagation entlang der Strahlachse. Der Kühlungsprozeß wurde zur Erzeugung reiner Kondensate in der Dipolfalle leicht modifiziert. Eine vorgekühlte Wolke wird in das kombinierte Potential aus Wellenleiter und einer weiteren zweidimensionalen optischen Falle, dem Haltestrahl, transferiert und dort durch Verdampfungskühlung kondensiert. Mit dem Abschalten des

Haltestrahls entlässt man das BEC in den Wellenleiter. Die Dispersion dieser kohärenten Materiewelle wurde geändert, indem man der Dipolfalle ein periodisches Potential räumlich überlagert. Dieses optische Gitter entsteht durch Interferenz zweier gegenläufiger Laserstrahlen. Durch die Variation der Laserleistung und der Verstimmung der beiden Strahlen kann die Dispersion sowohl in der Größe als auch im Vorzeichen gezielt eingestellt werden. Insbesondere erreicht man die - für helle atomare Solitonen notwendige - anomale Dispersion für Quasiimpulse im Bereich der Bandkante der Brillouinzone.

Durchgeführte Experimente

Durch die Kombination aus optischem Wellenleiter und überlagertem periodischem Potential, wurde es erstmals möglich, die freie Dynamik von Materiewellen in optischen Gittern direkt im Ortsraum für „lange“ Zeiten zu beobachten. Bisherige, in periodischen Potentialen durchgeführte Experimente wurden stattdessen im freien Fall¹ oder in einer Magnetfalle durchgeführt.

In einer ersten Reihe von Experimenten wurde demonstriert, dass es durch Präparation der Wellenpakete am Rand der Brillouinzone möglich ist, eine anomale Dispersion zu erreichen, die durch eine negative effektive Masse der Atome beschrieben werden kann. Dazu wurde die Dynamik eines zunächst bei positiver Masse expandierten Wellenpakets invertiert. Nach der Präparation an der Bandkante beginnt das Ensemble zu komprimieren, bis es seine Anfangsgröße wieder erreicht. Diese Umkehr der zeitlichen Entwicklung ist eine direkte Manifestation der negativen effektiven Masse. Weiterhin wurde untersucht, für welche Potentialtiefen die Annahme einer konstanten effektiven Masse gerechtfertigt ist. Dazu wurde die Potentialtiefe für Materiewellen an der Bandkante variiert. Sobald die Dichteverteilung nicht mehr durch Gaußfunktionen wiedergegeben wird, müssen Dispersionsterme höherer Ordnung in der Zeitentwicklung berücksichtigt werden. Schließlich wurde die maximale Gruppengeschwindigkeit der Atome im untersten Band bestimmt, indem Wellenpakete präpariert wurden, die im Impulsraum mit den Quasiimpulsen unendlicher Masse überlappen. Im Ortsraum entwickeln sich steile Kanten an den Ränder der Wellenpakete, die eine einfache Deduktion der maximalen Geschwindigkeit erlauben. Die bisher diskutierten Beobachtungen wurden in der Zeitschrift „Physical Review Letters“ [163] publiziert.

Die besprochene Demonstration der negativen Masse eines Wellenpakets war die wesentliche Voraussetzung zur Erzeugung atomarer Solitonen. Deren Entstehung konnte beobachtet werden, nachdem es gelungen ist, kohärente Wellenpakete mit einer Teilchenzahl im Bereich von 1000 Atomen zu präparieren. Es wurde eine Reihe von systematischen Messungen durchgeführt, die das solitonische Verhalten der Wellenpakete bestätigten. Gleichwohl ergaben sich Abweichungen der experimentellen Ergebnisse von den Vorhersagen numerischer Lösungen der nichtlinearen nichtpolynomialen Schrödingergleichung. Der Anteil an Atomen, die nicht zum Soliton beitragen, war im Experiment wesentlich größer als von der eindimensionalen Theorie vorhergesagt. Durch einen detaillierten Vergleich von Theorie und Experiment wurde eine These für den Atomzahlverlust entwickelt, die noch durch mehrdimensionale Simulationen der Gross-Pitaevskii Gleichung bestätigt werden muss.

Die beobachteten nicht zerfließenden Wellenpakete stellen die ersten hellen Solitonen

¹Dadurch wird die Beobachtungszeit auf $t < 20$ ms beschränkt.

für Atome mit repulsiver Wechselwirkung dar. Mit Ausnahme von stabilen optischen Pulsen in einer Anordnung von Wellenleitern [126, 127], sind es zudem die einzigen hellen Solitonen, die für selbstdefokussierende Nichtlinearität nachgewiesen wurden. Durch die Präparation der Atome an der Bandkante der Brillouinzone, und daraus resultierender verschwindender Gruppengeschwindigkeit, handelt es sich weiterhin um die ersten **stehenden** Gap-Solitonen. Eine Zusammenfassung der Untersuchungen heller atomarer Gap-Solitonen ist zur Veröffentlichung bei der Zeitschrift „Physical Review Letters“ eingereicht.

5.2 Ausblick

Die Stärke der bestehenden Apparatur liegt zum einen in der Stabilität, mit der sich Bose-kondensierte Gase variabler Atomzahl erzeugen lassen. Zum anderen stellt die Kombination aus Wellenleiter und periodischem Potential ein „Modellsystem“ zur Untersuchung nichtlinearer Wellenpaketdynamik dar. Die Dispersion kann durch das optische Gitter in weiten Bereichen eingestellt werden, während man über die Atomzahl auf die nichtlineare Wechselwirkungsenergie Einfluss nimmt. Die Kompensation der Schwerkraft durch den Wellenleiter erlaubt die Ausdehnung der Beobachtungszeiten auf mehrere hundert Millisekunden, eine Größenordnung länger, als es für Messungen im freien Fall möglich ist.

Gegenwärtige, geplante und „mögliche“ Experimente

Mit dem Neuaufbau der Apparatur in Heidelberg durch Michael Albiez, Thomas Anker und Stefan Hunsmann, wurde die Qualität des Abbildungssystems deutlich verbessert. Das Auflösungsvermögen beträgt mittlerweile weniger als $3\ \mu\text{m}$ (gemessene $1/e^2$ -Breite eines Wellenpakets).

Dadurch können in Zukunft Details der Solitondynamik auf einer Längenskala studiert werden, die bisher experimentell nicht zugänglich waren. Es sollte damit erstmals möglich sein Solitonen zweiter Ordnung zu beobachten. Ein weiteres großes Ziel besteht in der detaillierten Untersuchung der Kollisionsdynamik zweier Solitonen. Dazu muss der Aufbau erweitert werden, um zunächst räumlich getrennte Solitonen zu erzeugen. Ein Teil der dazu notwendigen Vorarbeiten wurde bereits vollendet. Die Details sind in der Diplomarbeit von M. Taglieber nachzulesen [178].

In den letzten Jahren ist eine Fülle von theoretischen Arbeiten erschienen, die die Existenz von diskreten Solitonen für große Potentialtiefen im so genannten „Tight-Binding-Regime“ vorhersagen [179, 180, 181]. In diesem sind die Atome im niedrigsten Energieband bereits stark an einzelne Potentialmulden des Gitters gebunden. Das System wird dann durch eine diskrete nichtlineare Schrödingergleichung beschrieben [118]. Die Überprüfung dieser Vorhersagen ist für die nähere Zukunft geplant.

Eng damit verknüpft ist die Erzeugung heller Solitonen in höherdimensionalen Systemen [182], in denen diese im Allgemeinen instabil sind [183]. Mehrere Publikationen sagen jedoch deren Stabilisierung in Systemen mit modulierter Nichtlinearität bzw. Dispersion voraus [183, 184, 185, 186]. Für die experimentelle Realisierung, freie Propagation in zwei Dimensionen, sind jedoch größere Umbauten notwendig, die zum gegenwärtigen Zeitpunkt nicht geplant sind.

Über die Beobachtung von Solitonen hinaus, ist das System geeignet, weitere vorhergesagte, aber experimentell noch nicht bestätigte Effekte zu untersuchen. Einer davon ist die so genannte Modulationsinstabilität². Es handelt sich dabei um die Instabilität einer ausgedehnten (idealerweise) homogenen Wellenfunktion gegenüber (sinusförmigen) Modulationen der Dichteverteilung. Sie tritt jedoch nur in Systemen mit attraktiver(repulsiver) Wechselwirkung und normaler(anomaler) Dispersion auf [187, 188, 189, 190]. In den bisher durchgeführten Experimenten wurde sie nicht beobachtet, da zumindest für kleine Atomzahlen die Materiewelle durch die kinetische Energie der verwendeten kleinen Wellenpakete stabilisiert wird. Ihre Beobachtung sollte möglich sein, wenn man gezielt BECs großer räumlicher Breite erzeugt, und durch ein äußeres Potential eine geeignete „Störung“ aufprägt.

Momentaner Gegenstand der Untersuchungen ist das so genannte „self-trapping“ atomarer Wellenpakete. Man präpariert dazu ein BEC in einem tiefen Potential ($V_0 > 5 E_r$) im Zentrum der Brillouinzone. Von Trombettoni und Smerzi wurde vorhergesagt, dass sich nach einer anfänglichen Phase der Expansion ein Zustand einstellt, der seine räumliche Breite beibehält [118, 191]. Dies stellt jedoch kein solitonisches Verhalten dar, sondern ist eine Folge des Zusammenspiels von nichtlinearer Wechselwirkung und der Tunneldynamik zwischen benachbarten Potentialtöpfen. Erste Anzeichen dafür wurden bereits von Thomas Anker beobachtet.

Die Erweiterung dieses Experiments besteht in der Untersuchung von Josephson-Oszillationen in einem Doppelmuldenpotential [192, 193]. Die dazu notwendigen Änderungen des Aufbaus sind bereits in Planung und können voraussichtlich in naher Zukunft von Michael Albiez implementiert werden.

Das Gebiet der Bose-Einstein Kondensation in periodischen Potentialen ist zum gegenwärtigen Zeitpunkt so dynamisch, dass es nicht lange dauern wird bis zumindest einige der genannten Effekte demonstriert werden können. Man darf auf weitere Veröffentlichungen gespannt sein.

²Dieser Effekt wird für die Entstehung der Solitonzüge im Experiment von Strecker et al. verantwortlich gemacht [169]. Er konnte jedoch nicht im Detail untersucht werden, da das durchgeführte Experiment eine komplexe Dynamik aufweist.

Literaturverzeichnis

- [1] S.N. Bose. Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese. *Z.Phys.*, 26(6):178–81, 1924.
- [2] A. Einstein. Quantentheorie des einatomigen idealen Gases: Zweite Abhandlung. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.*, page 18ff., 1925.
- [3] L. de Broglie. *Recherches sur la théorie des quanta*. PhD thesis, Faculté des Sciences de Paris, 1924.
- [4] E. Schrödinger. *Statistical Thermodynamics*. Dover Publications, 1989.
- [5] F. Dalfovo and S. Giorgini. Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases. *Review of Modern Physics*, 71(3):463–512, April 1999.
- [6] M. Anderson, J. Ensher, M. Matthews, C. Wieman, and E. Cornell. Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor. *Science*, 269:198, 1995.
- [7] K. Davis, M.-O. Mewes, M. Andrews, N. van Druten, N. Durfee, D. Kurn, and W. Ketterle. Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms. *Physical Review Letters*, 75:3969, 1995.
- [8] C.C. Bradley, C.A. Sackett, J.J. Tollet, and R.G. Hulet. Evidence of Bose-Einstein condensation in an atomic gas with attractive interactions. *Physical Review Letters*, 75:1687, 1995.
- [9] W. Ketterle, D.S. Durfee, and D.M. Stamper-Kurn. Making, probing and understanding Bose-Einstein condensates. In M. Inguscio, S. Stringari, and C. Wieman, editors, *Bose-Einstein Condensation in Atomic Gases*, Amsterdam: IOS Press, 1999. Società Italiana di Fisica.
- [10] A. Griffin, D.W. Snoke, and S. Stringari. *Bose-Einstein condensation*. Cambridge University Press, Cambridge,UK, 1995.
- [11] L.P. Pitaevskii and S. Stringari. *Bose-Einstein condensation*. Oxford University Press, Oxford, 2003.
- [12] E.A. Cornell, J.R. Ensher, and E. Wieman. Experiments in dilute atomic Bose-Einstein condensation. In M. Inguscio, S. Stringari, and C. Wieman, editors, *Bose-Einstein Condensation in Atomic Gases*, Amsterdam: IOS Press, 1999. Società Italiana di Fisica.

- [13] C.J. Pethick and H. Smith. *Bose-Einstein condensation in dilute gases*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2002.
- [14] J.R. Ensher, D.S. Jin, M.R. Matthews, C.E. Wieman, and E.A. Cornell. Bose-Einstein condensation in a dilute gas: Measurement of energy and ground-state occupation. *Physical Review Letters*, 77:4984, 1996.
- [15] D.S. Jin, J.R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman, and E.A. Cornell. Collective excitations of a Bose-Einstein condensate in a dilute gas. *Physical Review Letters*, 77:420, 1996.
- [16] M.-O. Mewes, M.R. Andrews, N.J. van Druten, D.M. Kurn, D.S. Durfee, C.G. Townsend, and W. Ketterle. Collective excitations of a Bose-Einstein condensate in a magnetic trap. *Physical Review Letters*, 77:988, 1996.
- [17] M.R. Andrews, D.M. Kurn, H.-J. Miesner, D.S. Durfee, C.G. Townsend, S. Inouye, and W. Ketterle. Propagation of sound in a Bose-Einstein condensate. *Physical Review Letters*, 79:533, 1997.
- [18] M.R. Andrews, C.G. Townsend, H.-J. Miesner, D.S. Durfee, D.M. Kurn, and W. Ketterle. Observation of interference between two Bose-Einstein condensates. *Science*, 275:637, 1997.
- [19] B.P. Anderson and M. Kasevich. Macroscopic quantum interference from atomic tunnel arrays. *Science*, 282:1686–89, November 1998.
- [20] M.-O. Mewes, Andrews M.R., D.M. Kurn, D.S. Durfee, C.G. Townsend, and W. Ketterle. Output coupler for Bose-Einstein condensed atoms. *Physical Review Letters*, 78(2):582–585, January 1997.
- [21] E.W. Hagley, L. Deng, M. Kozuma, J. Wen, K. Helmerson, S.L. Rolston, and W.D. Phillips. A well-collimated quasi-continuous atom laser. *Science*, 283:1706, 1999.
- [22] I. Bloch, T.W. Hänsch, and T. Esslinger. Atom laser with a cw output coupler. *Physical Review Letters*, 82(15):3008–11, April 1999.
- [23] J.S. Russell. Report on waves: 14th meeting of the British Association for the Advancement of Science, 1845.
- [24] O. Morsch, M. Cristiani, J.H. Müller, D. M. Ciampini, and E. Arimondo. Free expansion of a Bose-Einstein condensate in a one-dimensional optical lattice. *Physical Review A*, 66(021601), 2002.
- [25] J.T.M. Walraven. Atomic hydrogen in magnetostatic traps. In G.L. Oppo, S.M. Barnett, E. Riis, and M. Wilkinson, editors, *Quantum Dynamics of Simple Systems*, volume 44, Bristol, 1996. IOP.
- [26] W. Phillips and H.J. Metcalf. Laser deceleration of an atomic beam. *Physical Review Letters*, 48(9):596–99, March 1982.

- [27] S. Chu, L. Hollberg, J.E. Bjorkholm, A. Cable, and A. Ashkin. Three-dimensional viscous confinement and cooling of atoms by resonance radiation pressure. *Physical Review Letters*, 55(1):48–51, July 1985.
- [28] E.L. Raab, M. Prentiss, A. Cable, S. Chu, and D.E. Pritchard. Trapping of neutral sodium atoms with radiation pressure. *Physical Review Letters*, 59(23):2631–34, December 1987.
- [29] A.L. Migdall, J.V. Prodan, W.D. Phillips, T.H. Bergeman, and H.J. Metcalf. First observation of magnetically trapped neutral atoms. *Physical Review Letters*, 54(24):2596–99, June 1985.
- [30] N. Masuhara, J.M. Doyle, J.C. Sandberg, D. Kleppner, J.T. Greytak, H.F. Hess, and G.P. Kochanski. Evaporative cooling of spin-polarized atomic hydrogen. *Physical Review Letters*, 61(8):935–38, August 1988.
- [31] C.C. Bradley, C.A. Sackett, J.J. Tollet, and R.G. Hulet. Evidence of Bose-Einstein condensation in an atomic gas with attractive interactions. *Physical Review Letters*, 79:1170, 1997.
- [32] C.C. Bradley, S.A. Sackett, and R.G. Hulet. Bose-Einstein condensation of lithium: Observation of limited condensate number. *Physical Review Letters*, 78(6):985–989, February 1997.
- [33] A.I. Safonov, S.A. Vasilyev, I.S. Yasnikov, I.I. Lukashevich, and S. Jaakkola. Observation of quasicondensate in two-dimensional atomic hydrogen. *Physical Review Letters*, 81(21):4545–48, November 1998.
- [34] D.G. Fried, T.C. Killian, L. Willmann, D. Landhuis, S.C. Moss, D. Kleppner, and T.J. Greytak. Bose-Einstein condensation of atomic hydrogen. *Physical Review Letters*, 81(8):3811–14, November 1998.
- [35] A. Robert, O. Sirjean, A. Browaeys, J. Poupard, S. Nowak, D. Boiron, C. Westbrook, and A. Aspect. A Bose-Einstein condensate of metastable atoms. *Science*, 292:461–64, 2001.
- [36] F.P. Dos Santos, J. Lonard, J. Wang, C.J. Barrelet, F. Perales, E. Rasel, C.S. Unnikrishnan, M. Leduc, and C. Cohen-Tannoudji. Bose-Einstein condensation of metastable helium. *Physical Review Letters*, 86(16):3459–62, April 2001.
- [37] G. Modugno, G. Ferrari, G. Roati, R.J. Brecha, A. Simoni, and M. Inguscio. Bose-Einstein condensation of potassium atoms by sympathetic cooling. *Science*, 294:1320–23, November 2001.
- [38] T. Weber, J. Herbig, M. Mark, H.-C. Nägerl, and R. Grimm. Bose-Einstein condensation of cesium. *Science*, 299:232–35, January 2003.
- [39] Y. Takasu, K. Maki, K. Komori, T. Takano, K. Honda, M. Kumakura, T. Yabuzaki, and Y. Takahashi. Spin-singlet Bose-Einstein condensation of two-electron atoms. *Physical Review Letters*, 91(4):040404, July 2003.

- [40] Arbeitsgruppe Tilman Pfau. persönliche Mitteilung, Juni 2003.
- [41] J. Herbig, T. Krämer, M. Mark, T. Weber, C. Chin, H.-C. Nägerl, and R. Grimm. Preparation of a pure molecular quantum gas. *Science*, 301:1510–13, September 2003.
- [42] S. Dürr, T. Volz, A. Marte, and G. Rempe. Observation of molecules produced from a Bose-Einstein condensate. *Physical Review Letters*, 92(2):020406, January 2004.
- [43] K. Xu, T. Mukaiyama, J.R. Abo-Shaeer, J.K. Chin, D.E. Miller, and W. Ketterle. Formation of quantum-degenerate sodium molecules. *Physical Review Letters*, 91(21):210402, November 2003.
- [44] S. Jochim, M. Bartenstein, A. Altmeyer, G. Hendl, S. Riedl, C. Chin, J. Hecker-Denschlag, and R. Grimm. Bose-Einstein condensation of molecules. *Science*, 302:2101–3, December 2003.
- [45] M. Greiner, C.A. Regal, and D.S. Jin. Emergence of a molecular Bose-Einstein condensate from a fermi gas. *Nature*, 426:537–40, December 2003.
- [46] M.W. Zwierlein, C.A. Stan, C.H. Schunck, S.M.F. Raupach, S. Gupta, Z. Hadzi-babic, and W. Ketterle. Observation of Bose-Einstein condensation of molecules. *Physical Review Letters*, 91(25):250401, December 2003.
- [47] W. Hofstetter, J.I. Cirac, P. Zoller, E. Demler, and M.D. Lukin. High-temperature superfluidity of fermionic atoms in optical lattices. *Physical Review Letters*, 89(22):220407, November 2002.
- [48] B. DeMarco and D.S. Jin. Onset of fermi degeneracy in a trapped atomic gas. *Science*, 285:1703–06, September 1999.
- [49] K. Forberich. Aufbau einer Quelle für nichtlineare Atomoptik. Diplomarbeit, Universität Konstanz, Oktober 2001.
- [50] P. Treutlein. Dispersionsmanagement für Materiewellen. Diplomarbeit, Universität Konstanz, Oktober 2002.
- [51] J.R. Ensher. *The First Experiments with Bose-Einstein Condensation of ^{87}Rb* . PhD thesis, University of Colorado at Boulder, 1998.
- [52] T.W. Hänsch and A.L. Schawlow. Cooling of gases by laser radiation. *Optics Communication*, 13:68–69, 1975.
- [53] D. Wineland and H. Dehmelt. Proposed $10^{-14} d\nu/\nu$ laser fluorescence spectroscopy on Tl^+ mono-ion oscillator III. *Bull. Am. Phys. Soc.*, 20:637–39, 1975.
- [54] H.J. Metcalf and P. van der Straten. *Laser Cooling and Trapping*. Springer Verlag, 1999.
- [55] C.S. Adams and E. Riis. Laser cooling and trapping of neutral atoms. *Progress in Quantum Electronics*, 21:1, 1997.

- [56] J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji. Laser cooling below the doppler limit by polarization gradients: simple theoretical models. *J. Opt. Soc. Am. B*, 6(11):2023–45, November 1989.
- [57] C.G. Townsend, N.H. Edwards, C.J. Cooper, K.P. Zetie, C.J. Foot, A.M. Steane, P. Szriftgiser, H. Perrin, and J. Dalibard. Phase-space density in the magneto-optical trap. *Physical Review A*, 52:1423–40, August 1995.
- [58] C.P. Townsend. *Laser Cooling and Trapping of Atoms*. PhD thesis, Clarendon Laboratory, Oxford, 1995.
- [59] P.D. Lett, R.N. Watts, C.I. Westbrook, W.D Phillips, P.L. Gould, and H.J. Metcalf. Observation of atoms cooled below the doppler limit. *Physical Review Letters*, 61(2):169–72, July 1989.
- [60] P.D. Lett, W.D. Phillips, S.L. Rolston, C.E. Tanner, R.N. Watts, and C.I. Westbrook. Optical molasses. *J. Opt. Soc. Am. B*, 6(11):2084–2106, November 1989.
- [61] W. Demtröder. *Laserspektroskopie*. Springer-Verlag, Berlin, 4 edition, 2000.
- [62] E. Riis, D.S. Weiss, K.A. Moler, and S. Chu. Atom funnel for the production of a slow, high-density atomic beam. *Physical Review Letters*, 64(14):1658–61, April 1990.
- [63] K. Dieckmann, R.J.C. Spreeuw, M. Weidemüller, and J.T.M Walraven. Two-dimensional magneto-optical trap as a source of slow atoms. *Physical Review A*, 58(5):3891–95, November 1998.
- [64] E. Majorana. *Nuovo Cimento*, 9:43–50, 1932.
- [65] W. Petrich, M. Anderson, J. Ensher, and E. Cornell. Stable, tightly confining magnetic trap for evaporative cooling of neutral atoms. *Physical Review Letters*, 74(17):3352–55, April 1995.
- [66] E.W. Hagley. Er verfasste eine detaillierte Beschreibung der Magnetfalle der Gruppe von W. Phillips und stellte uns diese zur Verfügung., 2000.
- [67] P.S. Jessen and I.H. Deutsch. Optical lattices. *Adv. At. Mol. Opt. Phys.*, 37:95, 1996.
- [68] P. Horowitz and W. Hill. *The Art of Electronics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1989.
- [69] M.R. Andrews, M.-O. Mewes, N.J. van Druten, D.S. Durfee, D.M. Kurn, and W. Ketterle. Direct, nondestructive observation of a Bose condensate. *Science*, 273:84–87, July 1996.
- [70] C.C. Bradley, C.A. Sackett, and R.G. Hulet. Analysis of in situ images of Bose-Einstein condensates of lithium. *Physical Review A*, 55(5):3951–55, May 1997.
- [71] M.R. Matthews. *Two-component Bose-Einstein condensation. Chapter 4*. PhD thesis, University of Colorado, 1999.

- [72] J. Prodan, W. Phillips, and H. Metcalf. Laser production of a very slow monoenergetic atomic beam. *Physical Review Letters*, 49:1149–52, 1982.
- [73] D.E. Pritchard. Cooling neutral atoms in a magnetic trap for precision spectroscopy. *Physical Review Letters*, 51(15):1336–39, October 1983.
- [74] T. Bergeman, G. Erez, and H.J. Metcalf. Magnetostatic trapping field for neutral atoms. *Physical Review A*, 35(4):1535–46, February 1987.
- [75] V.S. Bagnato, G.P. Lafyatis, A.G. Martin, E.L. Raab, R.N. Ahmad-Bitar, and D.E. Pritchard. Continuous stopping and trapping of neutral atoms. *Physical Review Letters*, 58(21):2194–97, May 1987.
- [76] W. Ketterle and N.J. van Druten. Evaporative cooling of trapped atoms. *Adv. At. Mol. Opt. Phys.*, 37:181, 1996.
- [77] M.D. Barrett, J.A. Sauer, and M.S. Chapman. All-optical formation of an atomic Bose-Einstein condensate. *Physical Review Letters*, 87(1):101404, July 2001.
- [78] H. Ott, J. Fortagh, G. Schlotterbeck, A. Grosmann, and C. Zimmermann. Bose-Einstein condensation on a surface microtrap. *Physical Review Letters*, 87:230401, 2001.
- [79] W. Hänsel, P. Hommelhoff, T.W. Hänsch, and J. Reichel. Bose-Einstein condensation on a microelectronic chip. *Nature*, 413(3):498, October 2001.
- [80] A. Kasper, S. Schneider, Ch. vom Hagen, M. Bartenstein, B. Engeser, T. Schumm, I. Bar-Joseph, R. Folman, L. Feenstra, and J. Schmiedmayer. A Bose-Einstein condensate in a microtrap. *Journal of Optics B*, 5:143–49, April 2003.
- [81] Department of Physics: Georgia Southern University. <http://bec01.phy.gasou.edu/>.
- [82] W. Petrich, M. H. Anderson, J.R. Ensher, and E. A. Cornell. Behaviour of atoms in a compressed magneto-optical trap. *J. Opt. Soc. Am. B*, 11(8):1332–35, August 1994.
- [83] J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji. Dressed-atom approach to atomic motion in laser light: the dipole force revisited. *J. Opt. Soc. Am. B*, 2(11):1707–20, November 1985.
- [84] A.E. Leanhardt, T.A. Pasquini, M. Saba, A. Schirotzek, Y. Shin, D. Kielpinski, D.E. Pritchard, and W. Ketterle. Cooling Bose-Einstein condensates below 500 picokelvin. *Science*, 301:1513–15, September 2003.
- [85] J. Soeding, D. Guery-Odelin, P. Desbiolles, F. Chevy, H. Inamori, and J. Dalibard. Three-body decay of a rubidium Bose-Einstein condensate. *App. Phys. B*, 69:257–61, 1999.
- [86] F. Dalfovo, C. Minniti, and L.P. Pitaevskii. Frequency shift and mode coupling in the nonlinear dynamics of a Bose-condensed gas. *Physical Review A*, 56(6):4855, 1997.

- [87] D.M. Stamper-Kurn, H.-J. Miesner, S. Inouye, M.R. Andrews, and W. Ketterle. Collisionless and hydrodynamic excitations of a Bose-Einstein condensate. *Physical Review Letters*, 81(3):500, 1998.
- [88] W. Nolting. *Statistische Physik*. Verlag Zimmermann-Neufang, Ulmen, Germany, 1994.
- [89] K. Huang. *Statistical Mechanics*. John Wiley, New York, 2nd edition, 1987.
- [90] E.G.M. van Kempen, S.J.J.M.F. Kokkelmans, D.J. Heinzen, and B.J. Verhaar. Interisotope determination of ultracold rubidium interactions from three high-precision experiments. *Physical Review Letters*, 88(9):093201, March 2002.
- [91] O. Penrose and L. Onsager. Bose-Einstein condensation and liquid Helium. *Phys. Review*, 104(3):576–84, November 1956.
- [92] W. Ketterle and N.J. van Druten. Bose-Einstein condensation of a finite number of particles trapped in one or three dimensions. *Physical Review A*, 54:656–60, July 1996.
- [93] E.P. Gross. Structure of a quantized vortex in boson systems. *Nuovo Cimento*, 20:454, 1961.
- [94] E.P. Gross. Hydrodynamics of a superfluid condensate. *J. Math. Phys.*, 4:195, 1963.
- [95] L.P. Pitaevskii. Vortex lines in an imperfect Bose gas. *Sov. Phys. JETP*, 13:451, 1961.
- [96] Y. Kagan, E.L. Surkov, and G.V. Shlyapnikov. Evolution of a Bose-condensed gas under variation of the confining potential. *Physical Review A*, 54(3):R1753–56, September 1996.
- [97] Y. Castin and R. Dum. Bose-Einstein condensates in time dependent traps. *Physical Review Letters*, 77(27):5315–19, December 1996.
- [98] M. Olshanii. Atomic scattering in the presence of an external confinement and a gas of impenetrable bosons. *Physical Review Letters*, 81(5):938–41, August 1998.
- [99] D.S. Petrov, G.V. Shlyapnikov, and J.T.M. Walraven. Regimes of quantum degeneracy in trapped 1d gases. *Physical Review Letters*, 85(18):3745–48, October 2000.
- [100] M.L. Chiofalo and M.P. Tosi. Output from Bose condensates in tunnel arrays: the role of mean-field interactions and of transverse confinement. *Phys. Lett. A*, 268:406, 2000.
- [101] L. Salasnich, A. Parola, and L. Reatto. Effective wave equations for the dynamics of cigar-shaped and disk-shaped Bose condensates. *Physical Review A*, 65(4):043614, 2002.

- [102] V.M. Pérez-García, H. Michinel, J.I. Cirac, M. Lewenstein, and P. Zoller. Low energy excitations of a Bose-Einstein condensate: A time-dependent variational analysis. *Physical Review Letters*, 77(27):5320–23, December 1996.
- [103] V.M. Pérez-García, H. Michinel, J.I. Cirac, M. Lewenstein, and P. Zoller. Dynamics of Bose-Einstein condensates: Variational solutions of the gross-pitaevskii equations. *Physical Review A*, 56(2):1424–32, August 1997.
- [104] A. Parola, L. Salasnich, and Reatto L. Structure and stability of bosonic clouds: Alkali-metal atoms with negative scattering length. *Physical Review A*, 57(5):R3180–84, May 1998.
- [105] K.M. Hilligsøe, M.K. Oberthaler, and K.-P. Marzlin. Stability of gap solitons in a Bose-Einstein condensate. *Physical Review A*, 66:063605,1–7, 2002.
- [106] G. Baym and C.J. Pethick. Ground state properties of magnetically trapped Bose-condensed rubidium gas. *Physical Review Letters*, 76(1):6–9, January 1996.
- [107] L. Plaja and L. Santos. Expansion of a Bose-Einstein condensate in an atomic waveguide. *Physical Review A*, 65:035602, 2002.
- [108] A. Marte, T. Volz, J. Schuster, S. Dürr, G. Rempe, E.G.M. van Kempen, and B.J. Verhaar. Feshbach resonances in rubidium 87: Precision measurement and analysis. *Physical Review Letters*, 89(28):283202, December 2002.
- [109] S. Inouye, M.R. Andrews, J. Stenger, H.-J. Miesner, D.M. Stamper-Kurn, and W. Ketterle. Observation of Feshbach resonances in a Bose-Einstein condensate. *Nature*, 392:151, 1998.
- [110] N.J. Ashcroft and N.D. Mermin. *Festkörperphysik*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag, München, 2001.
- [111] M. Abramowitz and I.A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, New York, 1972.
- [112] J. Callaway. *Quantum Theory of the Solid State*. Academic Press, San Diego, second edition, 1991.
- [113] M.J. Steel and W. Zhang. Bloch function description of a Bose-Einstein condensate in a finite optical lattice. *arXiv:cond-mat/9810284*, 1998.
- [114] H. Pu, L.O. Baksmaty, W. Zhang, N.P. Bigelow, and P. Meystre. Effective-mass analysis of Bose-Einstein condensates in optical lattices: Stabilization and levitation. *Physical Review A*, 67(4):043605, 2003.
- [115] K.M. Hilligsøe. Bright atomic solitons in Bose-Einstein condensates. Master's thesis, University of Aarhus, Universität Konstanz, 2001.
- [116] C.M. de Sterke and J.E. Sipe. Gap solitons. In E. Wolf, editor, *Progress in Optics*, volume XXXIII, page 203, Amsterdam, 1994. North-Holland.

- [117] C.M. de Sterke, D.G. Salinas, and J.E. Sipe. Coupled-mode theory for light propagation through deep nonlinear gratings. *Physical Review E*, 54(2):1969, August 1996.
- [118] A. Trombettoni and A. Smerzi. Discrete solitons and breathers with dilute Bose-Einstein condensates. *Physical Review Letters*, 86(11):2353–56, March 2001.
- [119] A. Messiah. *Quantenmechanik*, volume 2. de Gruyter, Berlin, third edition, 1990.
- [120] M. Ben Dahan, E. Peik, J. Reichel, Y. Castin, and C. Salomon. Bloch oscillations of atoms in an optical potential. *Physical Review Letters*, 76(24):4508–11, June 1996.
- [121] B. Wu and Q. Niu. Nonlinear Landau-Zener tunneling. *Physical Review A*, 61(2):023402, 2000.
- [122] B. Wu and Q. Nu. Superfluidity of Bose-Einstein condensate in an optical lattice: Landau-Zener tunnelling and dynamical instability. *New Journal of Physics*, 5:104,1–24, 2003.
- [123] D. Diakonov, L.M. Jensen, C.J. Pethick, and H. Smith. Loop structure of the lowest Bloch band for a Bose-Einstein condensate. *Physical Review A*, 66:013604, 2002.
- [124] D. Choi and B. Wu. To detect the looped bloch bands of Bose-Einstein condensates in optical lattices. *Physics Letters A*, 318:558–63, 2003.
- [125] G. Agrawal. *Nonlinear fiber optics*. Academic Press, San Diego, 2 edition, 1995.
- [126] J.W. Fleischer, T. Carmon, M. Segev, N.K. Efremidis, and D.N. Christodoulides. Observation of discrete solitons in optically induced real time waveguide arrays. *Physical Review Letters*, 90(2):023902, 2003.
- [127] J.W. Fleischer, M. Segev, N.K. Efremidis, and D.N. Christodoulides. Observation of two-dimensional discrete solitons in optically induced nonlinear photonic lattices. *Nature*, 422:147, 2003.
- [128] Y. Kivshar and B. Luther-Davies. Dark optical solitons: physics and applications. *Physics Reports*, pages 81–197, 1998.
- [129] S. Burger, K. Bongs, S. Dettmer, W. Ertmer, K. Sengstock, A. Sanpera, G.V. Shlyapnikov, and M. Lewenstein. Dark solitons in Bose-Einstein condensates. *Physical Review Letters*, 83(25):5198–5201, December 1999.
- [130] J. Denschlag, Simsarian. J.E., D.L. Feder, C.W. Clark, L.A. Collins, J. Cubizolles, L. Deng, E.W. Hagley, K. Helmerson, W.P. Reinhardt, S.L. Rolston, B.I. Schneider, and W.D. Phillips. Generating solitons by phase engineering of a Bose-Einstein condensate. *Science*, 287:97–100, January 2000.
- [131] B.P. Anderson, P.C. Haljan, C.A. Regal, D.L. Feder, L.A. Collins, C.W. Clark, and E.A. Cornell. Watching dark solitons decay into vortex rings in a Bose-Einstein condensate. *Physical Review Letters*, 86(14):2926–29, April 2001.

- [132] S. Burger, L.D. Carr, P. Öhberg, K. Sengstock, and A. Sanpera. Generation and interaction of solitons in Bose-Einstein condensates. *Physical Review A*, 65:043611,1–9, January 2002.
- [133] C.S. Gardner, J.M. Green, M.D. Kruskal, and R.M. Miura. Method for solving the Korteweg-de Vries equation. *Physical Review Letters*, 19:1095–97, 1967.
- [134] V.E. Zakharov and A.B. Shabat. Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media. *Sov. Phys. JETP*, 34(1):62–69, 1972.
- [135] L. Salasnich. Solitary-waves of the nonpolynomial schrodinger equation: Bright solitons in Bose-Einstein condensates. *arXiv:cond-mat/0305054*, May 2003.
- [136] M. Remoissenet. *Waves Called Solitons*. Springer Verlag, Berlin, 3 edition, 1999.
- [137] J.J. Sakurai. *Modern quantum mechanics*. Addison-Wesley, New York, revised edition, 1994.
- [138] C.M. de Sterke and J.E. Sipe. Application of the split operator fourier transform method to the solution of the nonlinear Schrödinger equation. In *AIP Conference Proceedings*, volume 160, page 269, 1986.
- [139] F. Dalfovo and S. Stringari. Bosons in anisotropic traps: Ground states and vortices. *Physical Review A*, 53(4):2477–85, April 1996.
- [140] M.L. Chiofalo, S. Succi, and M.P. Tosi. Ground state of trapped interacting Bose-Einstein condensates by an explicit imaginary-time algorithm. *Physical Review E*, 62(5):7438–44, November 2000.
- [141] M. Kozuma, L. Deng, E.W. Hagley, J. Wen, R. Lutwak, K. Helmerson, S.L. Rolston, and W.D. Phillips. Coherent splitting of Bose-Einstein condensed atoms with optically induced bragg diffraction. *Physical Review Letters*, 82(5):871–75, February 1999.
- [142] L.D. Landau. *Phys. Z. Sov.* 2, 2:46ff, 1932.
- [143] C. Zener. *Proc. Roy. Soc. (London)*, A137:696ff, 1932.
- [144] J. Liu, L. Fu, B.-Y. Ou, S.-G. Chen, D.-I. Choi, B. Wu, and Q. Niu. Theory of nonlinear Landau-Zener tunneling. *Physical Review A*, 66(2):023404, 2002.
- [145] Q. Niu and M. Raizen. How Landau-Zener tunneling takes time. *Physical Review Letters*, 80(16):3491–94, April 1998.
- [146] S.R. Wilkinson, C.F. Bharucha, M.C. Fischer, K.W. Madison, P.R. Morrow, Q. Niu, B. Sundaram, and M.G. Raizen. Experimental evidence for non-exponential decay in quantum tunnelling. *Nature*, 387:575–78, June 1997.
- [147] P. Marzlin. Zweidimensionale numerische Rechnungen, die von Peter Marzlin an der Universität Konstanz durchgeführt wurden, zeigen die anfängliche Kompression und die transversale Verbreiterung des Wellenpakets, 2002.

- [148] R.G. Scott, T.M. Martin, A.M. Fromhold, F.W. Bujkiewicz, S. Sheard, and M. Leadbeater. Creation of solitons and vortices by bragg reflection of Bose-Einstein condensates in an optical lattice. *Physical Review Letters*, 90(11):110404, March 2003.
- [149] G. Agrawal. *Applications of Nonlinear Fiber Optics*. Academic Press, San Diego, 2nd edition, 2001.
- [150] D. Jaksch, C. Bruder, J.I. Cirac, C.W. Gardiner, and P. Zoller. Cold bosonic atoms in optical lattices. *Physical Review Letters*, 81(15):3108–11, October 1998.
- [151] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. Hänsch, and I. Bloch. Quantum phase transition from a superfluid to a mott insulator in a gas of ultracold atoms. *Nature*, 415:39–44, January 2002.
- [152] E. Peik, M. Ben Dahan, I. Bouchoule, Y. Castin, and C. Salomon. Bloch oscillations of atoms, adiabatic rapid passage, and monokinetic atomic beams. *Physical Review A*, 55(4):2989, April 1997.
- [153] Q. Niu, X.-G. Zhao, G.A. Georgakis, and M.G. Raizen. Atomic Landau-Zener tunneling and Wannier-Stark ladders in optical potentials. *Physical Review Letters*, 76(24):4504–07, June 1996.
- [154] S.R. Wilkinson, C.F. Bharucha, K.W. Madison, Q. Niu, and M.G. Raizen. Observation of atomic Wannier-Stark ladders in an accelerating optical potential. *Physical Review Letters*, 76(24):4512–15, June 1996.
- [155] O. Morsch, J.H. Müller, M. Cristiani, D. Ciampini, and E. Arimondo. Bloch oscillations and mean-field effects of Bose-Einstein condensates in 1-d optical lattices. *Physical Review Letters*, 87(14):140402, October 2001.
- [156] M. Cristiani, O. Morsch, Müller J.H., D. Ciampini, and E. Arimondo. Experimental properties of Bose-Einstein condensates in 1d optical lattices: Bloch oscillations, Landau-Zener tunneling and mean-field effects. *Physical Review Letters*, 65:063612, June 2002.
- [157] S. Burger, F.S. Cataliotti, C. Fort, F. Minardi, and M. Inguscio. Superfluid and dissipative dynamics of a Bose-Einstein condensate in a periodic optical potential. *Physical Review Letters*, 86(20):4447–50, May 2001.
- [158] M. Krämer, L. Pitaevskii, and S. Stringari. Macroscopic dynamics of a trapped Bose-Einstein condensate in the presence of 1d and 2d optical lattices. *Physical Review Letters*, 88(18):180404, May 2002.
- [159] J. Hecker-Denschlag, J.E. Simsarian, H. Häffner, C. McKenzie, A. Browaeys, D. Cho, K. Helmerson, S.L. Rolston, and W.D. Phillips. A Bose-Einstein condensate in an optical lattice. *Journal of Physics B*, 35:3095–3110, 2002.
- [160] L. Fallani, F.S. Cataliotti, J. Catani, C. Fort, M. Modugno, M. Zawada, and M. Inguscio. Optically induced lensing effect on a Bose-Einstein condensate expanding in a moving lattice. *Physical Review Letters*, 91(24):240405, December 2003.

- [161] R. Morandotti, U. Peschel, J.S. Aitchison, H.S. Eisenberg, and Y. Silberberg. Experimental observation of linear and nonlinear optical Bloch oscillations. *Physical Review Letters*, 83(23):4756–59, December 1999.
- [162] H.S. Eisenberg, Y. Silberberg, R. Morandotti, and J.S. Aitchinson. Diffraction management. *Physical Review Letters*, 85(9):1863–66, August 2000.
- [163] B. Eiermann, P. Treutlein, Th. Anker, M. Albiez, M. Taglieber, K.-P. Marzlin, and M.K. Oberthaler. Dispersion management for atomic matter waves. *Physical Review Letters*, 91(6):060402, August 2003.
- [164] Th. Anker, M. Albiez, B. Eiermann, M. Taglieber, and M.K. Oberthaler. Linear and nonlinear dynamics of matter wave packets in periodic potentials. *Opt. Express*, 12(1):11–18, January 2004.
- [165] L.F. Mollenauer, R.H. Stolen, and J.P. Gordon. Experimental observation of picosecond pulse narrowing and solitons in optical fibers. *Physical Review Letters*, 45:1095, 1980.
- [166] B.J. Eggleton and R.E. Slusher. Bragg grating soliton. *Physical Review Letters*, 76(10):1627–30, March 1996.
- [167] L. Khaykovich, F. Schreck, F. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles, L.D. Carr, Y. Castin, and C. Salomon. Formation of a matter wave bright soliton. *Science*, 296:1290–93, May 2002.
- [168] L. Carr and Y. Castin. Dynamics of a matter-wave bright soliton in an expulsive potential. *arXiv:cond-mat/0205624*, May 2002.
- [169] K.E. Strecker, G.B. Partridge, A.G. Truscott, and R.G. Hulet. Formation and propagation of matter wave soliton trains. *Nature*, 417:150–153, May 2002.
- [170] U.A. Khawaja, H.T.C. Stoof, R.G. Hulet, K.E. Strecker, and G.B. Partridge. Bright soliton trains of trapped Bose-Einstein condensates. *Physical Review Letters*, 89(20):200404, November 2002.
- [171] L.D. Carr and J. Brand. Spontaneous soliton formation and modulational instability in Bose-Einstein condensates. *Physical Review Letters*, 92(4):040401, January 2004.
- [172] O. Zobay, S. Pötting, P. Meystre, and E.M. Wright. Creation of gap solitons in Bose-Einstein condensates. *Physical Review A*, 59(1):643, 1999.
- [173] P. Meystre. *Atom Optics*. Springer Verlag, New York, 2001.
- [174] W.P. Reinhardt, M.A. Leung, and L.D. Carr. Separability and stability of solutions of the 1-dimensional NLSE with respect to extensions into 2 and 3 dimensions, and to initial perturbation by white noise. *Int. Journal of Mod. Phys. B*, 15:1668ff, 2001.

- [175] A.E. Muryshev, H.B. van Linden van den Heuvell, and G. V. Shlyapnikov. Stability of standing matter waves in a trap. *Physical Review A*, 60(4):R2665–R2668, October 1999.
- [176] A. Görlitz, J.M. Vogels, A.E. Leanhardt, C. Raman, T.L. Gustavson, J.R. Abo-Shaeer, A.P. Chikkatur, S. Gupta, S. Inouye, T.P. Rosenband, D.E. Pritchard, and W. Ketterle. Realization of Bose-Einstein condensates in lower dimensions. *Physical Review Letters*, 87(13):130402, April 2001.
- [177] H. Moritz, T. Stöferle, M. Köhl, and T. Esslinger. Exciting collective oscillations in a trapped 1d gas. *Physical Review Letters*, 91:250402, December 2003.
- [178] M. Taglieber. Helle atomare Gap-Solitonen. Diplomarbeit, Universität Konstanz, Oktober 2003.
- [179] F.Kh. Abdullaev, B.B. Baizakov, S.A. Darmanyan, V.V. Konotop, and M. Salerno. Nonlinear excitations in arrays of Bose-Einstein condensates. *Physical Review A*, 64(4):043606–1–10, September 2001.
- [180] P.J.Y. Louis, E.A. Ostrovskaya, C.M. Savage, and Y.S. Kivshar. Bose-Einstein condensates in optical lattices: Band-gap structure and solitons. *Physical Review A*, 67:013602, 2003.
- [181] V. Ahufinger, A. Sanpera, P. Pedri, L. Santos, and M. Lewenstein. Creation of discrete solitons and observation of the Peierls-Nabarro barrier in Bose-Einstein condensates. *arXiv:cond-mat/0310042*, October 2003.
- [182] E.A. Ostrovskaya and Y.S. Kivshar. Matter-wave gap solitons in atomic band gap structures. *Physical Review Letters*, 90(16):160407, April 2003.
- [183] H. Saito and M. Ueda. Dynamically stabilized bright solitons in a two-dimensional Bose-Einstein condensate. *Physical Review Letters*, 90(4):040403, January 2003.
- [184] F.Kh. Abdullaev, B.B. Baizakov, and M. Salerno. Stable two-dimensional dispersion-managed soliton. *arXiv:cond-mat/0306224*, June 2003.
- [185] B.B. Baizakov, B.A. Malomed, and M. Salerno. Multidimensional solitons in periodic potentials. *arXiv:cond-mat/0306645*, June 2003.
- [186] F.Kh. Abdullaev and R. Galimzyanov. Dynamics of bright matter wave solitons in a quasi 1d Bose-Einstein condensate with a rapidly varying trap. *arXiv:cond-mat/0208071*, August 2002.
- [187] B. Wu and Q. Niu. Landau and dynamical instabilities of the superflow of Bose-Einstein condensates in optical lattices. *Physical Review A*, 64(6):061603, 2001.
- [188] V.V. Konotop and M. Salerno. Modulational instability in Bose-Einstein condensates in optical lattices. *Physical Review A*, 65:201602, January 2002.
- [189] B.B. Baizakov, V.V. Konotop, and M. Salerno. Regular spatial structures in arrays of Bose-Einstein condensates induced by modulational instability. *Journal of Physics B*, 35:5105–19, 2002.

- [190] L. Salasnich, A. Parola, and L. Reatto. Modulational instability and complex dynamics of confined matter-wave solitons. *Physical Review Letters*, 91(8):080504, August 2003.
- [191] A. Smerzi and A. Trombettoni. Nonlinear tight-binding approximation for Bose-Einstein condensates in a lattice. *arXiv:cond-mat/0309285*, September 2003.
- [192] Y. Shin, M. Saba, T.A. Pasquini, W. Ketterle, D.E. Pritchard, and A.E. Leanhardt. Atom interferometry with Bose-Einstein condensates in a double-well potential. *arXiv:cond-mat/0306305*, July 2003.
- [193] Y. Shin, M. Saba, A. Schirotzek, T.A. Pasquini, A.E. Leanhardt, D.E. Pritchard, and W. Ketterle. Distillation of Bose-Einstein condensates in a double-well potential. *arXiv:cond-mat/0311514*, November 2003.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen Personen bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Mein spezieller Dank gilt dabei:

- Prof. Markus Kurt Oberthaler, der mir die Gelegenheit gegeben hat, an einem spannenden und exzellent ausgestatteten Experiment mitzuarbeiten. Für die hervorragende, intensive Betreuung danke ich ihm ganz besonders. Er war mir über die Physik hinaus zu jeder Tages- und vor allem Nachtzeit ein willkommener Gesprächspartner zu vielen Dingen des alltäglichen Lebens. Sein Enthusiasmus und seine Großzügigkeit werden mir in stetiger Erinnerung bleiben.
- Prof. Jürgen Mlynek, der mich zu seinen Konstanzer Zeiten an seinem Lehrstuhl zunächst als Hiwi, später als Diplomand und schließlich als Doktorand³ aufgenommen hat. Er hat durch seine großzügige, uneingeschränkte Unterstützung des Experiments wesentlich zu dessen Erfolg beigetragen. Unvergesslich bleiben seine Sprüche und seine Frage: „Herr Eiermann, ich weiß ich habe sie schon ein paar Mal gefragt, aber woran...“
- Prof. Paul Leiderer, der sich bereit erklärt hat, die vorliegende Arbeit zu begutachten.
- Meinen Mitdoktoranden Thomas Anker und Michael Albiez: Ohne Thomas hätte diese Arbeit vielleicht nach der Einleitung geendet; ohne Michael (dem später Hinzugekommenen) vielleicht nach dem Theoriekapitel. Über das Labor- und Büroleben hinaus, haben sie mein Leben, jeder auf seine Art, wahrlich bereichert. Thomas, der sagt, was er denkt (nach Anschwellen der Halsschlagader), hätte wohl auch nie gedacht, das wir irgendwann sogar noch die Wohnung teilen. Michael hat durch seine Art „die Dinge anzupacken“ den Älteren (z.B. mir) in mancher Hinsicht Einiges voraus...
- Den Diplomanden Karen Forberich, Philipp Treutlein, Matthias Taglieber und Stefan Hunsmann, sowie den Post-Docs Marie-Jo Bellanca und Björn Brezger, die zu unterschiedlichen Zeiten zum Erfolg der Erzeugung des atomaren S-Worts beigetragen haben.
- Den anderen Gruppenmitgliedern der Atomoptikgruppe, die da waren oder sind: Martin Göbel, Alex Greiner, Anja Habenicht, Thomas Hörner, Lisa Kierig, Dirk Jürgens, Igor Mourachko, Martin Störzer und Ralf Stützle. Sie waren mir immer freundliche Kollegen und nie faire Gegner beim Autorennen. Jiri Tomkovic und Alex Weber, die sich über ihre Arbeit als Hiwis hinaus, als wahrlich „treue Seelen“ erwiesen haben.
- Peter Marzlin und Jan Krüger. Sie waren durch ihre Fähigkeiten in Theorie und Numerik für viele Einsichten in die Dynamik kalter Materiewellen verantwortlich.

³weit „rumgekommen“ bin ich offenbar nicht.

- Unseren Labornachbarn Oliver Vogelsang und Dennis Weise. Ohne deren großzügige Hilfe wäre manches Experiment nicht möglich gewesen.
- Allen wissenschaftlichen und nicht-wissenschaftlichen Mitarbeitern der Universitäten Konstanz und Heidelberg, ohne deren Arbeit im Hintergrund keine Forschung möglich ist. Der spezielle Dank gilt dabei Ute Hentzen, Stefan Hahn und Stefan Eggert. Sie haben, jeder auf seinem Gebiet, Stefan Hahn auf vielen Gebieten, zum Erfolg des Experiments beigetragen.

Allen genannten Personen möchte ich zudem für die angenehme Arbeitsatmosphäre danken.

Die letzten Jahrzehnte wären ohne meine Familie und Freunde nicht so schön gewesen.

Die letzten Jahre wären nicht so schön gewesen, hätte ich sie nicht mit meiner Freundin Lucie Cernohousova teilen dürfen.